Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 477, 2018 г.

А. И. Назаров, Н. С. Устинов

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ

§1. Введение

В задачах классического вариационного исчисления одним из базовых условий для существования локального минимума функционала является *усиленное условие Лежандра*: вторая производная функционала по переменной, соответствующей производной функции, должна быть отделена от нуля. Случай *слабого условия Лежандра*, при котором неотрицательная вторая производная может принимать нулевые значения, менее изучен. Простейшей моделью одноточечного вырождения является функционал следующего вида:

$$\mathcal{J}[u] := \int\limits_0^\infty \left[t^2\langle \dot{u}, \dot{u}\rangle - 2bt\langle Pu, \dot{u}\rangle + \langle Du, u\rangle\right] dt, \tag{1}$$

где $\dot{u}(t) := \frac{du(t)}{dt}$, $u \in C_0^\infty([0,\infty) \to \mathbb{R}^n)$; P и D – соответственно кососимметричная и симметричная $(n \times n)$ вещественные матрицы; $b \in \mathbb{R}$ – некоторый параметр.

Вопрос: *каковы необходимые и достаточные условия на неотрицательность функционала $\mathcal{J}[u]$ в терминах b, P и D?*

Для начала выведем простое необходимое условие. Обозначим $Q := D + \frac{1}{4}I$.

Лемма 1. *Если $\mathcal{J}[u] \geqslant 0$ при всех $u \in C_0^\infty([0,\infty) \to \mathbb{R}^n)$, то $Q \geqslant 0$. Если же $Q \geqslant 0$, то $\mathcal{J}[u] \geqslant 0$ при $b = 0$ на классе функций $u \in C_0^\infty([0,\infty) \to \mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть для вектора w выполнено неравенство $\langle Qw, w\rangle < 0$. Построим семейство вектор-функций $v_\theta(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$,

---

Ключевые слова: неравенство Харди, вектор-функции.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 17-01-00678А.

$\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$:

$$v_\theta(t) := w \cdot \begin{cases} \theta^{-\frac{3}{2}} t, & t \in [0, \theta]\,; \\ t^{-\frac{1}{2}}, & t \in \left[\theta, \frac{1}{2}\right]; \\ 2^{\frac{3}{2}}(1-t), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Прямой подсчет показывает, что

$$\mathcal{J}[v_\theta] = \langle Qw, w\rangle \cdot \int\limits_{\theta}^{\frac{1}{2}} t^{-1} dt + O_\theta(1),$$

что меньше нуля при достаточно малом θ. Аппроксимируя v_θ, получим вектор-функцию $u(t) \in C_0^\infty\left([0,\infty) \to \mathbb{R}^n\right)$ с $\mathcal{J}[u] < 0$.

Второе утверждение леммы немедленно следует из неравенства Харди

$$\int\limits_0^\infty \left[t^2\langle \dot u, \dot u\rangle - \tfrac{1}{4}\langle u, u\rangle\right] dt \geqslant 0. \qquad \square$$

Таким образом, кроме приложений в теории управления (см. [3]), ответ на вопрос выше можно рассматривать как обобщение неравенства Харди. В [3] необходимые и достаточные условия были выписаны в явном виде в случае $n = 2$. В настоящей работе эти условия получены при произвольном n для функционала $\mathcal{J}[u]$, а также для его многомерного аналога

$$\mathcal{I}[u] := \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[|x|^2|\nabla u|^2 - 2b\langle Pu, \nabla u \cdot x\rangle + \langle Du, u\rangle\right] |x|^{2\gamma} dx. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть P – кососимметричная, а D – симметричная $(n \times n)$ вещественные матрицы, $\gamma > -\frac{m}{2}$. Тогда необходимым и достаточным условием неотрицательности функционала $\mathcal{I}[u]$ на классе $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n)$ является выполнение двух неравенств:*

$$D + \tfrac{(m+2\gamma)^2}{4} I \geqslant 0; \quad |b| \leqslant b_0 := \min_{y \in \mathbb{C}^n:\, \langle Py, y\rangle \neq 0} \frac{\sqrt{\langle \left(D + \frac{(m+2\gamma)^2}{4} I\right) y, y\rangle \langle y, y\rangle}}{|\langle Py, y\rangle|}.$$

Отметим еще работы [1] и [4], в которых были получены точные константы в классическом неравенстве Харди на важных подклассах финитных вектор-функций.

§2. Доказательство Теоремы 1 при $m = 1$ и $\gamma = 0$

В одномерном случае дело сводится к неотрицательности функционала (1). Определим функцию $U(\omega) := \mathcal{M}[t^{\frac{1}{2}}u](i\omega)$ при $\omega \in \mathbb{R}$, где

$$\mathcal{M}[f](s) := \int\limits_0^\infty f(t) \cdot t^{s-1} dt,$$

– преобразование Меллина, см. [5].

Пользуясь стандартными формулами для преобразования Меллина (см. напр. [2, (10.8)] и [5, Теорема 71]), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[u] &= \int\limits_{\mathbb{R}} \langle \left(Q + 2bi\omega P + \omega^2 I\right) U(\omega), U(\omega) \rangle \, d\omega \\ &=: \int\limits_{\mathbb{R}} \langle A(b,\omega) U(\omega), U(\omega) \rangle \, d\omega. \end{aligned} \tag{3}$$

В силу леммы 1 достаточно рассмотреть случай $Q \geqslant 0$. Более того, можно считать, что $Q > 0$ (в противном случае докажем теорему 1 для $Q + \varepsilon I$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$). Далее, не умаляя общности, $b > 0$ (иначе сделаем замену переменной $\omega \to -\omega$).

Матрица $A(b,\omega)$ при вещественных ω эрмитова. Более того, она положительно определена при $b = 0$, а потому и при достаточно малых b.

Лемма 2. *Минимальное $b > 0$, при котором уравнение*

$$\det\left(A(b,\omega)\right) = 0 \tag{4}$$

имеет вещественный корень, задается формулой

$$b_0 := \min_{y \in \mathbb{C}^n :\, \langle Py,y \rangle \neq 0} \frac{\sqrt{\langle Qy,y \rangle \langle y,y \rangle}}{|\langle Py,y \rangle|}.$$

Доказательство. Для фиксированного $\omega \neq 0$ исследуем, начиная с какого b число ω является корнем. Поскольку матрица $Q + \omega^2 I$ положительно определена, достаточно искать корень ω у уравнения

$$\det\left(\tfrac{1}{b} I + B(\omega)\right) := \det\left(\tfrac{1}{b} I + (Q + \omega^2 I)^{-\frac{1}{2}} 2i\omega P (Q + \omega^2 I)^{-\frac{1}{2}}\right) = 0.$$

Матрица $B(\omega)$ самосопряженная, все ее собственные числа вещественны, а след нулевой. Следовательно, у $B(\omega)$ существует собственное число $\xi < 0$, и при $b = -\frac{1}{\xi}$ уравнение (4) имеет корень ω.

Для получения минимального b требуется максимизировать по ω наибольший из модулей собственных чисел матрицы $B(\omega)$ (собственные числа у $B(\omega)$ и $B(-\omega)$ отличаются знаком). В силу вариационного принципа имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_0} &= \max_{\omega}\max_{|z|=1}|\langle B(\omega)z,z\rangle| = \max_{\omega}\max_{z\neq 0}\frac{|\langle B(\omega)z,z\rangle|}{\langle z,z\rangle}\\ &= \max_{y\neq 0}\max_{\omega}\frac{|\langle 2i\omega Py,y\rangle|}{\langle (Q+\omega^2 I)^{\frac{1}{2}}\,y,(Q+\omega^2 I)^{\frac{1}{2}}\,y\rangle}\\ &= \max_{y\neq 0}\max_{\omega}\frac{|\langle 2i\omega Py,y\rangle|}{\langle (Q+\omega^2 I)\,y,y\rangle} \overset{*}{=} \max_{y\in\mathbb{C}^n:\,\langle Py,y\rangle\neq 0}\frac{|\langle Py,y\rangle|}{\sqrt{\langle Qy,y\rangle\langle y,y\rangle}},\end{aligned}$$

равенство $(*)$ следует из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Максимум берется по множеству $\langle Py,y\rangle\neq 0$, поскольку в ином случае предпоследнее выражение равно нулю и не может быть максимумом. Лемма доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 1. Если $0<b<b_0$, то матрица $A(b,\omega)$ положительно определена при всех $\omega\in\mathbb{R}$, что ввиду (3) влечет $\mathcal{J}[u]\geqslant 0$. Предельным переходом получим $\mathcal{J}[u]\geqslant 0$ при $b=b_0$.

Далее, пусть $\omega_0>0$ – собственное число пучка $A(b_0,\omega)$, а W – соответствующий собственный вектор. Очевидно,

$$\frac{d}{db}\langle A(b,\omega_0)W,W\rangle = \langle 2i\omega_0 PW,W\rangle = -\frac{1}{b_0}\langle (Q+\omega_0^2 I)W,W\rangle < 0,$$

поэтому $\langle A(b,\omega_0)W,W\rangle<0$ при всех $b>b_0$. Следовательно, при любом $b>b_0$ найдется функция $\varphi(\omega)$ с носителем в малой окрестности ω_0, такая что

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\langle A(b,\omega)W\varphi(\omega),W\varphi(\omega)\rangle\,d\omega<0.$$

Определим функцию $U(\omega):=W\varphi(\omega)+\overline{W}\varphi(-\omega)$. Для нее выполнено неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\langle A(b,\omega)U(\omega),U(\omega)\rangle\,d\omega<0.$$

В силу (3) это дает (вещественную) вектор-функцию u с $\mathcal{J}[u]<0$. Аппроксимация ее гладкими финитными заканчивает доказательство. $\square$

Пример. Пусть $n = 2$. Тогда, не умаляя общности, можно считать, что

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Из очевидного (точного) неравенства

$$(q_1|y_1|^2 + q_2|y_2|^2)(|y_1|^2 + |y_2|^2) \geqslant (q_1 + q_2 + 2\sqrt{q_1 q_2})|y_1|^2|y_2|^2$$

следует

$$\min_{y\neq 0} \frac{\sqrt{(q_1|y_1|^2 + q_2|y_2|^2)(|y_1|^2 + |y_2|^2)}}{|y_1\overline{y}_2 - \overline{y}_1 y_2|} = \frac{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}{2}.$$

Таким образом, в силу теоремы 1 неравенство

$$|b| \leqslant \frac{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}{2}$$

равносильно неотрицательности функционала (1) на функциях $u \in C_0^\infty([0,\infty) \to \mathbb{R}^n)$.

Это утверждение было доказано в [3, теорема 1].

§3. Доказательство теоремы 1 в общем случае

Введем сферические координаты (r, Θ), где Θ – точка на единичной сфере $\mathcal{S}^{m-1}$. Тогда

$$\mathcal{I}[u] = \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathcal{S}^{m-1}} \left[r^2\langle u_r, u_r\rangle - 2b\langle Pu, ru_r\rangle + \langle Du, u\rangle + |\nabla' u|^2\right] r^{m+2\gamma-1} d\mathcal{S}(\Theta) dr,$$

где ∇' – касательный градиент на $\mathcal{S}^{m-1}$.

Определим функцию

$$v(r,\Theta) := u(r,\Theta) r^{\frac{m+2\gamma-1}{2}}.$$

Подставляя в интеграл и интегрируя по частям, получим

$$\mathcal{I}[u] = \int\limits_{\mathcal{S}^{m-1}} \widetilde{\mathcal{J}}[v(\cdot,\Theta)]\, d\mathcal{S}(\Theta) + \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathcal{S}^{m-1}} |\nabla' u|^2 r^{m+2\gamma-1} d\mathcal{S}(\Theta) dr, \tag{5}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{J}}[v] = \int\limits_0^\infty \left[r^2\langle v_r, v_r\rangle - 2br\langle Pv, v_r\rangle + \langle \widetilde{D}v, v\rangle\right] dr,$$

а $\widetilde{D} := D + \frac{(m+2\gamma)^2 - 1}{4} I$.

Пусть $|b| \leqslant b_0$. Применяя результат из §2, видим, что $\widetilde{\mathcal{J}}[v(\,\cdot\,,\Theta)] \geq 0$ при всех Θ, откуда следует $\mathcal{I}[u] \geq 0$.

Если же $b > b_0$, то найдется функция $v \in C_0^\infty([0,\infty) \to \mathbb{R}^n)$, такая, что $\widetilde{\mathcal{J}}[v] < 0$. Определим $u(r,\Theta) \equiv v(r)r^{\frac{1-2\gamma-m}{2}}$. Тогда второе слагаемое в (5) обнуляется, и получаем $\mathcal{I}[u] < 0$. Правда, u может иметь особенность в нуле, но аппроксимируя ее гладкими финитными, мы заканчиваем доказательство теоремы 1. $\square$

Пример. Пусть $D = aI$. Тогда

$$b_0 = \sqrt{a + \tfrac{(m+2\gamma)^2}{4}} \cdot \min_{y\neq 0} \frac{\langle y, y\rangle}{|\langle Py, y\rangle|} \overset{*}{=} \frac{\sqrt{a + \frac{(m+2\gamma)^2}{4}}}{\Lambda(iP)},$$

где $\Lambda(iP)$ – максимальное собственное число матрицы iP. Равенство $(*)$ следует из того, что собственные числа матрицы iP вещественны и расположены симметрично относительно нуля.

Таким образом, в этом случае критерием неотрицательности функционала (2) на классе функций $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n)$ является неравенство

$$|b| \leqslant \frac{\sqrt{a + \frac{(m+2\gamma)^2}{4}}}{\Lambda(iP)}.$$

Список литературы

1. O. Costin and V. Maz'ya, *Sharp Hardy–Leray inequality for axisymmetric divergence-free fields.* — Calc. Var. and PDEs, **32**, No. 4 (2008), 523–532.
2. В. А. Диткин, А. П. Прудников, *Интегральные преобразования и операционное исчисление*, Физматгиз, М. 1961.
3. А. В. Дмитрук, *Критерий неотрицательности вырожденной квадратичной формы с двумерным управлением.* — Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **110** (2006), 49–75.
4. N. Hamamoto and F. Takahashi, *Sharp Hardy–Leray and Rellich–Leray inequalities for curl-free vector fields*, `arXiv:1808.09614` (2018).
5. Э. Ч. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье*, ОГИЗ–ГИТТЛ, М. 1948.

Nazarov A. I., Ustinov N. S. A generalization of the Hardy inequality.

A generalization of the Hardy inequality for vector functions is obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург;
С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: al.il.nazarov@gmail.com

С.-Петербургский государственный университет,
Университетский пр. 28,
198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: ustinns@yandex.ru

Поступило 23 октября 2018 г.