Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 478, 2019 г.

А. И. Генералов, Д. А. Никулин

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА, IX. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

§1. Введение

Работа посвящена исследованию когомологий Хохшильда некоторого семейства локальных алгебр полудиэдрального типа. В [1, 2] была вычислена алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для другого семейства локальных алгебр полудиэдрального типа, содержащего, в частности, групповые алгебры полудиэдральных групп над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. Кроме того, когомологии Хохшильда исследовались для некоторых других семейств алгебр полудиэдрального типа, имеющих 2 или 3 простых модуля (см. [3–9]). Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления (см. [10]).

В настоящей работе мы вычисляем группы когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^n(R)$ для семейства локальных алгебр полудиэдрального типа из классификации [10], возникающего только в характеристике 2 (потому мы их назвали “исключительными”).

Для вычисления групп $\mathrm{HH}^n(R)$ мы сначала строим минимальную проективную (= свободную) резольвенту алгебры R, рассматриваемой как модуль над своей обёртывающей алгеброй. Используя эту бимодульную резольвенту, мы затем вычисляем группы $\mathrm{HH}^n(R)$.

§2. Формулировка основного результата

Пусть K – алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики $p := \operatorname{char} K$, R – конечномерная K-алгебра, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – её обёртывающая алгебра, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ – n-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R (с коэффициентами в R-бимодуле R).

Ключевые слова: локальные алгебры полудиэдрального типа, когомологии Хохшильда.

Первый из авторов благодарит грант РФФИ 17-01-00258 за поддержку.

Для $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $c, d \in K$ определим K-алгебру $R_{k,c,d} = K\langle X, Y\rangle / I$, где I – идеал свободной алгебры $K\langle X, Y\rangle$, порождённый элементами

$$X^2 - Y(XY)^{k-1} - c(XY)^k,\ Y^2 - d(XY)^k,\ (XY)^k - (YX)^k,\ X(YX)^k.$$

Образы элементов X, Y относительно канонического гомоморфизма из $K\langle X, Y\rangle$ в $R_{k,c,d}$ обозначаем через x и y соответственно. Алгебра $R_{k,c,d}$ – симметрическая локальная алгебра, имеющая ручной тип представления [10, III.1.2]; кроме того, в терминах [10, Ch.VIII] алгебра $R_{k,c,d}$ – это алгебра полудиэдрального типа.

Для нулевых значений параметров c и d алгебры $S_k := R_{k,0,0}$ составляют одну из серий локальных алгебр, входящую в классификацию из [10]. В случае, когда $p \neq 2$, этим исчерпываются все локальные алгебры полудиэдрального типа. Когомологии Хохшильда алгебр S_k (для любой характеристики p) были исследованы в работах [1, 2]. Отметим, что если G – полудиэдральная группа порядка 2^m, $m \geqslant 4$, а $p = 2$, то групповая алгебра KG изоморфна алгебре S_k для $k = 2^{m-2}$.

Но при $(c, d) \neq (0, 0)$ и $p = 2$ алгебры $R_{k,c,d}$ доставляют ещё одну серию локальных алгебр из классификации К. Эрдман [10]. Заметим, что если $c \neq 0$, то можно считать, что $c = 1$ (см. [11, стр. 131]).

Далее мы всюду предполагаем, что основное поле K имеет характеристику два.

Основной результат работы – это следующее описание групп когомологий Хохшильда для рассматриваемой серии алгебр.

Теорема 2.1. *Пусть $R = R_{k,c,d}$, где $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, c, d \in K$, $(c, d) \neq (0, 0)$ и $c \in \{0, 1\}$. Тогда размерности групп $\mathrm{HH}^n(R)$ описываются следующим образом.*

(I) $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + 3$.

(II) *Пусть $d \neq 0$. Тогда:*

(IIa) $\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+5, & \text{\textit{если k чётно},} \\ k+4, & \text{\textit{если k нечётно};} \end{cases}$

(IIb) $\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = k + 4$;

(IIc) *для $n \geqslant 4$*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = 2.$$

(III) *Пусть* $d = 0$. *Тогда*:

(IIIa) $$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+6, & \text{\textit{если} } k \text{ \textit{чётно}}, \\ k+5, & \text{\textit{если} } k \text{ \textit{нечётно}}; \end{cases}$$

(IIIb) $$\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+7, & \text{\textit{если} } k \text{ \textit{чётно}}, \\ k+6, & \text{\textit{если} } k \text{ \textit{нечётно}}; \end{cases}$$

(IIIc) $\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = k+8$;

(IIId) *для* $n \geqslant 4$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = 8.$$

§3. Резольвента

Пусть $R = R_{k,c,d}$ – K-алгебра, определенная в разделе 2, где K – алгебраически замкнутое поле характеристики 2. Алгебра R допускает в качестве K-базиса множество

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_R = &\{(xy)^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{(yx)^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\} \\ &\cup \{x(yx)^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\} \cup \{y(xy)^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

состоящее из всех ненулевых путей колчана алгебры R (он состоит из одной вершины и двух петель x и y). Назовём $\mathcal{B}_R$ *стандартным* базисом алгебры R. В свою очередь обёртывающая алгебра Λ алгебры R допускает K-базис, состоящий из элементов вида

$$u \otimes v, \text{ где } u, v \in \mathcal{B}_R.$$

Умножение справа на элемент $\lambda \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм λ^* левого Λ-модуля Λ; ради простоты мы будем часто этот эндоморфизм обозначать также через λ.

Рассмотрим следующие элементы алгебры $\Lambda = R^{\mathrm{e}}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= x \otimes 1 + 1 \otimes x, \\ \mathrm{Y} &= y \otimes 1 + 1 \otimes y, \\ \widetilde{\mathrm{Y}} &= (y + dx(yx)^{k-1}) \otimes 1 + 1 \otimes y, \\ \rho &= x(yx)^{k-1} \otimes 1 + 1 \otimes x(yx)^{k-1}. \end{aligned}$$

В категории (левых) Λ-модулей мы сейчас построим последовательность, которая окажется Λ-проективной (= свободной) резольвентой алгебры R.

Положим $Q_0 = \Lambda$, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = \Lambda^2$, и далее по индукции для $n \geqslant 4$:

$$Q_n = \Lambda^2 \oplus Q_{n-4}. \tag{3.2}$$

Для описания дифференциалов в резольвенте, которую мы строим, введем следующие вспомогательные матрицы:

$$D_1 = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathrm{Y}} & \rho + c^3 x(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k \\ d \otimes y & \mathrm{Y} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{Y} & \rho + c^3 x(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k \\ d \otimes y & \widetilde{\mathrm{Y}} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

Теперь опишем дифференциалы с помощью следующих матриц, соответствующих описанным выше разложениям модулей Q_n:

$$d_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{Y}, & \mathrm{X} \end{pmatrix};$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Y} + d \sum\limits_{i=0}^{k-1} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} & * \\ d \sum\limits_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i} & * \end{pmatrix},$$

где

$$(d_1)_{12} = \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + c \sum_{i=0}^{k-1} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i},$$

$$(d_1)_{22} = \mathrm{X} + \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i} + c \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i};$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{Y} & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
(d_2)_{12} &= \rho + c^2(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k + c^3 x(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k,\\
(d_2)_{21} &= d(1 \otimes xy + x \otimes y) + cd(x \otimes xy + y(xy)^{k-1} \otimes y)\\
&\quad + c^2 dy(xy)^{k-1} \otimes xy,\\
(d_2)_{22} &= \mathrm{Y} \cdot \mathrm{X} + c(x^2 \otimes y + x \otimes xy + yx \otimes x)\\
&\quad + d(x \otimes x(yx)^{k-1} + y(xy)^{k-1} \otimes (yx)^{k-1}\\
&\quad + (xy)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-1}) + cdy(xy)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1};
\end{aligned}$$

$$d_3 = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathrm{Y}} & \rho + c^3 x(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k & 0 \\ d \otimes y + d^2 \sum\limits_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} & * & * \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
(d_3)_{22} &= \mathrm{Y} + d\sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i}\\
&\quad + d\sum_{i=1}^{k-1} (yx)^i \otimes x(yx)^{k-1-i} + cd(yx)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-1},\\
(d_3)_{23} &= \mathrm{X} \cdot \sum_{0=1}^{k-1} (yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + c(yx)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-1};
\end{aligned}$$

$$d_4 = \begin{pmatrix} \mathrm{Y} & \rho + c^3 x(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k & 0 & 0 \\ d \otimes y & \widetilde{\mathrm{Y}} & \rho & * \\ 0 & 0 & \mathrm{Y} & \mathrm{X} \end{pmatrix},$$

где

$$(d_4)_{24} = (yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1} + cx(yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1}.$$

Наконец, для $n \geqslant 5$ определим дифференциалы рекурсивно с помощью следующих формул:

для нечётного n

$$d_n = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & \mathrm{P} \\ \hline \mathrm{O} & d_{n-4} \end{array}\right); \tag{3.5}$$

для чётного n

$$d_n = \left(\begin{array}{c|c} D_2 & \mathrm{P} \\ \hline \mathrm{O} & d_{n-4} \end{array}\right). \tag{3.6}$$

Здесь в (3.5) и в (3.6) P обозначает матрицу подходящего размера с единственным ненулевым элементом с позиции $(2,1)$, равным ρ. Непосредственно проверяется, что мы действительно построили комплекс $Q_\bullet = \Big(Q_n,\ d_n\Big)_{n\geqslant 0}$.

Рассмотрим также пополняющее отображение $\mu\colon Q_0 = \Lambda \to R$, индуцированное умножением в R: $\mu(r\otimes s) = rs$.

Теорема 3.1. *Комплекс $Q_\bullet = (Q_n, d_n)_{n\geqslant 0}$ вместе с пополняющим отображением $\mu\colon Q_0 \to R$ является минимальной Λ-проективной резольвентой алгебры R.*

Доказательство. Для доказательства ацикличности построенного комплекса мы используем теорему 1 из [12]. Поскольку $d_{n+1}d_n = 0$ для всех $n \geqslant 0$ и $\mu d_0 = 0$, то нам достаточно доказать, что после тензорного умножения комплекса $\mu\colon Q_\bullet \to R$ на простой R-модуль S мы получаем минимальную проективную резольвенту модуля S; такая резольвента модуля S описана в [11]. Соответствующие проверки мы оставляем читателю. □

Рассмотрим подкомплекс $X_\bullet$ комплекса $Q_\bullet$, такой, что при $n \geqslant 4$ $X_n = \Lambda^2$ – это первые два прямых слагаемых в разложении Q_n из (3.2), а для $0 \leqslant n \leqslant 3$ $X_n = Q_n$.

Предложение 3.2. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0, \tag{3.7}$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из строения комплекса $Q_\bullet$. □

§4. Группы когомологий

Пусть по-прежнему $R = R_{k,c,d}$ – K-алгебра, определённая в §2. Для вычисления групп когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ алгебры R мы используем комплекс

$$\Big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R),\ \ \delta^n = \mathrm{Hom}_\Lambda(d_n, R)\Big)_{n\geqslant 0},$$

который получается применением функтора $\mathrm{Hom}_\Lambda(\,-\,,R)$ к бимодульной резольвенте $Q_\bullet \to R$ алгебры R, построенной в §3.

Поскольку все Q_n – свободные Λ-модули, то любой $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$ отождествляется с набором значений f на базисных элементах модуля Q_n. В дальнейшем, когда в таком наборе значений f встречается подпоследовательность, состоящая из нулей, скажем, из r штук, то мы такую подпоследовательность обозначаем через O_r. Аналогично нулевую $r \times s$-матрицу обозначаем через $\mathrm{O}_{r,s}$; при этом мы опускаем указание на размеры такой матрицы, если они ясны из контекста.

Отметим также, что если $f = w^*\colon \Lambda \to \Lambda$ – гомоморфизм умножения справа на $w \in \Lambda$, то в соответствии с указанным выше отождествлением индуцированный гомоморфизм абелевых групп

$$\widetilde{w}\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(f,R)\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,R) \simeq R \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,R) \simeq R$$

действует следующим образом: $r \in R$ отображается в $w * r$ (где $*$ соответствует Λ-модульной структуре на R).

После описанных выше отождествлений дифференциал $\delta^0\colon R \to R^2$ описывается так: для $r \in R$

$$\delta^0(r) = \Big((y\otimes 1 + 1\otimes y) * r, (x\otimes 1 + 1\otimes x) * r\Big) = (yr + ry, xr + rx). \quad (4.1)$$

Предложение 4.1. $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k+3$, $\dim \mathrm{Im}\,\delta^0 = 3(k-1)$.

Доказательство. Ввиду [10, III.14] центр $Z(R)$ алгебры R допускает в качестве базиса следующее множество

$$\{1, xy+yx, (xy)^2+(yx)^2, \ldots, (xy)^{k-1}+(yx)^{k-1},\\ x(yx)^{k-1}, y(xy)^{k-1}, (xy)^k\}.$$

Таким образом, $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k+3$ и

$$\dim \mathrm{Im}\,\delta^0 = \dim_K R - \dim_K \mathrm{Ker}\,\delta^0 = 3(k-1). \qquad \square$$

Замечание 4.2. Если в (4.1) элемент r пробегает все элементы стандартного базиса алгебры R, то непосредственно получаем, что $\mathrm{Im}\,\delta^0$ имеет в качестве базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$((xy)^i + (yx)^i, 0),\ (0, (yx)^i + (xy)^i),\ (y(xy)^i, x(yx)^i),\ \text{где } 1 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Дифференциал

$$\delta^1\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1,R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_2,R)$$

описывается следующим образом: для $r_1, r_2 \in R$ имеем

$$\delta^1(r_1, r_2) = (t_1, t_2),$$

где

$$\begin{aligned} t_1 = yr_1 + r_1y + d\sum_{i=0}^{k-1} x(yx)^i \cdot r_1 \cdot (xy)^{k-1-i} \\ + d\sum_{i=0}^{k-1}(xy)^i \cdot r_2 \cdot y(xy)^{k-1-i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2 = \sum_{i=0}^{k-1}(yx)^i \cdot r_1 \cdot (xy)^{k-1-i} + c\sum_{i=0}^{k-1} x(yx)^i \cdot r_1 \cdot (xy)^{k-1-i} \\ + xr_2 + r_2x + \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \cdot r_2 \cdot y(xy)^{k-2-i} \\ + c\sum_{i=0}^{k-1}(xy)^i \cdot r_2 \cdot y(xy)^{k-1-i}. \end{aligned}$$

Предложение 4.3. (1) *Предположим, что k нечётно.*

(1a) *Если, кроме того, $d \neq 0$, то пространство $\operatorname{Im}\delta^1$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big((xy)^i + (yx)^i, 0\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.2}$$

$$\Big(y(xy)^i, 0\Big) \ \text{для}\ 2 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.3}$$

$$\Big(0, (xy)^i + (yx)^i\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.4}$$

$$\Big(0, x(yx)^i\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.5}$$

$$\Big(0, y(xy)^{k-1}\Big),\ \Big(d(xy)^k, c(xy)^k\Big), \tag{4.6}$$

$$\Big(yxy, (xy)^k\Big),\ \Big(x(yx)^{k-1}, 0\Big). \tag{4.7}$$

(1б) *Если же $d = 0$, то для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^1$ надо в множестве, указанном в части* (1a), *опустить элемент $\Big(x(yx)^{k-1}, 0\Big)$ из* (4.7), *а также заменить элемент $\Big(yxy, (xy)^k\Big)$ на элемент $\Big(yxy, 0\Big)$.*

(2) *Предположим, что* k *чётно.*

(2а) *Если, кроме того,* $d \neq 0$*, то для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо в множестве, указанном в части* (1а)*, опустить элемент* $\Big(d(xy)^k, c(xy)^k\Big)$ *из* (4.6).

(2б) *Если же* $d = 0$*, то для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо в множестве, указанном в части* (2а)*, опустить элемент* $\Big(x(yx)^{k-1}, 0\Big)$ *из* (4.7).

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно рассмотреть значения δ^1 на наборах вида (r_1, r_2), где ровно один из r_i ненулевой и пробегает стандартный базис алгебры R (см. (3.1)), а затем с помощью полученного множества значений выделить для каждого из рассматриваемых случаев базис пространства $\operatorname{Im}\delta^1$. $\square$

Следствие 4.4. (1) *Если* $d \neq 0$*, то*

$$(1\text{а})\qquad \dim\operatorname{Im}\delta^1 = \begin{cases} 4k-1, & \text{если } k \text{ нечётно},\\ 4k-2, & \text{если } k \text{ чётно}; \end{cases}$$

$$(1\text{б})\qquad \dim\operatorname{Ker}\delta^1 = \begin{cases} 4k+1, & \text{если } k \text{ нечётно},\\ 4k+2, & \text{если } k \text{ чётно}. \end{cases}$$

(2) *Если* $d = 0$*, то*

$$(2\text{а})\qquad \dim\operatorname{Im}\delta^1 = \begin{cases} 4k-2, & \text{если } k \text{ нечётно},\\ 4k-3, & \text{если } k \text{ чётно}; \end{cases}$$

$$(2\text{б})\qquad \dim\operatorname{Ker}\delta^1 = \begin{cases} 4k+2, & \text{если } k \text{ нечётно},\\ 4k+3, & \text{если } k \text{ чётно}. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждения о размерности пространства $\operatorname{Im}\delta^1$ следуют непосредственно из предложения 4.3. Утверждения о размерности $\operatorname{Ker}\delta^1$ следуют из соотношения

$$\dim\operatorname{Ker}\delta^1 = \dim\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) - \dim\operatorname{Im}\delta^1 = 8k - \dim\operatorname{Im}\delta^1. \qquad \square$$

Предложение 4.5. (а) *Если* $d \neq 0$, *то пространство* $\operatorname{Im}\delta^2$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big((xy)^i + (yx)^i, 0\Big) \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.8}$$

$$\Big(y(xy)^i, 0\Big) \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.9}$$

$$\Big(d(xy)^i, (xy)^i + (yx)^i\Big) \ \ \textit{для} \ \ 2 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.10}$$

$$\Big((xy)^k, 0\Big). \tag{4.11}$$

(б) *Если* $d = 0$, *то для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^2$ *надо в множестве, указанном в части* (а), *опустить элемент из* (4.11).

Доказательство аналогично доказательству предложения 4.3. □

Следствие 4.6. (1) *Если* $d \neq 0$, *то*

$$\dim \operatorname{Im}\delta^2 = 3k-3, \qquad \dim \operatorname{Ker}\delta^2 = 5k+3.$$

(2) *Если* $d = 0$, *то*

$$\dim \operatorname{Im}\delta^2 = 3k-4, \qquad \dim \operatorname{Ker}\delta^2 = 5k+4.$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 4.4. □

Предложение 4.7. (а) *Если* $d \neq 0$, *то пространство* $\operatorname{Im}\delta^3$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big((xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_2\Big) \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.12}$$

$$\Big(y(xy)^i, \mathrm{O}_2\Big) \ \ \textit{для} \ \ 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.13}$$

$$\Big(0, y(xy)^i, 0\Big) \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.14}$$

$$\Big(d(xy)^i, (xy)^i + (yx)^i, 0\Big) \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.15}$$

$$\Big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\Big), \ \Big((xy)^k, \mathrm{O}_2\Big). \tag{4.16}$$

(б) *Если* $d = 0$, *то для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо из множества, указанного в части* (а), *удалить элемент* $\Big(y, \mathrm{O}_2\Big)$ *из* (4.13), *а также оба элемента из* (4.16).

Доказательство аналогично доказательству предложения 4.3. □

Следствие 4.8. (1) *Если* $d \neq 0$, *то*

$$\dim \operatorname{Im} \delta^3 = 4k - 1, \qquad \dim \operatorname{Ker} \delta^3 = 4k + 1.$$

(2) *Если* $d = 0$, *то*

$$\dim \operatorname{Im} \delta^3 = 4k - 4, \qquad \dim \operatorname{Ker} \delta^3 = 4k + 4.$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 4.4. □

Предложение 4.9. (1) *Предположим, что* $d \neq 0$. *Тогда*:

(1а) $$\dim \mathrm{HH}^1(R) = \dim \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+4, & \text{если } k \text{ нечётно}, \\ k+5, & \text{если } k \text{ чётно}; \end{cases}$$

(1б) $\dim \mathrm{HH}^3(R) = k + 4$ *для любого* k.

(2) *Предположим, что* $d = 0$. *Тогда*:

(2а) $$\dim \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+5, & \text{если } k \text{ нечётно}, \\ k+6, & \text{если } k \text{ чётно}; \end{cases}$$

(2б) $$\dim \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+6, & \text{если } k \text{ нечётно}, \\ k+7, & \text{если } k \text{ чётно}; \end{cases}$$

(2в) $\dim \mathrm{HH}^3(R) = k + 8$ *для любого* k.

Доказательство. С учётом предложения 4.1 все утверждения о размерностях групп $\mathrm{HH}^i(R)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, вытекают из следствий 4.4, 4.6, 4.8. □

Предложение 4.10. *Для* $n \geqslant 4$ *имеем:*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 2, & \text{если } d \neq 0, \\ 8, & \text{если } d = 0. \end{cases} \tag{4.17}$$

Доказательство. Из предложения 3.2 следует, что имеется следующая точная последовательность комплексов

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-4], R) \xrightarrow{\pi^*} \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) \xrightarrow{i^*} \mathcal{X}^\bullet \to 0,$$

где $\mathcal{X}^\bullet = \operatorname{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$. Эта последовательность, в свою очередь, приводит к длинной точной когомологической последовательности

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{HH}^{n-3}(R) \xrightarrow{\pi^*} \cdots . \tag{4.18}$$

Сейчас мы вычислим когомологии вспомогательного комплекса $\mathcal{X}^\bullet$.

Лемма 4.11. (1) *Пусть* $d \neq 0$.

(1а) *Если* n *чётно и* $n \geqslant 4$, *то пространство* $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов*

$$\Big(1, 0\Big),\ \Big(0, (xy)^k\Big);$$

(1б) *Для нечётного* $n \geqslant 5$ $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов*

$$\Big(dy, y\Big),\ \Big(x(yx)^{k-1}, 0\Big).$$

В частности, для $n \geqslant 4$ *имеем* $\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = 2$.

(2) *Если* $d = 0$, *то для любого* $n \geqslant 4$ *пространство* $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов*

$$\Big(1, 0\Big),\ \Big(y, 0\Big),\ \Big(x(yx)^{k-1}, 0\Big),\ \Big((xy)^k, 0\Big),$$
$$\Big(0, 1\Big),\ \Big(0, y\Big),\ \Big(0, x(yx)^{k-1}\Big),\ \Big(0, (xy)^k\Big).$$

В частности, для $n \geqslant 4$ *имеем* $\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = 8$.

Доказательство. (1) Пусть $d \neq 0$. Используя вид матрицы D_2 (см. (3.4)), получаем, что при $n \geqslant 2$

$$\delta^{2n}_{\mathcal{X}^\bullet}(r_1, r_2) = (yr_1 + r_1 y + dr_2 y, yr_2 + r_2 y);$$

(здесь мы учли, что действие элемента $\rho + c^3 x(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k$, стоящего на позиции $(1, 2)$ в матрице D_2, нулевое). Если $(r_1, r_2) \in \operatorname{Ker} \delta^{2n}_{\mathcal{X}^\bullet}$, то получаем соотношения:

$$\begin{cases} yr_1 + r_1 y + dr_2 y = 0, \\ yr_2 + r_2 y = 0. \end{cases}$$

Теперь используя разложения элементов r_1, r_2 по стандартному базису алгебры R, легко получаем, что элементы из следующего списка

$$\Big((xy)^i + (yx)^i, 0\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{4.19}$$

$$\Big(y(xy)^i, 0\Big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{4.20}$$

$$\Big(d(xy)^i, (xy)^i + (yx)^i\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{4.21}$$

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{4.22}$$

$$\Big(x(yx)^{k-1}, 0\Big),\ \Big((xy)^k, 0\Big), \tag{4.23}$$

$$\Big(1, 0\Big),\ \Big(0, (xy)^k\Big) \tag{4.24}$$

образуют K-базис пространства $\operatorname{Ker} \delta^{2n}_{\mathcal{X}^\bullet}$ $(n \geqslant 2)$.

Кроме того, аналогично доказательству предложения 4.3 получаем, что следующие элементы образуют базис $\operatorname{Im} \delta^{2n}_{\mathcal{X}^\bullet}$:

$$\Big((xy)^i + (yx)^i, 0\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{4.25}$$

$$\Big(y(xy)^i, 0\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{4.26}$$

$$\Big(d(xy)^i, (xy)^i + (yx)^i\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{4.27}$$

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{4.28}$$

$$\Big(y, x(yx)^{k-1}\Big),\ \Big((xy)^k, 0\Big),\ \Big(0, (xy)^k\Big). \tag{4.29}$$

Аналогичные рассуждения показывают, что множество, состоящее из элементов, указанных в (4.19)–(4.23), является базисом $\operatorname{Im} \delta^{2n+1}_{\mathcal{X}^\bullet}$, а для получения базиса $\operatorname{Ker} \delta^{2n+1}_{\mathcal{X}^\bullet}$ надо к множеству элементов, указанных в (4.25)–(4.29), надо добавить элементы

$$\Big(dy, y\Big),\ \Big(x(yx)^{k-1}, 0\Big).$$

Отсюда непосредственно вытекают утверждения пункта (1б), а также пункта (1а) для $n \geqslant 5$. Наконец, утверждение о группе $\mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet)$ следует из того, что базисные элементы для $\operatorname{Im} \delta^3_{\mathcal{X}^\bullet}$ также имеют вид, указанный в (4.19)–(4.23) (как легко видеть, этот базис можно получить, отбрасывая последнюю (нулевую) компоненту в элементах из (4.12)–(4.16)).

(2) Пусть теперь $d=0$. В этом случае из доказательства [1, лемма 3.17] следует, что при $n \geqslant 4$ в качестве базиса для $\operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$ можно взять множество следующих элементов

$$\Big((xy)^i + (yx)^i, 0\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{4.30}$$

$$\Big(y(xy)^i, 0\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{4.31}$$

$$\Big(0, (xy)^i + (yx)^i\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{4.32}$$

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{4.33}$$

$$\Big(1, 0\Big),\ \Big(y, 0\Big),\ \Big(x(yx)^{k-1}, 0\Big),\ \Big((xy)^k, 0\Big), \tag{4.34}$$

$$\Big(0, 1\Big),\ \Big(0, y\Big),\ \Big(0, x(yx)^{k-1}\Big),\ \Big(0, (xy)^k\Big), \tag{4.35}$$

а для получения базиса $\operatorname{Im} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$ надо взять множество элементов, указанных в (4.30)–(4.33); при этом, как и в первой части доказательства, надо отдельно заметить, что это описание базиса годится и для $\operatorname{Im} \delta^3_{\mathcal{X}^\bullet}$. Отсюда непосредственно вытекает утверждение пункта (2). □

Теперь аналогично рассуждениям из [2, стр. 163] (ср. также [1, предложение 3.16]) доказывается, что в последовательности (4.18) связывающие гомоморфизмы Δ^n равны нулю при $n \geqslant 4$. Таким образом, $\mathrm{HH}^n(R) \simeq \mathrm{HH}^{n-4} \oplus \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$, и утверждение теоремы 2.1 вытекает из предложений 4.10, 4.9 и 4.1.

□

Список литературы

1. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ **21**, No. 2 (2009), 1–51.
2. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 144–202.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* III. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_2$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **400** (2012), 133–157.
4. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* IV. *Алгебра когомологий для серии* $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$ *при* $c=0$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **413** (2013), 45–92.

5. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* V. *Серия* $SD(3\mathcal{K})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **435** (2015), 5–32.
6. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VI. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_2$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **443** (2016), 61–77.
7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VII. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **452** (2016), 52–69.
8. А. И. Генералов, А. А. Зайковский, *О производной эквивалентности алгебр полудиэдрального типа с двумя простыми модулями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **452** (2016), 70–85.
9. А. И. Генералов, А. А. Зайковский, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VIII. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_1$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **460** (2017), 35–52.
10. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Math., v. 1428, Berlin, Heidelberg, 1990.
11. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа,* VII. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 130–142.
12. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 61–70.

Generalov A. I., Nikulin D. A. Hochschild cohomology of algebras of semidihedral type, IX: exceptional local algebras.

Hochschild cohomology groups are calculated for a family of local algebras of semidihedral type. This family appears in the famous K. Erdmann's classification only in the case where the characteristic of the base field is equal to 2.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com

Поступило 20 мая 2019 г.

Samsung AI Center Moscow
Лесная ул., 5 строение С
Москва, 125047, Россия
E-mail: pastafariant@gmail.com