Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 478, 2019 г.

Ф. А. Гнутов, Н. Л. Гордеев

ОБ ОБРАЗЕ ВЕРБАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ С КОНСТАНТАМИ ПРОСТОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

§1. Введение

Пусть G – произвольная группа, а F_n – свободная группа ранга n. Пусть, далее, $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ – некоторая последовательность элементов из G. Выражение вида

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1},$$

где $w_1 = w_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, w_m = w_m(x_1, \ldots, x_n) \in F_n$ – элементы свободной группы, называют словом с константами $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. В данной работе мы будем также предполагать, что $\sigma_i \notin Z(G)$, где $Z(G)$ – центр группы G, и что $w_2, \ldots, w_m \neq 1$. (Отметим, что обычно центральные константы допускаются, но при некотором дополнительном условии; см. [7].) Мы не исключаем случай постоянных слов $w_\Sigma = \sigma \in G$ и случай $\Sigma = \varnothing$, т.е. слов из F_n. Кроме того, мы рассматриваем и тривиальное слово $w_\Sigma = 1$ (здесь 1 – нейтральный элемент группы G). Таким образом, слова с константами здесь – это элементы свободного произведения $G * F_n$ без слов с элементами из центра и единичное слово.

Слово с константами w_Σ определяет вербальное отображение с константами

$$\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G,$$

заданное формулой

$$\widetilde{w}_\Sigma((g_1, \ldots, g_n)) := w_1(g_1, \ldots, g_n)\sigma_1 w_2(g_1, \ldots, g_n)\sigma_2 \cdots w_m(g_1, \ldots, g_n)\sigma_m w_{m+1}(g_1, \ldots, g_n).$$

Ключевые слова: вербальные отображения, вербальные отображения с константами, простые алгебраические группы.

Исследование первого автора проводились при финансовой поддержке гранта РФФИ-19-01-00297. Исследования второго автора проводились при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект 1.661.2016/1.4, и гранта РФФИ-19-01-00297.

В данной работе мы рассматриваем отображения с константами для простой алгебраической группы. Такие отображения, в частности, рассматривались в работах [7–13].

Одним из важных вопросов здесь является вопрос об образе $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ такого отображения. Когда $\Sigma = \varnothing$, т.е. $\widetilde{w}_\Sigma = w$ – обычное вербальное отображение, тогда $\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma} = G$ согласно теореме А. Бореля [2] (здесь $\overline{X}$ – это замыкание X в топологии Зарисского). Для достаточно "общего слова" w_Σ образ $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ также плотен в G ([9], Corollary 1.4). Однако, для произвольного слова мы не можем ожидать, что образ соответствующего вербального отображения "почти совпадает" со всей группой G. Простой пример: $\Sigma = \{\sigma\}, w_\Sigma = x\sigma x^{-1}$ (здесь образ – это класс сопряженности элемента σ, размерность которого может быть достаточно маленькой). Для некоторых слов w_Σ удается доказать, что

$$\overline{\{g\,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma g^{-1} \mid g \in G\}} = G, \tag{1.1}$$

т.е. образ $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ "почти совпадает" со всей группой G с "точностью до" сопряжений элементами группы G. В этом случае мы имеем в образе $\widetilde{w}_\Sigma$ представителей "почти всех" классов сопряженных группы G. Например, это верно для слова вида

$$w_\Sigma = w_1\sigma^{k_1}w_2\sigma^{k_2}\cdots w_m\sigma^{k_m}w_{m+1},\ \text{ где } \sum_i k_i = 0$$

и σ – элемент некоторого открытого подмножества X группы G ([9], теорема 1.6.) Условие (1.1) эквивалентно условию

$$\overline{\mathrm{Im}\ \pi\circ\widetilde{w}_\Sigma} = T/W, \tag{1.2}$$

где $\pi : G \to T/W$ – морфизм факторизации относительно действия группы G на себе сопряжениями, T – максимальный тор, а W – группа Вейля группы G (см. [15], II, §3). Пусть v_Δ – слово с константами. Тогда для слов вида

$$w_\Sigma = v_\Delta g v_\Delta^{-1}, \tag{1.3}$$

где $g \in G$, множество $\mathrm{Im}\ \pi\circ\widetilde{w}_\Sigma$ – это в точности одна точка, т.е. эти слова наиболее "удаленные" от условия (1.2). Слова вида (1.3) будем называть словами *C-типа* (постоянные слова $w_\Sigma = \sigma \in G$ также являются словами C-типа).

Основной результат данной работы – следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G – простая присоединенная алгебраическая группа типа A_l, D_l, E_6, E_7, E_8. Пусть, далее, w_Σ – слово с константами* *из группы G. Множество* $\mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ *состоит из одной точки тогда и только тогда, когда* w_Σ *– слово C-типа.*

Заметим, что $\mathrm{Im}\ \pi\circ\widetilde{w}_\Sigma$ – это образ неприводимого множества G^n относительно регулярного отображения $\pi \circ w_\Sigma$ и поэтому, если $\mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ не является единственной точкой, то $\dim \overline{\mathrm{Im}\ \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma} \geqslant 1$. Это позволяет получить следующее обобщение результата работы [1] (см. также [11]) на вербальные отображения с константами (в работе [1] доказано, что для алгебраически замкнутого поля K любой полупростой элемент группы $\mathrm{PSL}_2(K)$ содержится в образе любого нетривиального вербального отображения $\widetilde{w} : \mathrm{PSL}_2(K)^n \to \mathrm{PSL}_2(K)$).

Теорема 2. *Пусть K – алгебраически замкнутое поле. Пусть* $\widetilde{w}_\Sigma : \mathrm{PSL}_2(K)^n \to \mathrm{PSL}_2(K)$ *– вербальное отображение с константами. Тогда либо любой неединичный полупростой класс сопряженных элементов группы* $\mathrm{PSL}_2(K)$ *пересекается с образом* $\widetilde{w}_\Sigma$*, либо* w_Σ *– слово C-типа.*

Пример. Пусть $w_\Sigma(x) = \sigma_1 x \sigma_2 x^{-1}$ – слово с константами группы $\mathrm{PSL}_2(K)$. Очевидно, w_Σ не является словом C-типа. Если $\sigma_1 = \sigma_2^{-1}$, то $\widetilde{w}_\Sigma(1) = 1 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$. Если элемент σ_1^{-1} не содержится в классе сопряженных элемента σ_2, то $w_\Sigma(g) \neq 1$ для любого элемента $g \in \mathrm{PSL}_2(K)$.

§2. Терминология, обозначения, основные конструкции

2.1. Обозначения.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ – множества натуральных, целых, рациональных и комплексных чисел;

$\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}, \mathbb{Z}^{\mathrm{alg}}$ – поле всех алгебраических чисел и кольцо всех целых алгебраических чисел;

$\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}, \mathbb{Z}^{\mathrm{alg}}_{[\frac{1}{d}]}$ – локализации соответствующих колец относительно мультипликативного множества $\{\frac{1}{d^k} \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ (здесь $d \in \mathbb{N}$ – фиксированное число);

F_p – простое поле характеристики p;

для поля L символ $\overline{L}$ обозначает его алгебраическое замыкание;

$\mathrm{char}\, L$ – характеристика поля L;

для подмножества X некоторого алгебраического многообразия символ $\overline{X}$ обозначает замыкание X в топологии Зарисского.

2.2. Присоединенная простая группа.

Пусть G – простая алгебраическая группа, соответствующая системе корней R.

В данной работе группа G отождествляется с группой точек $G(K)$ для некоторого алгебраически замкнутого поля K бесконечной степени трансцендентности над простым подполем, в частности, в случае $\operatorname{char} L = 0$ будем считать, что $L = \mathbb{C}$. Таким образом, будем считать, что для групп над полем характеристики ноль $G = G(\mathbb{C})$ и группа G определена и расщепима над полем $\mathbb{Q}$.

Далее, мы будем считать, что $Z(G) = 1$ и отождествлять $G = G(K)$ с подгруппой $\mathrm{GL}(L(G))$ (здесь $L(G)$ – алгебра Ли группы G), которая соответствует образу присоединенного представления $G \to \mathrm{GL}(L(G))$. Мы фиксируем базис Шевалле алгебры $L(G)$ и таким образом отождествляем группу G с подгруппой $\mathrm{GL}_r(K)$, где $r = \dim G$. Мы фиксируем также систему корневых подгрупп $\langle x_\alpha(t) \mid t \in K\rangle \leqslant \mathrm{GL}_r(K)$, где $\alpha \in R$. При $K = \mathbb{C}$ элементы матриц $x_\alpha(t)$ имеют вид zt^a для некоторых $z \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N}$ (см. [5], 4.; [16], §3).

2.3. Спуск в поле алгебраических чисел.

Пусть $G = G(\mathbb{C})$ и пусть $A \subset \mathbb{C}$ – некоторое подкольцо (с единицей). Положим

$$G(A) := G \cap \mathrm{GL}_r(A). \tag{2.1}$$

Таким образом, $G(A) \leqslant \mathrm{GL}_r(A)$. Далее пусть $f : A \to A'$ – гомомоморфизм колец. Тогда ему соответствует гомоморфизм групп $\widetilde{f} : G(A) \to \mathrm{GL}_r(A')$, который получается заменой элементов матриц $a_{ij} \in A$ на $f(a_{ij})$.

Положим

$$G_{f,A} := \widetilde{f}(G(A)) \leqslant \mathrm{GL}_r(A'). \tag{2.2}$$

Ниже мы рассматриваем случай, когда $A = \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[a_1, \ldots, a_e]$ – конечнопорожденная алгебра над полем $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, а $A' = \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$. Пусть

$$f \,:\, A = \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[a_1, \ldots, a_e] \to \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$$

– нетривиальный гомоморфизм $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$-алгебр. Тогда $f(\alpha) = \alpha$ для любого $\alpha \in \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ и $\operatorname{Im} f = \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$. Поскольку ограничение $\widetilde{f}$ на подгруппу $G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}) \leqslant G(A)$ является тождественным гомоморфизмом, то из определений (2.1), (2.2) следует, что

$$G_{f,A} = G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}) \leqslant G.$$

2.4. Редукция по простому модулю.

Пусть $G = G(\mathbb{C})$. Далее пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики p бесконечной степени трансцендентности над F_p и пусть $G_p(K)$ – простая присоединенная группа, расщепимая над F_p, у которой система корней совпадает с системой корней G, а $L(G_p)$ – ее алгебра Ли, в которой также зафиксирован базис Шевалле, являющийся "редукцией по модулю p" базиса Шевалле из $L(G)$ (см. [5], 4.; [16], §3). Мы также отождествляем группу $G_p(K)$ с подгруппой $\mathrm{GL}(L(G_p)) = \mathrm{GL}_r(K)$.

Пусть $A = \mathbb{Z}^{\mathrm{alg}}_{[\frac{1}{d}]}$ и $\mathcal{P} \subset A$ – максимальный идеал. Тогда $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]} = p\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}$ для некоторого простого числа p, взаимно простого с d, и $A/\mathcal{P} = \overline{F}_p$ (действительно, для любого элемента $\epsilon \in \overline{F}_p$, существует элемент $\sqrt[s]{1} \in \mathbb{Z}^{\mathrm{alg}}$, для которого $\epsilon = \sqrt[s]{1} \bmod \mathcal{P}$). Таким образом, естественному гомоморфизму колец $f : A \to A/\mathcal{P}$ соответствует гомоморфизм групп

$$\widetilde{f} : G(A) \to \mathrm{GL}_r(\overline{F}_p).$$

Лемма 2.1. *Для любой последовательности элементов $\delta_1, \dots, \delta_m \in G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ существует такое натуральное число d и такой максимальный идеал $\mathcal{P} \subset A = \mathbb{Z}^{\mathrm{alg}}_{[\frac{1}{d}]}$, что:*

a. *$\widetilde{f}(H) = G_p(\overline{F}_p)$ для некоторой подгруппы $H \leqslant G(A)$;*
b. *$\delta_1, \dots, \delta_m \in H$ (здесь H – подгруппа из п. a);*
c. *если $\delta_i \neq 1$ для всех i, то $\widetilde{f}(\delta_i) \neq 1$ для всех i;*
d. *если $\delta_i \neq \delta_j^{-1}$ для некоторых $i \neq j$, то $\widetilde{f}(\delta_i) \neq \widetilde{f}(\delta_j^{-1})$.*

Доказательство. Поскольку для любого алгебраически замкнутого поля L группа точек $G(L)$ над этим полем порождается корневыми подгруппами ([16], §5), для любого элемента $\delta_i \in G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ и любого корня α существует конечное множество элементов $\{t_\alpha(i,k)\}_{k=1}^{k_\alpha} \subset \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ таких, что

$$\delta_i = \prod_{\alpha \in R, 1 \leqslant k \leqslant k_\alpha} x_\alpha(t_\alpha(i,k)),$$

где произведение элементов $x_\alpha(t_\alpha(i,k))$ берется в некотором (зависящем от δ_i) порядке.

Любое алгебраическое число можно представить в виде $\frac{z}{l}$ для некоторых $z \in \mathbb{Z}^{\mathrm{alg}}, l \in \mathbb{N}$. Обозначив через d наименьшее общее кратное таких знаменателей для всех алгебраических чисел $t_\alpha(i,k)\in\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, получим

$$t_\alpha(i,k)\in A:=\mathbb{Z}^{\mathrm{alg}}_{[\frac{1}{d}]}$$

для любых α, i, k, а значит, для любого $i=1,\dots,m$

$$\delta_i\in H:=\langle x_\alpha(t)\ \mid\ \alpha\in R,\, t\in A\rangle\leqslant G(A).$$

Таким образом, подгруппа H порождается корневыми подгруппами, а значит, для любого максимального идеала $\mathcal{P}\subset A$ ее образ $\widetilde{f}(H)$ также порождается корневыми подгруппами $x_\alpha(\bar{t})$, где $\bar{t}\in A/\mathcal{P}$. Так как $\overline{F}_p$ – алгебраически замкнутое поле, то соответствующие корневые подгруппы порождают группу $G_p(\overline{F}_p)$. Таким образом, получаем условия a, b.

Так как множество $\{(t_\alpha(i,k)\}$ конечно, то найдется конечное множество целых алгебраических чисел $\varsigma_1,\dots,\varsigma_s$ таких, что

$$\{(t_\alpha(i,k)\}\subset B:=\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}[\varsigma_1,\dots,\varsigma_s],$$

а значит, для любого $i=1,\dots,m$

$$\delta_i\in H_B:=\langle x_\alpha(t)\ \mid\ \alpha\in R,\ t\in B\rangle.$$

Пусть P – простой идеал кольца B, а $\mathcal{P}\subset A$ – максимальный идеал кольца A, содержащий P. Кольцо $B=\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}(\varsigma_1,\dots,\varsigma_s)$ – это локализация некоторого кольца целых алгебраических чисел. Поэтому P – максимальный идеал в B, $P=\mathcal{P}\cap B$, $P\cap\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}=p\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]}$ для некоторого простого числа p. Кроме того, для фиксированного элемента $0\neq b\in B$ существует лишь конечное число простых идеалов $P\subset B$, для которых $b\in P$.

Для того, чтобы неравенства вида $\delta_i\neq 1, \delta_i\neq\delta_j^{-1}$ не сохранялись в группе $\widetilde{f}(H_B)\leqslant \mathrm{GL}_r(B/P)$, необходимо, чтобы все элементы матриц $1-\delta_i, \delta_i-\delta_j^{-1}\neq 0$ содержались в идеале P. Так как множество простых идеалов кольца B бесконечно, найдется такой простой идеал P, что для любого i

$$\delta_i\neq 1(\operatorname{mod}P),\quad \delta_i\neq\delta_j^{-1}(\operatorname{mod}P),$$

если $\delta_i\neq 1, \delta_i\neq\delta_j^{-1}$.

Далее,

$$\begin{tikzcd}
H_B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i_1"'] & \mathrm{GL}_r(B/P) \arrow[d, "i_2"'] \\
H \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{GL}_r(A/\mathcal{P})
\end{tikzcd}$$

– коммутативная диаграмма, поскольку $P = \mathcal{P} \cap B$ (здесь вертикальные стрелки i_1, i_2 – это естественные вложения, а горизонтальные ψ, φ – факторизации по модулям $P, \mathcal{P}$). Следовательно, $\widetilde{f}(H_B) = i_2 \circ \psi(H_B) \leqslant \mathrm{GL}_r(A/\mathcal{P}) = \mathrm{GL}_r(\overline{F}_p)$, а значит, образы различных элементов $\delta_i, 1$ и δ_i, δ_j^{-1} при отображении $\widetilde{f}$ остаются различными в $\mathrm{GL}_r(\overline{F}_p)$. Отсюда получаем c., d. $\square$

2.5. Случай: $\mathbf{char\,K = p > 0}$.

В этом случае $G(\overline{F}_p) \leqslant G(K) \leqslant \mathrm{GL}_r(K)$. Мы предполагаем, что G – группа, определенная и расщепимая над F_p. Так же, как и в пункте 1.2, мы можем рассмотреть эпиморфизм $f : A \to \overline{F}_p$ для конечнопорожденной $\overline{F}_p$-алгебры A, для которого получим

$$G_{f,A} = G(\overline{F}_p) \leqslant G.$$

§3. Слова с константами

В данном пункте мы рассматриваем свойства слов с константами для произвольной (абстрактной) группы G. Ниже $Z(G)$ – центр группы G.

3.1. Подстановки.

Пусть $w_\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ – слово с константами от n переменных группы G. Предположим $1 \leqslant k < n$. Тогда

$$\begin{aligned} w_\Sigma(x_1, \dots, x_n) = \nu_1(x_1, \dots, x_k)\omega_1(x_{k+1}, \dots, x_n)\nu_2(x_1, \dots, x_k) \\ \cdots \omega_l(x_{k+1}, \dots x_n)\nu_{l+1}(x_1, \dots, x_k), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\omega_i(x_{k+1}, \dots, x_n)$ – слова от $(n-k)$ переменных $x_{k+1}, \dots, x_n$ (без констант), а $\nu_j(x_1, \dots, x_k)$ – слова с константами от k переменных (возможно, постоянные). Действительно, $\omega_i(x_{k+1}, \dots, x_n)$ – это промежутки в слове $w_\Sigma(x_1, \dots, x_n)$, не содержащие констант и переменных $x_1, \dots, x_k$.

Пусть $g_1, \dots, g_k \in G$. Подставим элементы $g_1, \dots, g_k$ в (3.1) вместо $x_1, \dots, x_k$ соответственно. Получим

$$\begin{aligned} w_\Sigma(g_1, \dots, g_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ = \nu_1(g_1, \dots, g_k)\omega_1(x_{k+1}, \dots, x_n)\nu_2(g_1, \dots, g_k) \\ \cdots \omega_l(x_{k+1}, \dots x_n)\nu_{l+1}(g_1, \dots, g_k). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Если G – группа без центра, то всегда $w_\Sigma(g_1, \dots, g_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = w_\Delta$ – слово с константами, где $\Delta \subset \{\nu_1(g_1, \dots, g_k), \dots, \nu_{l+1}(g_1, \dots, g_k)\} \subset G$.

Заметим, что w_Δ может быть постоянным словом или может стать нетривиальным словом без констант. Кроме того, если центр группы G нетривиален, то в выражении (3.2) могут появиться центральные константы.

Пример 3.1.

1) Пусть $w_\Sigma(x_1, x_2) = \sigma_1 x_2 x_1 \sigma_2 x_2^{-1}$. Тогда $w_\Sigma(\sigma_2^{-1}, x_2) = \sigma_1 x_2 x_2^{-1} = \sigma_1$.

2) Пусть $w_\Sigma(x_1, x_2) = x_2 x_1 \sigma_1 x_2$. Тогда $w_\Sigma(\sigma_1^{-1}, x_2) = x_2^2$.

3) Пусть $w_\Sigma(x_1, x_2) = x_2 x_1 z \sigma_1 x_2$, где $z \in Z(G)$. Тогда

$$w_\Sigma(\sigma_1^{-1}, x_2) = z x_2^2.$$

3.2. Тождества с константами.

Пусть $w_\Sigma = w_\Sigma(x_1, \dots, x_n) \neq g \in G$ – непостоянное слово с константами (напомним, что в слове с константами w_Σ мы предполагаем, что в множестве констант Σ нет элементов из центра). Слово w_Σ называется *тождеством с константами на группе* G, если $\widetilde{w}_\Sigma : G^n \to G$ – единичное отображение (т.е. $\widetilde{w}_\Sigma((g_1, \dots, g_n)) = 1$ для любой последовательности $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$)). Если G – простая алгебраическая группа, то тождество с константами существует тогда и только тогда, когда в соответствующей системе корней R имеются корни разной длины, т.е. для $R = B_l, C_l, F_4, G_2$ (см. [7]). Таким образом, простые алгебраические группы типов A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 не имеют тождеств с константами.

Следующее предложение показывает, что существование постоянных вербальных отображений, соответствующих непостоянным словам (без центральных констант), эквивалентно существованию тождеств с константами.

Предложение 3.2. *Для группы G существует непостоянное слово с константами w_Σ, для которого $\widetilde{w}_\Sigma$ – постоянное отображение, тогда и только тогда, когда существуют тождества с константами на G.*

Доказательство. Пусть

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1}$$

и пусть $\widetilde{w}_\Sigma((g_1,\dots,g_n)) = g \in G$ для любой последовательности $(g_1,\dots,g_n) \in G^n$.

Предположим, что $g \notin Z(G)$. Если $w_1 \neq 1$ или $w_{m+1} \neq 1$, то $g^{-1}\widetilde{w}_\Sigma$ или $w_\Sigma g^{-1}$ – тождество с константами. Если $w_1 = w_{m+1} = 1$, то $m > 1$, $\sigma_1, \sigma_m \notin Z(G)$. Если при этом $g^{-1}\sigma_1 \notin Z(G)$, то $g^{-1}\widetilde{w}_\Sigma$ – тождество с константами. Если, $g^{-1}\sigma_1 = z \in Z(G)$, то

$$\underbrace{w_2}_{\neq 1}\sigma_2 \cdots w_m \underbrace{(z\sigma_m)}_{\notin Z(G)}$$

– тождество с константами.

Предположим, что $g = z \in Z(G)$. Пусть $1 \neq \omega \in F_n$ – такое слово, что $\omega w_1 \neq 1$. Тогда $w'_\Sigma = [\omega, w_\Sigma]$ – тождество с константами. □

3.3. Группа $G * F_n$.

Любому элементу свободного произведения $\upsilon \in G * F_n$ мы также можем сопоставить отображение $\widetilde{\upsilon} : G^n \to G$. В этом пункте мы сравниваем такие отображения для элементов группы $G*F_n$ и $G/Z(G)*F_n$, где $Z(G)$ – центр группы G.

Пусть $\varphi : G \to G/Z(G)$ – естественный гомоморфизм, а

$$\Phi : G * F_n \to G/Z(G) * F_n$$

– гомоморфизм, определенный формулой

$$\Phi(w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1}) = w_1\varphi(\sigma_1)w_2\varphi(\sigma_2)\cdots w_m\varphi(\sigma_m)w_{m+1}.$$

Положим

$$\mathcal{Z}(G, F_n) = \operatorname{Ker}\Phi.$$

Пусть $\upsilon \in G * F_n$. Из определения гомоморфизма Φ следует, что

$$\upsilon = w_\Sigma - \text{слово с константами} \Rightarrow \upsilon \notin \mathcal{Z}(G, F_n).$$

Кроме того, имеет место следующе предложение.

Предложение 3.3. *Образ $\Phi(w_\Sigma)$ непостоянного слова с константами w_Σ является словом C-типа в $G/Z(G)*F_n$ тогда и только тогда, когда*

$$w_\Sigma = w'_\Delta \omega,$$

где w'_Δ – слово C-типа и $\omega \in \mathcal{Z}(G,F)$.

Доказательство. Пусть $\Phi(w_\Sigma)$ – слово C-типа, т.е. $\Phi(w_\Sigma)=w_\Lambda \tau w_\Lambda^{-1}$, где

$$\omega_\Lambda = \omega_1\lambda_1\omega_2\cdots\lambda_m\omega_{m+1}, \;\; 1\neq\lambda_i \in G/Z(G), \;\; 1\neq\tau\in G/Z(G), \;\; \omega_j\in F_n.$$

Кроме того, либо $\omega_1\neq 1$, либо $\omega_2\neq 1$, поскольку w_Σ – непостоянное слово. Зафиксируем некоторую последовательность $\delta'_1,\ldots,\delta'_m\in G\setminus Z(G)$ и элемент $g\in G\setminus Z(G)$ такие, что $f(\delta'_i)=\lambda_i, f(g)=\tau$. Положим

$$w'_\Delta = (\omega_1\delta'_1\omega_2\cdots\delta'_m\omega_{m+1})g(\omega_1\delta'_1\omega_2\cdots\delta'_m\omega_{m+1})^{-1}.$$

Из построения следует, что $w'_\Delta \in G*F_n$ – слово с константами C-типа и $\Phi(w'_\Delta)=\Phi(w_\Sigma)$. Следовательно, $w_\Sigma = w'_\Delta\omega$ для некоторого $\omega\in\mathcal{Z}(G,F)$. □

Пример 3.4. Пусть $\sigma_1,\sigma_2\in G\setminus Z(G)$, $1\neq z\in Z(G)$ и пусть $1\neq w\in F_n$. Далее пусть $\Sigma=\{\sigma_1,\sigma_2,z\sigma_1^{-1}\}$. Тогда слово с константами

$$w_\Sigma = w\sigma_1w^{-1}\sigma_2w(z\sigma_1^{-1})w^{-1}$$

не является словом C-типа, но слово $\Phi(w_\Sigma)$ – это слово C-типа. Здесь

$$w_\Sigma = \underbrace{w\sigma_1w^{-1}\sigma_2w\sigma_1^{-1}w^{-1}}_{:=w'_\Delta}\underbrace{wzw^{-1}}_{:=\omega}.$$

Предложение 3.5. *Пусть G – группа без тождеств с константами и пусть $v\in G*F_n$. Тогда*

$$v\in\mathcal{Z}(G,F)\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,\widetilde{v}=\{z\} \;\; \textit{для некоторого} \;\; z\in Z(G).$$

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ непосредственно вытекает из определения $\mathcal{Z}(G,F_n)$. Пусть $\mathrm{Im}\,\widetilde{v}=z\in Z(G)$. Пусть v' – элемент группы $G*F_n$, полученный переносом всех констант σ_i, которые содержатся в $Z(G)$, в начало слова v, т.е. $v'=z'\omega$, где z' – это произведение элементов множества $Z(G)$, которые содержатся в слове v, а $\omega\in G*F_n$ – слово, полученное из v вычеркиванием всех центральных констант. После сокращений в слове ω стоящих рядом $x_i^{\pm a}x_i^{\mp a}$ могут также появиться константы из центра, которые также можно вынести в начало слова и т.д. Таким образом, мы можем считать, что слово ω не сократимо и не равно $z'' \in Z(G)$, где $z'' \neq 1$. Далее, из построения слова с константами v' следует

$$\widetilde{v}((g_1, \ldots, g_n)) = \widetilde{v}'((g_1, \ldots, g_n)) = z'\widetilde{\omega}((g_1, \ldots, g_n)) = z$$

для любой последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$. При этом либо $\omega = 1$, либо элемент $\omega \in G * F_n$ – нетривиальное слово с константами, которому соответсвует постоянное отображение $\widetilde{\omega} : G^n \to G$, что противоречит Предложению 3.2. Таким образом, $\omega = 1$, а значит, слово $v' = z'$ может быть получено из слова v операциями переноса центральных констант в левую часть и сокращений частей слова вида $x_i^{\pm a} x_i^{\mp a}$. Следовательно, $v \in \operatorname{Ker} \Phi = \mathbb{Z}(G, F_n)$. □

Предложения 3.3, 3.5 показывают, что изучение слов с константами групп $G * F_n$ и $G/Z(G) * F_n$ (если G – группа без тождеств) отличается появлением множителей из группы $\mathcal{Z}(G, F_n)$, которым соответствуют постоянные вербальные отображения со значениями в центре. Поэтому для упрощения терминологии и обозначений далее будем рассматривать только группы без центра.

3.4. Слова с константами в группах без центра.

Далее G – группа без центра. Для такой группы любой элемент свободного произведения $G * F_n$ – это слово с константами.

Условия симметрии для слов C-типа. Слово с константами

$$w_\Sigma = w_1 \sigma_1 w_2 \sigma_2 \cdots w_m \sigma_m w_{m+1} \tag{3.3}$$

является словом C-типа тогда и только тогда, когда $m = 2k - 1$,

$$w_1 = w_{m+1}^{-1}, w_2 = w_m^{-1}, \ldots, w_i = w_{m+2-i}^{-1}, \ldots, w_k = w_{k+1}^{-1} \tag{3.4}$$

и, если $m > 1$, то

$$\sigma_1 = \sigma_m^{-1}, \sigma_2 = \sigma_{m-1}^{-1}, \ldots, \sigma_i = \sigma_{m+1-i}^{-1}, \ldots, \sigma_{k-1} = \sigma_{k+1}^{-1}. \tag{3.5}$$

Действительно, слово с константами является словом C-типа тогда и только тогда, когда последовательным сопряжением в $G * F_n$ элементами групп F_n и G это слово можно привести к некоторому элементу $g \in G$.

Предположим, что слова $w_1, \ldots, w_{m+1}$ в слове с константами (3.3) не удовлетворяют условию (3.4). Тогда для любых констант

$$\Delta = \{\delta_1 \neq 1, \ldots, \delta_m \neq 1\} \subset H \tag{$\circledast$}$$

любой группы H, у которой $Z(H) = 1$, слово с константами

$$w_\Delta = w_1\delta_1 w_2\delta_2 \cdots w_m\delta_m w_{m+1}$$

группы H не является словом C-типа.

Предположим, что слова $w_1, \ldots, w_{m+1}$ в слове с константами (3.3) удовлетворяют условию (3.4), но не удовлетворяют условию (3.5), т.е. $m > 1$ и $\sigma_i \neq \sigma_{m+1-i}$ для некоторого $i \leqslant k-1$. Пусть

$$i_* := \min\left\{l = 1, \ldots, \left[\frac{m-1}{2}\right] \mid \sigma_{i_*} \neq \sigma^{-1}_{m+1-i_*}\right\}. \tag{3.6}$$

Для любой последовательности $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ любой группы H без центра, у которой выполнены условия

$$\delta_{i_*} \neq \delta^{-1}_{m+1-i_*}, \text{ и } \delta_j \neq 1 \text{ для любого } j = 1, \ldots, m, \tag{$\circledast\circledast$}$$

соответствующее слово с константами $w_\Delta = w_1\delta_1 w_2\delta_2 \cdots w_m\delta_m w_{m+1}$ не является словом C-типа для группы H.

Предложение 3.6. *Слово с константами w_Σ не является словом C-типа тогда и только тогда, когда оно сопряжено в $G * F_n$ со словом вида*

$$\sigma_1 w_1(x_1, \ldots, x_n) \cdots \sigma_l w_l(x_1, \ldots, x_n), \tag{3.7}$$

где $l \in \mathbb{N}$ и $\sigma_i \neq 1, 1 \neq w_i \in F_n$.

Доказательство. Сопрягая слово с константами с подходящими элементами групп F_n и G, получим либо $g \in G$, либо слово вида (3.7). $\square$

Слова конечного порядка.

Предложение 3.7. *Пусть G – группа без тождеств с константами. Далее, пусть $w_\Sigma = w_\Sigma(x_1, \ldots, x_n) \in G * F_n$ – слово с константами, для которого существует такое натуральное число k, что*

$$\left(\widetilde{w}_\Sigma((g_1, \ldots, g_k))\right)^k = 1$$

для любой последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$. Тогда w_Σ – слово C-типа.

Доказательство. Элемент $\widetilde{w}^k_\Sigma$ является тождеством на группе G, а следовательно, $(w_\Sigma)^k = 1$. Таким образом, $\langle w_\Sigma \rangle$ – конечная циклическая подгруппа группы $G * F_n$. По теореме Куроша (см. [15], §34)

$$w_\Sigma = vgv^{-1}$$

для некоторого $v \in G * F_n$, $g \in G$. $\square$

§4. Многообразие констант

4.1. Случай $\mathrm{char}\,\mathbf{K} = 0$.

Здесь $G = G(\mathbb{C})$ – простая присоединенная алгебраическая группа.

Пусть $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset G \leqslant \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$,

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} s(j)_{11} & s(j)_{12} & \cdots & s(j)_{1r} \\ s(j)_{21} & s(j)_{22} & \cdots & s(j)_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s(j)_{r1} & s(j)_{r2} & \cdots & s(j)_{rr} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \tag{4.1}$$

и пусть

$$N_j := \bigl\{(p,q) \in [1,r] \times [1,r] \mid s(j)_{pq} - \text{трансцендентное число}\bigr\},$$

$$S_j := \bigl\{s(j)_{pq} \mid (p,q) \in N_j\bigr\}, \quad S_\Sigma = \bigcup_{j=1}^{m} S_j.$$

Таким образом, S_Σ – это множество всех трансцендентных элементов матриц, соответствующих всем константам σ_j. Далее пусть

$$X_j := \bigl\{x(j)_{pq} \mid (p,q) \in N_j - \text{множество независимых переменных}\bigr\},$$

$$X_\Sigma = \bigcup_{j=1}^{m} X_j.$$

Все алгебраические соотношения над полем алгебраических чисел $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ между трансцендентными числами из множества S_Σ (включая соотношения, вытекающие из уравнений замкнутой подгруппы $G \leqslant \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$) описываются многочленами из множества $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[X_\Sigma]$. Таким образом, существует аффинное многообразие $\mathcal{M}_\Sigma$, определеное над полем $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, у которого аффинная алгебра изоморфна алгебре $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma]$. Это многообразие будем называть *многообразием констант.*

Так как $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[\mathcal{M}_\Sigma] \approx \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma] \subset \mathbb{C}$, то многообразие неприводимо и, если $S_\Sigma \neq \varnothing$, то

$$\dim \mathcal{M}_\Sigma > 0.$$

Точку $t \in \mathcal{M}_\Sigma$ будем записывать в координатой форме $t = (t(j)_{pq})$, соответствующей координатам $x(j)_{pq}$.

Спецификацией последовательности Σ*, соответствующей точке* $t = (t(j)_{pq}) \in \mathcal{M}_\Sigma$, будем называть такую последовательность матриц $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ группы $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, что матрица $\delta_j \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ получается из матрицы σ_j (4.1) заменой всех трансцендентных элементов $s(j)_{pq}$ на соответствующие элементы $t(j)_{pq}$.

Пусть $A := \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[\mathcal{M}_\Sigma]$, и пусть

$$A_t = \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}\big(\{t(j)_{pq} \mid \ j = 1, \ldots, m, (p,q) \in N_\Sigma\}\big)$$

– образ алгебры многочленов $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[X_\Sigma]$ при подстановке $x(j)_{pq} := t(j)_{pq}$. Поскольку $t \in \mathcal{M}_\Sigma$, эпиморфизм $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[X_\Sigma] \to A_t$ индуцирует эпиморфизм $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$-алгебр

$$\Upsilon_\Sigma^t : \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[\mathcal{M}_\Sigma] \approx \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma] \to A_t = \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[(\{t(j)_{pq}\}],$$

который продолжается до гомоморфизма групп точек (см. пункт 2.3)

$$\widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t : G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma]) \to G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[(\{t(j)_{pq}\}]). \tag{4.2}$$

Заметим, что все константы σ_j содержатся в подгруппе $G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma])$, поскольку все элементы матриц (4.1) содержатся в алгебре $Q^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma]$. Из построения гомоморфизма (4.2) следует, что образы $\delta_j := \widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t(\sigma_j)$ как раз и образуют спецификацию последовательности Σ, соответствующую точке $t = (t(j)_{pq}) \in \mathcal{M}_\Sigma$.

Далее, если точка t является $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$-точкой, т.е. $t \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$, то получаем эпиморфизм (см. 2.3).

$$\widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t : G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[S_\Sigma]) \to G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}).$$

Лемма 4.1. *Предположим, что $S_\Sigma \neq \varnothing$ и*

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1}$$

не является словом C-типа. Тогда существует такая точка $(t(j)_{pq}) \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$, что для соответствующей спецификации

$$\Delta := \big\{\delta_1 = \widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t(\sigma_1), \delta_2 = \widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t(\sigma_2), \ldots, \delta_m = \widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t(\sigma_m)\big\}$$

слово с константами

$$w_\Delta = w_1\delta_1 w_2\delta_2 \cdots w_m\delta_m w_{m+1}$$

также не является словом C-типа.

Доказательство. Положим

$$\mathcal{M}'_\Sigma := \big\{t \in \mathcal{M}_\Sigma \ \mid \ \widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t(\sigma_j) = 1 \ \text{для некоторого} \ j = 1, \ldots, m\big\},$$

$$\mathcal{M}''_\Sigma := \big\{t \in \mathcal{M}_\Sigma \ \mid \ \widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t(\sigma_{i_*}) = \delta_{i_*} = \delta_{m+1-i_*}^{-1} = \widetilde{\Upsilon}_\Sigma^t(\sigma_{m+1-i_*})\big\},$$

где i_* определяется из условия (3.6). Равенства, определяющие данные множества, приводят к соответствующим алгебраическим уравнениям над $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, и таким образом подмножества $\mathcal{M}'_\Sigma, \mathcal{M}''_\Sigma$ – это замкнутые алгебраические подмножества в многообразии $\mathcal{M}_\Sigma$.

Предположим, что для исходного слова

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1}$$

не выполнены условия (3.4). Тогда достаточным условием для точки $t \in \mathcal{M}_\Sigma$ соответствовать спецификации $\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_1) = \delta_1, \ldots, \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_m) = \delta_m$, для которой слово $w_\Delta = w_1\delta_1 w_2\delta_2 \cdots w_m\delta_m w_{m+1}$ не является словом C-типа, является

$$t \in \mathcal{M}_\Sigma \setminus \mathcal{M}'_\Sigma \tag{4.3}$$

(см. условие ⊛).

Предположим, что для исходного слова

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1}$$

выполнены условия (3.4). Тогда достаточным условием для точки $t \in \mathcal{M}_\Sigma$ соответствовать спецификации $\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_1) = \delta_1, \ldots, \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_m) = \delta_m$, для которой слово $w_\Delta = w_1\delta_1 w_2\delta_2 \cdots w_m\delta_m w_{m+1}$ не является словом C-типа, является

$$t \in \mathcal{M}_\Sigma \setminus (\mathcal{M}'_\Sigma \cup \mathcal{M}''_\Sigma) \tag{4.4}$$

(см. условие ⊛⊛).

Отметим, что множества $\mathcal{M}_\Sigma \setminus \mathcal{M}'_\Sigma$ и $\mathcal{M}_\Sigma \setminus (\mathcal{M}'_\Sigma \cup \mathcal{M}''_\Sigma)$ – открытые и непустые в каждом из двух перечисленных случаев (4.3), (4.4), поскольку существует точка $s = (s(j)_{pq})$, соответствующая исходной последовательности Σ, заведомо удовлетворяющая (4.3) в первом случае и (4.4) во втором. Поскольку многообразие $\mathcal{M}_\Sigma$ определено над $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, множество $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$-точек $\mathcal{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ плотно в $\mathcal{M}_\Sigma$ ([3], A.G. 13.3), а значит, множество $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$-точек плотно в $\mathcal{M}_\Sigma \setminus \mathcal{M}'_\Sigma$ и $\mathcal{M}_\Sigma \setminus (\mathcal{M}'_\Sigma \cup \mathcal{M}''_\Sigma)$ в соответствующих случаях и, следовательно, существует точка $t \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$, для которой выполнено условие (4.3) в первом случае и (4.4) во втором. □

4.2. Случай $\mathbf{char\,K = p > 0}$.

Если $G = G(K)$ – группа над полем K характеристики p, мы можем также построить многообразие $\mathcal{M}_\Sigma$, заменяя $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ на поле $\overline{F}_p$, а трансцендентные числа в элементах матриц в (4.1) на трансцендентные элементы над полем $\overline{F}_p$. Аналогично получим спецификацию

$$\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma : G(\overline{F}_p[\mathcal{M}_\Sigma]) \to G(\overline{F}_p),$$

удовлетворяющую условиям леммы 4.1.

§5. Доказательство теоремы 1

Теперь мы можем доказать теорему 1.

Доказательство. *Случай* $\mathrm{char} K = 0$. Здесь $G = G(\mathbb{C})$.

Пусть $w_\Sigma \in G * F_n$ – слово, не являющееся словом C-типа. Так как G – группа без тождеств с константами, то $\dim \overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma} \geqslant 1$. Предположим, что $\dim \overline{\mathrm{Im}\,\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma} = 0$. Поскольку $\mathrm{Im}\,\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ – это образ связного множества, $\mathrm{Im}\,\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ – это в точности одна точка, а значит,

$$\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma \subset \overline{C}_g,$$

где C_g – класс сопряженных элемента $g \in G$, а g – некоторый регулярный элемент группы G (см. [15], II, §3). Пусть $g = g_s g_u$ – разложение Жордана, где g_s, g_u – полупростая и унипотентная компоненты элемента g. Тогда для любой последовательности $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ имеет место

$$w_\Sigma(g_1, \dots, g_n) = h g_s u h^{-1} \tag{5.1}$$

при некотором $h \in G$ и некотором унипотентном элементе u, коммутирующем с g_s.

Далее, как было показано выше, последовательность Σ содержится в группе $G(A)$ для некоторой конечнопорожденной над $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ алгебры $A \subset \mathbb{C}$, и существует эпимоморфизм

$$\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma : G(A) \to G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}) \tag{5.2}$$

такой, что для последовательности

$$\Delta = \{\delta_1 = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_1), \dots, \delta_m = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(\sigma_m)\}$$

соответствующее слово $w_\Delta = w_1\delta_1 w_2\delta_2 \cdots w_m\delta_m w_{m+1}$ также не является словом C-типа в $G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}) * F_n$ (лемма 4.1). Мы также можем предполагать, что $g_s \in G(A)$ (действительно, можно предполагать, что в алгебре A содержатся также трансцендентные элементы матрицы $g_s \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$). Для любой последовательности $(g_1, \dots, g_n) \in G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})^n$ элемент $w_\Delta(g_1, \dots, g_n) \in G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ – образ $w_\Sigma(g_1, \dots, g_n) \in G(A)$ при гомоморфизме (5.2), который, в свою очередь, индуцирован гомоморфизмом колец $\Upsilon^t_\Sigma : A \to \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$. Из (5.1) следует, что

$$\pi(w_\Sigma(g_1,\dots,g_n)) = \pi(g_s),$$

а значит,

$$\pi(\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(w_\Sigma(g_1,\dots,g_n)) = \pi(\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)).$$

Поэтому элемент

$$\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(w_\Sigma(g_1,\dots,g_n)) = w_\Delta(g_1,\dots,g_n)$$

сопряжен в группе $G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ некоторому элементу, полупростая часть которого равна полупростой части $\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)_s$ элемента $\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)$. Таким образом, имеет место равенство

$$w_\Delta(g_1,\dots,g_n) = h' \underbrace{\widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)_s}_{:=\delta^*} u'h'^{-1} = h'\delta^* u'h'^{-1} \tag{5.3}$$

при некотором $h' \in G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$ и некотором унипотентном элементе $u' \in G(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$, коммутирующем с $\delta^* = \widetilde{\Upsilon}^t_\Sigma(g_s)_s$.

Из леммы 2.1 следует, что существует подгруппа $H \leqslant G(A)$, для которой $\Delta \subset H$, а также, гомоморфизм $\widetilde{f} : G(A) \to \mathrm{GL}_r(\overline{F}_p)$ факторизации, для которого $\widetilde{f}(H) = G_p(\overline{F}_p)$ (напомним, что здесь G_p – редукция простой расщепимой алгебраической группы по модулю p, где $p\mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]} = \mathbb{Z}_{[\frac{1}{d}]} \cap \mathcal{P}$) и последовательность

$$\bar{\Delta} = \{\bar{\delta}_1 = \widetilde{f}(\delta_1),\dots,\bar{\delta}_m = \widetilde{f}(\delta_m)\}$$

удовлетворяет условию ⊛ или (соответственно) условию (⊛⊛). Таким образом,

$$w_{\bar{\Delta}} = w_1\bar{\delta}_1 w_2\bar{\delta}_2\cdots w_m\bar{\delta}_m w_{m+1}$$

не является словом C-типа в $G_p(\overline{F}_p) * F_n$. Далее, из определения вербальных отображений $\widetilde{w}_\Delta, \widetilde{w}_{\bar{\Delta}}$ следует, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^n \arrow[r, "\widetilde{f}^n"] \arrow[d, "\widetilde{w}_\Delta"'] & G_p^n(\overline{F}_p) \arrow[d, "\widetilde{w}_{\bar{\Delta}}"'] \\ H \arrow[r, "\widetilde{f}"] & G_p(\overline{F}_p) \end{tikzcd}$$

коммутативна, а значит, ввиду сюръективности $\widetilde{f}, \widetilde{f}^n$ и (5.3) получаем, что для любой последовательности $(g_1,\dots,g_n) \in G_p(\overline{F}_p)^n$ элемент

$w_{\bar{\Delta}}(g_1, \ldots, g_n)$ сопряжен некоторому элементу, полупростая часть которого совпадает с полупростой частью $(\overline{\delta^*})_s$ элемента $\overline{\delta^*}$. Таким образом,

$$w_{\bar{\Delta}}(g_1, \ldots, g_n) = h''(\overline{\delta^*})_s u'' h''^{-1} \tag{5.4}$$

при некотором $h'' \in G_p(\overline{F}_p)$ и некотором унипотентном элементе $u'' \in G_p(\overline{F}_p)$, коммутирующем с $(\overline{\delta^*})_s$.

Существует натуральное число $q = p^a$ такое, что $u''^q = 1$ для любого унипотентного элемента $u'' \in G_p(\overline{F}_p)$. Далее пусть c – это порядок элемента $(\overline{\delta^*})_s$ в группе $G_p(\overline{F}_p)$. Из (5.4) получаем

$$(w_{\bar{\Delta}}(g_1, \ldots, g_n))^{cq} = h''(\overline{\delta^*})_s^{cq} u''^{cq} h''^{-1} = 1$$

для любой последовательности $(g_1, \ldots, g_n) \in G(\overline{F}_p)$. Следовательно,

$$\widetilde{w}_{\bar{\Delta}}^{cq} \equiv 1$$

– тождество с константами на группе $G(\overline{F}_p)$, а значит, $w_{\bar{\Delta}}^{cq} = 1$ и ввиду предложения 3.7 слово $w_{\bar{\Delta}}$ должно быть словом C-типа. Противоречие. Таким образом,

$$\dim \operatorname{Im} \pi \circ \widetilde{w}_{\Sigma} \geqslant 1.$$

5.1. *Случай* $\mathbf{char\, K = p > 0}$.

Аналогично случаю $\mathrm{char} K = 0$ мы можем редуцировать задачу к случаю слов с константами для группы $G(\overline{F}_p)$, для которой доказательство будет повторять доказательство, проделанное выше для $G_p(\overline{F}_p)$. □

§6. Простые алгебраические группы с нетривиальным центром.

Пусть G – простая алгебраическая группа без тождеств с константами с нетривиальным центром $Z(G)$ и w_{Σ} – слово с константами. Предположим, что $\Phi(w_{\Sigma}) \in G/Z(G) * F_n$ не является словом C-типа. Тогда отображение $\pi \circ \Phi(\widetilde{w}_{\Sigma})$ не являетя постоянным, а значит, и отображение $\pi \circ \widetilde{w}_{\Sigma} : G^n \to T/W$ не постоянно. Ввиду предложения 3.3 получаем следующую вариацию теоремы 1.

Теорема 1$'$. *Пусть G – простая алгебраическая группа типа A_l, D_l, E_6, E_7, E_8. Пусть, далее, w_{Σ} – слово с константами из группы G. Множество* $\operatorname{Im} \pi \circ \widetilde{w}_{\Sigma}$ *состоит из одной точки тогда и только тогда, когда $w_{\Sigma} = w_{\Delta}\omega$, где w_{Δ} – слово C-типа, а $\omega \in \mathcal{Z}(G, F_n)$.*

§7. Редукция к слову от одной переменной.

Предложение 7.1. *Пусть G – простая приведенная алгебраическая группа без тождеств с константами, $\Sigma \subset G$ и $w_\Sigma = w_\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ – слово с константами, не являющееся словом C-типа. Предположим также, что $n > 1$. Тогда существуют элементы $g_1, \dots, g_{n-1}$ такие, что $w_\Sigma(g_1, \dots, g_{n-1}, x_n)$ не является словом с константами C-типа от одной переменной.*

Доказательство.

Лемма 7.2. *Пусть $\nu_1(x), \dots, \nu_l(x)$ – некоторая последовательность неединичных слов с константами группы G от одной переменной x. Тогда существует такой элемент $g \in G$, что $\nu_1(g) \neq 1, \dots, \nu_l(g) \neq 1$.*

Доказательство. Действительно, так как G – группа без тождеств с константами, то $\mathcal{V}_i = \nu_i^{-1}(1)$ – это собственное замкнутое подмножество в G, а значит, $G \setminus (\cup_i \mathcal{V}_i)$ – непустое подмножество в G. □

Заметим, что вместо слова w_Σ можно рассматривать сопряженное к нему слово $w_\Delta := v w_\Sigma v^{-1}$ для некоторого $v \in G * F_n$. Действительно, если $w_\Delta(g_1, \dots, g_{n-1}, x_n)$ не является словом с константами C-типа от одной переменной, то и слово $w_\Sigma(g_1, \dots, g_{n-1}, x_n) =$

$$= v(g_1, \dots, g_{n-1}, x_n)^{-1} w_\Delta(g_1, \dots, g_{n-1}, x_n) v(g_1, \dots, g_{n-1}, x_n)$$

не является словом с константами C-типа от одной переменной. Таким образом, мы можем считать (см. следствие 3.6), что слово w_Σ имеет вид

$$w_\Sigma(x_1, \dots, x_n) = \sigma_1 w_1(x_1, \dots, x_n) \cdots \sigma_m w_m(x_1, \dots, x_n),$$

где $w_i \in F_n$, $w_i \neq 1$. Тогда слово w_Σ можно записать в виде

$$\sigma_1 \mu(x_1) \omega_0(x_2, \dots x_n) \nu_1(x_1) \omega_1(x_2, \dots x_n) \cdots \nu_l(x_1) \omega_l(x_2, \dots x_n) \xi(x_1),$$

где $\omega_i(x_2, \dots, x_n)$ – неединичные слова от переменных $x_2, \dots, x_n$, $\nu_i(x_1)$ – слова с константами от одной переменной (возможно постоянные: $\nu_i(x_1) = \tau_i \in \Sigma$), а сомножители $\mu(x_1), \xi(x_1)$ могут быть или $= 1$, или иметь вид

$$\mu(x_1) = x_1^a \delta \cdots, \;\; \xi(x_n) = \cdots \gamma x_1^b, \;\text{ где }\; \delta, \gamma \in \Sigma, \; a, b \neq 0. \tag{7.1}$$

Положим $\nu_0(x_1) := \sigma_1 \mu(x_1), \nu_{l+1}(x_1) := \xi(x_1) \nu_0(x_1) = \xi(x_1) \sigma_1 \mu_1(x_1)$. Тогда $\nu_0(x_1), \nu_{l+1}(x_1)$ – неединичные слова (см. (7.1)). Следовательно, существует элемент $g \in G$ (лемма 7.2), для которого $\nu_i(g) \neq 1$ для любого $i = 0, \dots, l+1$. При этом,

$\tau := \sigma_1\mu_1(g) \neq 1$, $\tau' = \xi(g) \neq \tau^{-1}$ (поскольку $\nu_{l+1}(g) = \xi(g)\sigma_1\mu(g) \neq 1$).

Следовательно,

$$\begin{aligned} &w_\Sigma(g, x_2, \dots, x_n) \\ &= \tau\omega_1(x_2, \dots x_n)\nu_1(g)\omega_1(x_2, \dots x_n)\cdots\nu_l(g)\omega_l(x_2, \dots x_n)\tau', \end{aligned} \tag{7.2}$$

где $\nu_i(g) \neq 1$ для любого $i = 1, \dots, m$ и $\tau \neq 1, \tau' \neq \tau^{-1}$.

Полученное слово вида (7.2) не является словом C-типа (ввиду условия (⊛⊛) для τ, τ'). Таким образом, подставив подходящий элемент $x_1 := g$ в слово $w_\Sigma(x_1, \dots, x_n)$, мы можем получить слово с константами $w_\Sigma(g, x_2, \dots, x_n)$ от $(n-1)$ переменных, которое не является словом C-типа. Продолжая подстановки подходящих элементов группы G вместо констант, получим слово $w_\Sigma(g_1, \dots, g_{n-1}, x_n)$, которое не является словом с константами C-типа от одной переменной. $\square$

§8. Доказательство теоремы 2.

Доказательство. Пусть w_Σ не является словом C-типа. Ввиду предложения 7.1 и следствия 3.6 можно считать, что $w_\Sigma = w_\Sigma(x)$ – слово от одной переменной вида:

$$w_\Sigma(x) = \sigma_1 x^{a_1}\sigma_2 x^{a_2}\dots\sigma_m x^{a_m},$$

где $a_i \in \mathbb{Z}, a_i \neq 0$ (заметим, что отображения $\pi \circ w_\Sigma$ и $\pi \circ v w_\Sigma v^{-1}$ совпадают). Пусть

$$\Sigma' = \{\sigma'_1, \dots, \sigma'_m\} \subset \mathrm{SL}_2(K)$$

– такая последовательность, что $\varphi(\sigma'_i) = \sigma_i$ для любого $i = 1, \dots, m$ (напомним, что $\varphi : \mathrm{SL}_2(K) \to \mathrm{PSL}_2(K)$ – естественный гомоморфизм). Тогда

$$w_{\Sigma'}(x) = \sigma'_1 x^{a_1}\sigma'_2 x^{a_2}\dots\sigma'_m x^{a_m}$$

– слово с константами группы $\mathrm{SL}_2(K)$. Положим

$$\varsigma = \sigma'_1\sigma'_2\cdots\sigma'_m.$$

Тогда

$$\mathrm{tr}(\widetilde{w}_\Sigma(1)) = \mathrm{tr}\,\varsigma. \tag{8.1}$$

Ввиду теоремы $1'$ существует такой элемент $g \in \mathrm{SL}_2(K),\ g \neq -1$, для которого

$$\mathrm{tr}\,\widetilde{w}_\Sigma(g)) \neq \mathrm{tr}\,\varsigma \tag{8.2}$$

(здесь $\operatorname{tr} x$ – след матрицы x)). Далее, существует такой элемент $h \in G$, что

$$g = h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h^{-1} \tag{8.3}$$

для некоторых $\alpha, \beta \in K$ (любой нецентральный элемент группы $\mathrm{SL}_2(K)$ сопряжен элементу вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; см. [6]). Рассмотрим подмножество

$$\mathcal{V}_{h,\,y,z} = \{h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h^{-1} \quad | \quad y, z \in K\} \subset \mathrm{SL}_2(K).$$

При $y = z = 0$ получаем $1 \in \mathcal{V}_{h,y,z}$, а при $y = \alpha, z = \beta$ получаем $g \in \mathcal{V}_{h,\,y,z}$ (см. (8.3)). Таким образом, ограничение отображения $\operatorname{tr} \circ \widetilde{w}_{\Sigma'}$ на подмножество $\mathcal{V}_{h,\,y,z}$ не является постоянной функцией (см. (8.1), (8.2)). С другой стороны, это ограничение является многочленом от двух переменных $f(y,z)$. Следовательно, $f(y,z)$ – непостоянный многочлен, который принимает любые значения. Таким образом,

$$\operatorname{tr} \circ \widetilde{w}_{\Sigma}(\mathrm{SL}_2(K)) = K.$$

Следовательно, любой полупростой класс сопряженных элементов группы $\mathrm{SL}_2(K)$, кроме (возможно) ± 1, пересекается с $\operatorname{Im} \widetilde{w}_{\Sigma'}$. Таким образом, любой полупростой класс сопряженных элементов группы $\mathrm{PSL}_2(K)$, кроме (возможно) 1, пересекается с $\operatorname{Im} \widetilde{w}_{\Sigma}$. □

Список литературы

1. T. Bandman, Yu. G. Zarhin, *Surjectivity of certain word maps on $PSL(2,\mathbb{C})$ and $SL(2,\mathbb{C})$*. — Eur. J. Math. **2** (2016), 614–643.
2. A. Borel, *On free subgroups of semisimple groups.* — Enseign. Math. **29** (1983), 151–164.
3. A. Borel, *Linear Algebraic groups.* 2nd enl.ed., Graduate texts in mathematics **126**. Springer-Verlag, New York Inc. (1991).
4. N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique.* Groupes et Algèbres de Lie, Chap. IV, V, VI, 2ème édition. Masson, Paris (1981).
5. R. W. Carter, *Simple groups of Lie type.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 28. John Wiley & Sons, London–New York–Sydney (1972).
6. V. Chernousov, E. W. Ellers, N. Gordeev, *Gauss decomposition with prescribed semisimple part: short proof.* — J. Algebra 229 (2000), No. 1, 314–332.
7. N. L. Gordeev, *Freedom in conjugacy classes of simple algebraic groups and identities with constants.* — Алгебра и Анализ, **9**, No. 4 (1997), 63–78.
8. Н. Л. Гордеев, Б. Э. Кунявский, Е. Б. Плоткин, *Вербальные отображения и вербальные отображения с константами простых алгебраических групп.* — Докл. Акад. Наук, **471**, No. 2 (2016), 136–138.

9. N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, *Word maps, word maps with constants and representation varieties of one-relator groups.* — J. Algebra **500** (2018), 390–424.
10. N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, *Word maps on perfect algebraic groups.* — Intern. J. Algebra Comput. **28**, No. 8 (2018), 1487–1515.
11. Н. Л. Гордеев, Б. Э. Кунявский, Е. Б. Плоткин, *Геометрия вербальных отображений в простых алгебраических группах над специальными полями.* — Успехи мат. наук **73** (2018), No. 5(443), 3–52.
12. A.A. Klyacko, M.A. Ryabtseva, *The dimension of solution sets to systems of equations in algebraic groups*, `arXiv:1903.05236v1 [math.GR]` (2019).
13. В. В. Нестеров, А. В. Степанов, *Тождества с константами групп в группе Шевалле типа F_4.* — Алгебра и Анализ, **21**, No. 5 (2009), 196–202.
14. А. Г. Курош, *Теория групп*, Издание третье, дополненное, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1967.
15. T. A. Springer, R. Steinberg, *Conjugacy classes.* — In: “Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups”, Lecture Notes Math., vol. **131**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970, pp. 167–266.
16. R. Steinberg, *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М. (1975).

Gnutov F. A., Gordeev N. L. On the image of a word map with constants of a simple algebraic group.

In this paper we consider some properties of a word map with constants $\widetilde{w} : G^n \to G$ of a simple algebraic groups G and some properties of maps $\pi \circ \widetilde{w}$, where $\pi : G \to T/W$ is the factor morphism for a fixed maximal torus T of the group G and the Weil group W of G. In particular, we prove here that for an adjoint group G of the types A_r, D_r, E_r the map $\pi \circ \widetilde{w}$ is a constant map only for words of the type vgv^{-1} where $g \in G$ and v is a word with constants. The corollary of this result is the following generalization of the result of T. Bandman and Yu. G. Zarhin (Eur. J. Math. **2** (2016), 614–643): the image of a word map with constant $\widetilde{w} : \mathrm{PGL}_2^n \to \mathrm{PGL}_2$ contains a representation of every semisimple conjugacy class $\neq 1$ or $w = vgv^{-1}$ for some g, v.

Российский Государственный
Педагогический университет им. А. И. Герцена
Мойка 48, 191186, Ст.Петербург, Россия
E-mail: `fedor_gnutov@mail.ru`
E-mail: `nickgordeev@mail.ru`

Поступило 7 мая 2019 г.