Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 477, 2018 г.

В. Г. Звягин, А. В. Звягин, М. В. Турбин

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ МОДЕЛИ БИНГАМА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

§1. Введение

В работе рассматривается математическая модель Бингама с постоянной плотностью, описывающая движение несжимаемых вязкопластичных сред, например, различных гелей, суспензий, красок и др. (см. [1–4] и приведённую там библиографию):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\ \sigma + \mathrm{grad}\ p = f, \tag{1.1}$$

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^* \dfrac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|} & \text{для } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \\ |\sigma| \leqslant \tau^* & \text{для } |\mathcal{E}(v)| = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $v(x,t), p(x,t), f(x,t)$ соответственно вектор скорости частицы жидкости, давление в жидкости и плотность внешних сил в точке x в момент времени t; $\sigma = (\sigma_{ij})$ – девиатор тензора напряжения; $\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2}\Big(\nabla v + (\nabla v)^T\Big)$ – тензор скоростей деформации; μ, τ^* — некоторые положительные константы.

Исследованию задач управления посвящено большое количество работ. Однако, в то время как управление для линейных систем более или менее изучено, управление для нелинейных систем остается серьезной задачей (даже для конечномерных или локальных областей).

Ключевые слова: модель Бингама, задача оптимального управления с обратной связью, аппроксимационно-топологический подход, теорема существования, степень многозначных векторных полей.

Работа первого и третьего авторов выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-2213.2018.1).

Теорию управления для нелинейных систем гидродинамики исследовали J. Lions [5]; R. Temam и F. Abergel [6]; M. Gunzburger, L. Hou и T. Svobodny [7]; А. В. Фурсиков [8] и др. (подробный обзор результатов, связанных с задачами управления для систем гидродинамики, приведен в [9]). В силу сложности нелинейных систем, описывающих движение жидкости, на сегодняшний день практически не изучено управление для систем, описывающих движение “сложных” жидкостей (полимеров, суспензий, растворов и т.д.).

На практике часто возникает задача управления (оптимального управления) движением жидкости при помощи внешних сил. Обычно при решении таких задач управление выбирается из некоторого заданного (конечного) множества управлений. В данной работе рассматривается управление внешними силами, которые зависят от скорости движения жидкости. Такие задачи называются задачами с обратной связью (см., например, [10–15] и приведённую там библиографию). Эта позволяет более точно выбирать управление, поскольку в данном случае управление выбирается не из конечного набора имеющихся управлений, а принадлежит образу некоторого многозначного отображения (естественно, что на это отображение накладываются условия), что может позволить более точно выбрать управление. Решением поставленной задачи управления движением жидкости обычно является пара (v, f), где v – скорость движения жидкости, а f – управление (плотность внешних сил). При этом f принадлежит образу некоторого многозначного отображения, зависящему от скорости движения жидкости v. В связи с тем, что таких пар может быть много, естественным образом возникает понятие оптимального решения – решения, дающего минимум заданному функционалу качества.

В данной работе мы рассматриваем задачу управления с обратной связью для математической модели Бингама движения жидкости (1.1)–(1.3) с периодическими условиями по пространственным переменным.

§2. Постановка задачи и основной результат

Введем необходимые обозначения. Пусть $\Omega = \prod_{i=1}^{n}(0, l_i) \subset \mathbb{R}^n$. Через $(C^\infty_{per})^n$ обозначим пространство периодических вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ и с периодами $i = 1, \ldots, n$. Введем множество

$$\Phi = \left\{ \phi \in (C^\infty_{per})^n : \int\limits_\Omega \phi \, dx = 0, \, \operatorname{div} \phi = 0 \right\}.$$

Через V^1 обозначим замыкание Φ по норме $(W^1_2(\Omega))^n$, V^2 – замыкание Φ по норме $W^2_2(\Omega)^n$. Через V^0 обозначим замыкание Φ по норме $(L_2(\Omega))^n$. Через V^{-1} обозначим сопряженное к V^1 пространство. Обозначим через $D(A) = V^2$ и рассмотрим на $D(A)$ оператор A: $Au = -\pi\Delta u$, где π – проектор Лере, $\pi : L_2(\Omega) \to V^0$, $u \in D(A)$. A — монотонный линейный самосопряженный оператор, и для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ можно определить A^α, с областью определения $D(A^\alpha) \subset V^0$ (см. [16]). Обозначим $V^\alpha = D(A^{\alpha/2})$. Можно показать, что оператор A является изоморфизмом из $V^{\alpha+2}$ в V^α. Подробное определение пространств, а так же их свойства можно найти в [17].

Для двух матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ обозначим $A : B = \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$.

Для удобства через C мы будем обозначать константы, конкретное значение которых для нас не важно. Если важен точный вид константы, то она будет выписываться в явном виде.

Введём также в рассмотрение следующее функциональное пространство:
в двумерном случае

$$W = \big\{ u : u \in L_2(0, T; V^1), u' \in L_2(0, T; V^{-1}) \big\}$$

с нормой

$$\|u\|_W = \|u\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|u'\|_{L_2(0,T;V^{-1})},$$

в трехмерном случае

$$W = \big\{ u : u \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), u' \in L_2(0, T; V^{-2}) \big\}$$

с нормой

$$\|u\|_W = \|u\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|u\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|u'\|_{L_2(0,T;V^{-2})}.$$

Рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W \multimap L_2(0, T; V^0)$ в качестве функции управления. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) Отображение Ψ определено на W и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;

($\Psi 2$) Отображение Ψ полунепрерывно сверху (то есть, для каждого $v \in W$ и открытого множества $V \subset L_2(0,T;V^0)$ такого, что $\Psi(v) \subset V$ существует окрестность точки $v \in U(v) \subset W$ такая, что $\Psi(U(v)) \subset V$) и компактно (то есть, образ ограниченного множества при отображении Ψ относительно компактен в $L_2(0,T;V^0)$);

($\Psi 3$) Отображение Ψ глобально ограничено, то есть существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0,T;V^0)} := \sup\left\{\|u\|_{L_2(0,T;V^0)} : u \in \Psi(v)\right\} \leq M \text{ для всех } v \in W;$$

($\Psi 4$) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле:

$$\text{если} \quad \{v_l\}_{l=1}^{\infty} \subset W, v_l \rightharpoonup v_0\,, u_l \in \Psi\,(v_l)$$

$$\text{и} \quad u_l \to u_0 \quad \text{в} \quad L_2(0,T;V^0) \quad \text{тогда} \quad u_0 \in \Psi\,(v_0)\,.$$

Приведем естественный пример мультиотображения, удовлетворяющего всем условиям: Пусть непрерывные отображения $f_i : W \to L_2(0,T;V^0)$, $\quad i = 1, 2, \ldots m$ удовлетворяют следующим условиям

($\Psi 1$) отображения f_i ограничены и компактны;

($\Psi 2$) отображения f_i слабо замкнуты, то есть из того, что $\{v_l\}_{l=1}^{\infty} \subset W, v_l \rightharpoonup v_0$, $f_i(v_l) \to u_0$ следует, что $u_0 = f_i(v_0)$.

Определим мультиотображение $U : W \to L_2(0,T;V^0)$ следующим образом

$$U(v) = \left\{ u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(v) \,:\, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Тогда отображение U удовлетворяет всем перечисленным условиям на мультиотображение Ψ.

Нас будет интересовать вопрос о существовании оптимального решения задачи управления с обратной связью для модели Бингама (1.1)–(1.3). А именно, будем предполагать, что внешние силы (управление) принадлежит образу некоторого мультиотображения, которое зависит от скорости жидкости:

$$f \in \Psi(v). \tag{2.4}$$

В работе рассматривается задача (1.1)–(1.3), (2.4) с периодическим условием по пространственной переменной, которую в дальнейшем будем называть периодической (по пространственной переменной) задачей управления с обратной связью для модели Бингама, и с начальным условием

$$v(0) = a. \tag{2.5}$$

Пусть $a \in V^1$. Дадим определение слабого решения рассматриваемой задачи:

Определение 2.1. *Слабым решением периодической задачи управления с обратной связью для модели Бингама* (1.1)–(1.3), (2.4), (2.5) *назовем тройку функций* (v, σ, f),

$$v \in W, \quad \sigma \in (L_2(Q_T))^{n^2}, \quad f \in L_2(0,T;V^0),$$

которая для всех $\varphi \in V^1$ *и для почти всех* $t \in (0,T)$ *удовлетворяет тождеству*

$$\langle v', \varphi \rangle - \sum_{ij=1}^{n} \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\, dx + \int_\Omega \sigma : \mathcal{E}(\varphi) dx = \int_\Omega f\varphi dx, \tag{2.6}$$

реологическому соотношению (1.2), *условию обратной связи* (2.4) *и начальному условию* (2.5).

Ниже будет доказана следующая теорема о существовании слабого решения рассматриваемой задачи:

Теорема 2.1. *Пусть* $a \in V^1$, *тогда периодическая задача управления с обратной связью для модели Бингама* (1.1)–(1.3), (2.4), (2.5) *имеет хотя бы одно слабое решение* (v, σ, f).

Обозначим через $\Sigma \subset W \times (L_2(Q_T))^{n^2} \times L_2(0,T;V^0)$ множество всех слабых решений периодической задачи управления с обратной связью для модели Бингама (1.1)–(1.3), (2.4), (2.5). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Ф1) Существует число γ такое, что $\Phi(v, \sigma, f) \geqslant \gamma$ для всех $(v, \sigma, f) \in \Sigma$.

(Ф2) Если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W, $\sigma_m \rightharpoonup \sigma_*$ в $(L_2(Q_T))^{n^2}$ и $f_m \to f_*$ в $L_2(0,T;V^0)$, то $\Phi(v_*, \sigma_*, f_*) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \Phi(v_m, \sigma_m, f_m)$.

Приведем примеры функионалов качества, которые удовлетворяют перечисленным условиям

$$\Phi_1(v,\sigma,f)=\int\limits_0^T\Big(\|v(t,\cdot)\|^2_{V^1}+\|\sigma(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}}+\|f(t,\cdot)\|^2_{V^0}\Big)\,dt;$$

$$\Phi_2(v,\sigma,f)=\int\limits_0^T\Big(\|v(t,\cdot)-U(t,\cdot)\|^2_{V^1}+\|\sigma(t,\cdot)-S(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)^{n^2}}$$
$$+\|f(t,\cdot)-F(t,\cdot)\|^2_{V^0}\Big)dt.$$

Здесь U, S и F — некоторые заданные скорость, девиатор тензора напряжений и внешняя сила (управление) соответственно.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* (Ψ1)–(Ψ4), *а функционал* Φ *удовлетворяет условиям* (Φ1), (Φ2), *тогда периодическая задача оптимального управления с обратной связью для модели Бингама* (1.1)–(1.3), (2.4), (2.5) *имеет хотя бы одно слабое решение* (v_*,σ_*,f_*) *такое, что*

$$\Phi(v_*,\sigma_*,f_*)=\inf_{(v,\sigma,f)\in\Sigma}\Phi(v,\sigma,f). \tag{2.7}$$

В доказательстве результатов работы (теорем 2.1 и 2.2) мы сконцентрируемся на трехмерном случая в связи с тем, что он более сложный. Отметим, что проделанные выкладки можно повторить и в двумерном случае со значительными упрощениями.

§3. Аппроксимационная задача

Для доказательства разрешимости рассматриваемого управления (1.1)–(1.3), (2.4), (2.5) будем использовать аппроксимационно-топологический метод исследования задач гидродинамики (см. [18], [19]). Для этого реологическое соотношение модели Бингама (1.2) мы “приблизим” следующим неньютоновским соотношением:

$$\sigma=2\mu\mathcal{E}(v)+\tau^*\frac{\mathcal{E}(v)}{\max\{\delta,|\mathcal{E}(v)|\}},\quad \delta>0.$$

При такой аппроксимации реологического соотношения (1.2) мы можем исключить в постановке задачи неизвестную σ и рассматривать задачу только о нахождении скорости v и управления f. При этом также аппроксимируем и интегральное равенство (2.6), добавив в него слагаемое $\delta \int\limits_\Omega A^2 v A\varphi \, dx$.

Таким образом, для доказательства разрешимости исходной задачи управления исследуется следующая аппроксимационная задача (для фиксированного $\delta > 0$):

Определение 3.1. *Найти пару функций (v, f) такую, что*

$$v \in W_1 = \left\{v : v \in L_2(0,T;V^4), v' \in L_2(0,T;V^{-2})\right\}, \ f \in L_2(0,T;V^0)$$

удовлетворяющую для любого $\varphi \in V^2$ при почти всех $t \in (0,T)$ соотношению

$$\langle v', \varphi\rangle + \mu \int\limits_\Omega \nabla(v) : \nabla(\varphi)\, dx - \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx +$$
$$+ \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)\mathcal{E}_{ij}(\varphi)}{\max\{\delta, |\,\mathcal{E}(v)|\}}\, dx + \delta \int\limits_\Omega A^2 v A\varphi\, dx = \int\limits_\Omega f\varphi dx, \quad (3.8)$$

условию обратной связи $f \in \Psi(v)$ и начальному условию

$$v(0) = a. \quad (3.9)$$

Запишем аппроксимационную задачу в операторном виде, для чего введем в рассмотрение необходимые операторы с помощью следующих формул (везде в формулах предполагается, что пробная функция $\varphi \in V^2$):

$$\langle Av(t), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \nabla v(t) : \nabla\varphi\, dx, \quad A : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-2});$$

$$\langle K(v)(t), \varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i(t) v_j(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx, \quad K : L_4(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-2});$$

$$\langle A^3 v(t), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega A^2 v A\varphi dx, \quad A^3 : L_2(0,T;V^4) \to L_2(0,T;V^{-2});$$

$$\langle B_\delta(v)(t), \varphi\rangle = \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)(t)|)}\, \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx,$$
$$B_\delta : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-2}).$$

Корректность данных определений будет установлена в следующем пункте при исследовании свойств операторов. Заметим теперь, что аппроксимационную задачу можно записать в виде следующего операторного включения:

$$v' + \mu Av + B_\delta(v) - K(v) + \delta A^3 v = f \in \Psi(v), \tag{3.10}$$

решение которого должно удовлетворять начальному условию (3.9).

§4. Свойства операторов

В этом пункте исследуются свойства операторов из включения (3.10). Отметим, что для исследуемых операторов можно доказать и более сильные результаты, чем приведённые ниже, но мы приводим только те, которые будут в дальнейшем использоваться.

Лемма 4.1. *Для оператора A имеют место следующие свойства:*

1. *Для любой функции $u \in L_2(0,T;V^1)$ функция $Au \in L_2(0,T;V^{-1})$, оператор $A : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывен и имеет место оценка*

$$\|Au\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|u\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{4.11}$$

2. *Для любой функции $u \in W_1$ функция $Au \in L_2(0,T;V^{-1})$, оператор $A : W_1 \to L_2(0,T;V^{-2})$ вполне непрерывный.*

Доказателсьтво данной леммы см. [19].

Лемма 4.2. *Для оператора K имеют место следующие свойства:*

1) *Отображение $K : L_4(\Omega)^n \to V^{-1}$ – непрерывно и имеет место оценка:*

$$\|K(v)\|_{V^{-1}} \leqslant C\|u\|^2_{L_4(\Omega)^n}. \tag{4.12}$$

2) *Отображение $K : L_4(0,T;L_4(\Omega)^n) \to L_2(0,T;V^{-1})$ – непрерывно.*

3) *Отображение $K : W_1 \to L_2(0,T;V^{-2})$ компактно, и имеет место оценка:*

$$\|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant C\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}\|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)}. \tag{4.13}$$

Доказательство. 1) Для любых $v \in L_4(\Omega)^n, \varphi \in V^1$ имеем

$$
\begin{aligned}
|\langle K(u), \varphi\rangle| &= \left|\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \left|\int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx\right| \\
&\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} |u_i||u_j| \left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right| dx \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \|u_i\|_{L_4(\Omega)} \|u_j\|_{L_4(\Omega)} \left\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \|u\|_{L_4(\Omega)^n} \|u\|_{L_4(\Omega)^n} \|\varphi\|_{V^1} \leqslant C\|u\|^2_{L_4(\Omega)^n} \|\varphi\|_{V^1},
\end{aligned}
$$

откуда и следует, что

$$
\|K(u)\|_{V^{-1}} \leqslant C\|u\|^2_{L_4(\Omega)^n}
$$

с некоторой константой C.

Покажем непрерывность отображения $K : V^1 \to V^{-1}$. Для произвольных $v^m, v^0 \in L_4(\Omega)^n$ имеем:

$$
\begin{aligned}
&|\langle K(v^m), \varphi\rangle - \langle K(v^0), \varphi\rangle| \\
&\qquad = \left|\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} v_i^0 v_j^0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx\right| \\
&\qquad \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi\|_{V^1} \\
&\qquad \leqslant \|\varphi\|_{V^1} \sum_{i,j=1}^{n} \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что

$$
\left\|K(v^m) - K(v^0)\right\|_{V^{-1}} \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \left\|v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0\right\|_{L_2(\Omega)}.
$$

Преобразуем правую часть неравенства следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \|v_i^m\|_{L_4(\Omega)} \left\| v_j^m - v_j^0 \right\|_{L_4(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_j^0 \right\|_{L_4(\Omega)} \left\| v_i^m - v_i^0 \right\|_{L_4(\Omega)}$$
$$\leqslant C \|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} \left\| v^m - v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n} + C \left\| v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n} \left\| v^m - v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n}$$
$$= C \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \left\| v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n} \right) \left\| v^m - v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n}.$$

Таким образом получили, что

$$\left\| K(v^m) - K(v^0) \right\|_{V^{-1}} \leqslant C \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \left\| v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n} \right) \left\| v^m - v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n}. \tag{4.14}$$

Полагая $v^m \to v^0$ в $L_4(\Omega)^n$, получаем из последнего неравенства непрерывность отображения $K : L_4(\Omega)^n \to V^{-1}$.

2) Пусть $v \in L_4(0,T; L_4(\Omega)^n)$. В силу оценки (4.12) при почти всех $t \in (0,T)$ имеем

$$\|K(v)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C \|v(t)\|^2_{L_4(\Omega)^n}.$$

Возведем это неравенство в квадрат, проинтегрируем по t от 0 до T и оценим правую часть сверху:

$$\int_0^T \|K(v)(t)\|^2_{V^{-1}} dt \leqslant C^2 \int_0^T \|v(t)\|^4_{L_4(\Omega)^n} dt = C^2 \|v\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)} < \infty.$$

Поскольку правая часть последнего неравенства конечна, то конечна и левая часть. Таким образом для $v \in L_4(0,T; L_4(\Omega)^n)$ мы имеем, что $K(v) \in L_2(0,T; V^{-1})$, и имеет место оценка (4.13).

Переходим теперь к доказательству непрерывности отображения

$$K \ : \ L_4(0,T; L_4(\Omega)^n) \ \to \ L_2(0,T; V^{-1}).$$

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset L_4(0,T; L_4(\Omega)^n)$ сходится к некоторому пределу $v^0 \in L_4(0,T; L_4(\Omega)^n)$. Из неравенства (4.14) получим, что при почти всех $t \in (0,T)$ имеет место оценка

$$\left\|K(v^m)(t)-K(v^0)(t)\right\|_{V^{-1}} \leqslant C\left(\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)^n}+\left\|v^0(t)\right\|_{L_4(\Omega)^n}\right)\left\|(v^m-v^0)(t)\right\|_{L_4(\Omega)^n}.$$

Возведем последнее неравенство в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T. Воспользовавшись неравенством Гёльдера, получим:

$$\int_0^T \left\|K(v^m)(t)-K(v^0)(t)\right\|^2_{V^{-1}}\,dt \leqslant C^2\int_0^T \left(\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)^n}+\|v^0(t)\|_{L_4(\Omega)^n}\right)^2\|v^m(t)-v^0(t)\|^2_{L_4(\Omega)^n}dt$$
$$\leqslant C^2\left(\int_0^T\left(\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)^n}+\|v^0(t)\|_{L_4(\Omega)^n}\right)^4dt\right)^{\frac{1}{2}} \times\left(\int_0^T\|v^m(t)-v^0(t)\|^4_{L_4(\Omega)^n}dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Заметим, что

$$\int_0^T\left(\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)^n}+\left\|v^0(t)\right\|_{L_4(\Omega)^n}\right)^4dt \leqslant 8\int_0^T\left(\|v^m(t)\|^4_{L_4(\Omega)^n}+\|v^0(t)\|^4_{L_4(\Omega)^n}\right)dt = 8\|v^m\|^4_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)}+8\|v^0\|^4_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)}.$$

Имеем в итоге

$$\left\|K(v^m)-K(v^0)\right\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}$$
$$\leqslant 2\sqrt{2}C^2\|v^m-v^0\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)}\left(\|v^m\|^4_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)}+\|v^0\|^4_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant 2\sqrt{2}C^2\|v^m-v^0\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)}\left(\|v^m\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)}+\|v^0\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)}\right)$$

Так как правая часть неравенства стремится к нулю при $m \to +\infty$, то стремится к нулю и левая часть. А это и значит, что отображение

$$K : L_4(0,T; L_4(\Omega)^n) \to L_2(0,T; V^{-1})$$

непрерывно.

3) Нам потребуется следующий результат:

Лемма 4.3. *Пусть V, H, V^* — тройка гильбертовых пространств, таких что $V \subset H \equiv H^* \subset V^*$. Здесь вложения непрерывны, H^* и V^* — пространства сопряженные к пространствам H и V соответственно, пространства H и H^* отождествлены по теореме Рисса. Если функция u принадлежит пространству $L_2(0,T;V)$, а её производная u' принадлежит $L_2(0,T;V^*)$, то функция u почти всюду равна некоторой непрерывной функции из $[0,T]$ в H (то есть функции из $C([0,T],H)$) и имеет место следующее равенство, которое выполняется в смысле скалярных распределений на $(0,T)$:*

$$\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 = 2\langle u', u\rangle_{V^* \times V}.$$

В силу данной леммы каждая функция $u \in W_1$ принадлежит $C([0,T];V^0)$. Поэтому каждая функция из W_1 принадлежит не только $L_2(0,T;V^2)$, но и $L_2(0,T;V^2) \cap L_\infty(0,T;V^0)$.

Далее, отметим, что имеет место вложение (см., например, [20]):

$$L_2(0,T;V^2) \cap L_\infty(0,T;V^0) \subset L_4(0,T;V^1).$$

Таким образом для пространства W_1 имеет место вложение:

$$W_1 \subset Y = \left\{v : v \in L_4(0,T;V^1), v' \in L_2(0,T;V^{-1})\right\}.$$

В силу теоремы

Теорема 4.1. ([21], теорема 2.1) *Пусть X_0, F, X_1 – тройка банаховых пространств, удовлетворяющих условию $X_0 \subset F \subset X_1$. Здесь вложения непрерывны, пространства X_0, X_1 – рефлексивны, вложение $X_0 \to F$ – компактно. Пусть $T > 0$ – фиксированное число и α_0, α_1 – два конечных числа таких, что $\alpha_i > 1$, $i = 0, 1$. Предположим, что*

$$\mathcal{Y} = \{v : v \in L_{\alpha_0}(0,T;X_0); v' \in L_{\alpha_1}(0,T;X_1)\}$$

пространство с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{Y}} = \|v\|_{L_{\alpha_0}(0,T;X_0)} + \|v'\|_{L_{\alpha_1}(0,T;X_1)}.$$

Тогда вложение пространства $\mathcal{Y}$ в пространство $L_{\alpha_0}(0,T;F)$ компактно.

Имеет место компактное вложение: $Y \hookrightarrow L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)$. Таким образом, действие отображения K можно представить следующим образом:

$$W_1 \subset Y \hookrightarrow L_4(0,T;L_4(\Omega)^n) \xrightarrow{K} L_2(0,T;V^{-1}) \subset L_2(0,T;V^{-2}).$$

Здесь первое и последнее вложения непрерывны, второе вложение вполне непрерывно и отображение $K : L_4(0,T;L_3(\Omega)^n) \to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывно в силу пункта (2) этой леммы. Таким образом, отображение $K : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1})$ вполне непрерывно.

Оценим теперь $\|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})}$. Имеем:

$$|\langle K(v),\varphi\rangle| = \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}|v_i||v_j|\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right|dx$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\|v_i\|_{L_4(\Omega)}\|v_j\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{L_4(\Omega)} \leqslant C\|v\|_{L_4(\Omega)^n}\|v\|_{V^0}\|\varphi\|_{V^2}.$$

Откуда для любой функции $v \in W_1$ при почти всех $t \in (0,T)$ имеет место оценка:

$$\|K(v)(t)\|_{V^{-2}} \leqslant C\|v(t)\|_{L_4(\Omega)^n}\|v(t)\|_{V^0}.$$

Возводя это неравенство в квадрат и интегрируя полученное неравенство по отрезку $[0,T]$ получим:

$$\int_0^T \|K(v)(t)\|^2_{V^{-2}}dt \leqslant C^2\int_0^T \|v(t)\|^2_{L_4(\Omega)^n}\|v(t)\|^2_{V^0}dt$$
$$\leqslant C^2\|v\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}\int_0^T \|v(t)\|^2_{L_4(\Omega)^n}dt \leqslant C\|v\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}\|v\|^2_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Откуда и следует требуемое неравенство (4.13). □

Лемма 4.4. *Для оператора B_δ имеют место следующие свойства:*

1. *Для любой функции $u \in L_2(0,T;V^1)$ функция $B_\delta(u) \in L_2(0,T;V^{-2})$ и оператор $B_\delta : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-2})$ непрерывный и ограниченный в следующем смысле:*

$$\|B_\delta(u)(t)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant C, \tag{4.15}$$

где C — константа, не зависящая от функции u и δ.

2. *Для любой функции* $u \in W_1$ *функция* $B_\delta(u) \in L_2(0,T;V^{-2})$ *и оператор* $B_\delta : W_1 \to L_2(0,T;V^{-2})$ *вполне непрерывный.*

Доказательство. 1) Для любой функции $u \in L_2(0,T;V^1)$ при любом $\varphi \in V^2$ при почти всех $t \in (0,T)$ имеем

$$|\langle B_\delta(u)(t),\varphi\rangle| = \left|\tau^* \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(u)(t)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(u)(t)|)}\mathcal{E}_{ij}(\varphi)dx\right|$$
$$\leqslant \tau^* \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{|\mathcal{E}_{ij}(u)(t)|}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(u)(t)|)}\,|\mathcal{E}_{ij}(\varphi)|\,dx$$
$$\leqslant \tau^* \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{|\mathcal{E}(u)(t)|}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(u)(t)|)}|\mathcal{E}(\varphi)|\,dx \leqslant \tau^* C\|\varphi\|_{V^2}.$$

Здесь мы воспользовались элементарным неравенством:

$$\frac{|b|}{\max(\delta,|b|)} \leqslant 1.$$

Следовательно, при почти всех $t \in (0,T)$ имеет место неравенство

$$\|B_\delta(u)(t)\|_{V^{-2}} \leqslant \tau^* C.$$

Возводя последнее неравенство в квадрат и интегрируя по t от 0 до T, мы и получим, что $B(u) \in L_2(0,T;V^{-2})$ и имеет место требуемая оценка (4.15).

Докажем непрерывность оператора $B_\delta : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-2})$. Пусть последовательность u_n сходится к некоторой функции u_0 в $L_2(0,T;V^1)$. Тогда при почти всех $t \in (0,T)$ для произвольного $\varphi \in V^2$ получим:

$$|\langle B_\delta(u_n)(t) - B_\delta(u_0)(t),\varphi\rangle| = \Bigg|\tau^* \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(u_n)(t)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(u_n)(t)|)}\mathcal{E}_{ij}(\varphi)dx$$
$$-\tau^* \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(u_0)(t)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(u_0)(t)|)}\mathcal{E}_{ij}(\varphi)dx\Bigg|$$
$$\leqslant \tau^* \sum_{i,j=1}^{n} \left|\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\mathcal{E}_{ij}(u_n)(t)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(u_n)(t)|)} - \frac{\mathcal{E}_{ij}(u_0)(t)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(u_n)(t)|)}\right)\mathcal{E}_{ij}(\varphi)dx\right|$$

$$+\tau^* \sum_{i,j=1}^n \left| \int\limits_\Omega \left(\frac{\mathcal{E}_{ij}(u_0)(t)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(u_n)(t)|)} - \frac{\mathcal{E}_{ij}(u_0)(t)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(u_0)(t)|)} \right) \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx \right|$$

$$\leqslant \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{|\mathcal{E}_{ij}(u_n)(t) - \mathcal{E}_{ij}(u_0)(t)|}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(u_n)(t)|)} |\mathcal{E}_{ij}(\varphi)|\, dx$$

$$+\tau^* \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega |\mathcal{E}_{ij}(u_0)(t)| \left| \frac{1}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(u_n)(t)|)} - \frac{1}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(u_0)(t)|)} \right| |\mathcal{E}_{ij}(\varphi)|\, dx$$

$$\leqslant \frac{\tau^*}{\delta} \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega |\mathcal{E}(u_n - u_0)(t)|\, |\mathcal{E}(\varphi)| dx$$

$$+ \frac{\tau^*}{\delta^2} \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \Big| |\mathcal{E}(u_0)(t)| - |\mathcal{E}(u_n)(t)| \Big| \, |\mathcal{E}(\varphi)|\, dx$$

$$\leqslant 2\tau^* \frac{\delta+1}{\delta^2} \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega |\mathcal{E}(u_n - u_0)(t)|\, |\mathcal{E}(\varphi)| dx$$

$$\leqslant 2\tau^* C \frac{\delta+1}{\delta^2} \|u_n(t) - u_0(t)\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^2}.$$

Откуда в силу произвольности φ получаем, что:

$$\|B_\delta(u_n)(t) - B_\delta(u_0)(t)\|_{V^{-2}} \leqslant 2\tau^* C \frac{\delta+1}{\delta^2} \|u_n(t) - u_0(t)\|_{V^1}.$$

Возведя в квадрат и проинтегрировав, получим:

$$\|B_\delta(u_n) - B_\delta(u_0)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant 2\tau^* C \frac{\delta+1}{\delta^2} \|u_n - u_0\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

То есть $B_\delta(u_n) \to B_\delta(u_0)$ в $L_2(0,T;V^{-2})$.

2) Аналогично доказательству пункта 2 леммы 4.1 имеем компактное вложение $W_1 \subset Y \hookrightarrow L_2(0,T;V^1)$. Тогда действие оператора $B_\delta : W_1 \to L_2(0,T;V^{-2})$ можно представить в виде следующей композиции:

$$W_1 \subset Y \hookrightarrow L_2(0,T;V^1) \xrightarrow{B_\delta} L_2(0,T;V^{-2}).$$

Здесь первое вложение непрерывно, второе вложение компактно, а отображение B_δ в силу первого пункта этой леммы непрерывно. Таким образом отображение $B_\delta : W_1 \to L_2(0,T;V^{-2})$ вполне непрерывно как суперпозиция непрерывного и вполне непрерывного отображений. $\square$

Введём также операторы L и N с помощью равенств

$$L : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^1, \quad L(v) = (v' + \delta A^3 + \mu Av, v|_{t=0});$$
$$N : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^1, \quad N(v) = (B_\delta(v) - K(v), 0).$$

Лемма 4.5. *Операторы L и N имеют следующие свойства:*

1. *Оператор $L : W_1 \to L_2(0,T;V^{-2}) \times V^1$ непрерывно обратим.*
2. *Оператор $N : W_1 \to L_2(0,T;V^{-2}) \times V^1$ компактный.*

Доказательство. *i)* Непрерывная обратимость оператора следует из приведенной ниже теоремы о разрешимости абстрактной параболической задачи:

Теорема 4.2. *Для любой правой части $f \in L_2(0,T;V^{-2})$ и начального условия $a \in V^1$ задача*

$$\begin{cases} u' + \alpha A^3 u + \mu A u = f \\ \hfill u(0) = a \end{cases}$$

имеет единственное решение u в пространстве

$$W_1 = \left\{u : u \in L_2(0,T;V^4), u \in L_2(0,T;V^{-2})\right\},$$

непрерывно зависящее от f и a. Для решения также имеет место оценка:

$$\alpha\|u\|_{L_2(0,T;V^4)} \leqslant \sqrt{2\alpha+1}\left(\|a\|_{V^1} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-2})}\right). \tag{4.16}$$

Доказательство этой теоремы проводится на основе аппроксимацонно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики. Сначала рассматриваемая задача аппроксимируется (в уравнение добавляется член $\varepsilon A^3 u'$) и доказывается разрешимость полученного уравнения в пространстве $\left\{u : u \in C([0,T];V^4), u \in L_2(0,T;V^4)\right\}$. Далее на основе априорных оценок решений, не зависяших от ε, показывается, что из последовательности решений можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся слабо к решению исходной задачи при стремлении $\varepsilon \to 0$. Единственность получается на основе неравенства Гронуолла-Беллмана.

Полное изложение доказательства здесь не приводится в силу своего объёма.

ii) Компактность оператора $N : W_1 \to L_2(0,T;V^{-2}) \times V^1$ непосредственно вытекает из компактности его первой компоненты (каждое слагаемое компактно). $\square$

Также введём оператор: $\mathcal{N} : W_1 \to L_2(0,T;V^{-2}) \times V^1, \quad \Upsilon(v) = (\Psi(v), a)$.

Тогда, используя последнюю лемму, можно сказать, что задача существования решения $(v, f) \in W_1 \times L_2(0,T;V^{-2})$ аппроксимационной задачи эквивалентна задаче существования решения $v \in W_1$ для следующего операторного включения

$$v \in \mathfrak{M}(v), \quad \text{где } \mathfrak{M}(v) = L^{-1}(\mathcal{N}(v) - N(v)). \tag{4.17}$$

Поскольку оператор L^{-1} линейный и непрерывный, оператор N — компактный, при помощи условий (Ψ1) и (Ψ2) мы получаем, что многозначное отображение $\mathfrak{M} : W_1 \multimap W_1$ является вполне непрерывным (то есть, оно полунепрерывно сверху и переводит ограниченные множества в относительно компактные) и имеет непустые, выпуклые, компактные значения.

Рассмотрим также следующее семейство включений

$$v' + \delta A^3 v + \mu A v + \lambda B_\delta(v) - \lambda K(v) = \lambda f \in \Psi(v), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{4.18}$$

решение которых удовлетворяет начальному условию (3.9). Заметим, что (4.18) совпадает с (3.10) при $\lambda = 1$. Тогда задача (4.18),(3.9) может быть переписана в виде

$$v \in \lambda\mathfrak{M}(v), \quad \text{где} \quad \lambda \in [0,1]. \tag{4.19}$$

Очевидно, что она совпадает с (4.17) при λ равном 1.

§5. Априорные оценки решений

Теорема 5.1. *Для решения $v \in W_1$ семейства* (4.19) *имеют место следующий оценки:*

$$\|v\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)} \leqslant \frac{C}{\mu} M^2 + \|a\|^2_{V^0}; \tag{5.20}$$

$$\mu\|v\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant \frac{C}{\mu} M^2 + \|a\|^2_{V^0}; \tag{5.21}$$

$$\|v\|_{L_r(0,T;W_2^{1+q}(\Omega)^n)} \leqslant C; \tag{5.22}$$

$$\delta\|v\|_{L_2(0,T;V^4)} \leqslant C; \tag{5.23}$$

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leqslant C. \tag{5.24}$$

Доказательство. Пусть пара $(v, f) \in W_1$ и $f \in L_2(0,T;V^0)$ – решение (4.19). Тогда в силу приведенных выше рассуждений пара (v, f) является решением (4.18) и удовлетворяет начальному условию (3.9).

Применим обе части (4.18) к функции $v \in W_1$. Имеем

$$\langle v' + \delta A^3 v + \mu A v - \lambda K(v) + \lambda B_\delta(v), v\rangle = \langle \lambda f, v\rangle.$$

Вспоминая определения операторов, получаем следующее равенство:

$$\langle v', v\rangle + \delta \int\limits_\Omega A^2 v A v dx + \mu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v dx - \lambda \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx$$
$$+ \lambda\tau^* \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)|)} dx = \lambda\langle f, v\rangle.$$

Преобразуем слагаемые в последнем равенстве:

$$\langle v', v\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{V^0};$$
$$\delta \int\limits_\Omega A^2 v A v dx = -\delta \int\limits_\Omega \Delta(Av) A v dx = \delta \int\limits_\Omega \nabla(Av) : \nabla(Av) dx = \delta\|v\|^2_{V^3};$$
$$\mu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v dx = \mu\|v\|^2_{V^1};$$
$$-\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = -\frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i \frac{\partial (v_j v_j)}{\partial x_i} dx$$
$$= \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i} v_j v_j dx = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega div\, v v_j v_j dx = 0.$$

Таким образом

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{V^0} + \delta\|v\|^2_{V^3} + \mu\|v\|^2_{V^1} + \lambda\tau^* \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\mathcal{E}^2_{ij}(v)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)|)} dx = \lambda\langle f, v\rangle.$$

Воспользуемся в правой части неравенствами Юнга и Коши:

$$\lambda\langle f, v\rangle = \lambda\|f\|_{V^{-1}}\|v\|_{V^1} \leqslant \lambda\frac{\|f\|^2_{V^{-1}}}{2\mu} + \frac{\lambda\mu}{2}\|v\|^2_{V^1} \leqslant \frac{1}{2\mu}\|f\|^2_{V^{-1}} + \frac{\mu}{2}\|v\|^2_{V^1}.$$

Заметим, что

$$\lambda\tau^* \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\mathcal{E}^2_{ij}(v)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)|)} dx \geqslant 0$$

Тогда получаем оценку:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{V^0}+\delta\|v\|^2_{V^3}+\frac{\mu}{2}\|v\|^2_{V^1}\leqslant\frac{1}{2\mu}\|f\|^2_{V^{-1}}. \qquad (5.25)$$

Проинтегрировав последнее неравенство от 0 до $t\in[0,T]$, получим следующую оценку:

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{V^0}-\frac{1}{2}\|v(0)\|^2_{V^0}+\delta\int\limits_0^t\|v(s)\|^2_{V^3}ds+\frac{\mu}{2}\int\limits_0^t\|v(s)\|^2_{V^1}ds$$
$$\leqslant\frac{1}{2\mu}\int\limits_0^t\|f(s)\|^2_{V^{-1}}ds\leqslant\frac{1}{2\mu}\int\limits_0^T\|f(s)\|^2_{V^{-1}}ds=\frac{1}{2\mu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Или это можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{V^0}+\delta\int\limits_0^t\|v(s)\|^2_{V^3}ds+\frac{\mu}{2}\int\limits_0^t\|v(s)\|^2_{V^1}ds\leqslant\frac{1}{2\mu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+\frac{1}{2}\|a\|^2_{V^0}.$$

Так как каждое слагаемое в левой части последнего неравенства неотрицательно, то получаем следующие оценки:

$$\|v(t)\|^2_{V^0}\leqslant\frac{1}{\mu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+\|a\|^2_{V^0}\leqslant\frac{C}{\mu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)}+\|a\|^2_{V^0}$$
$$\leqslant\frac{CM^2}{\mu}+\|a_0\|^2_{V^0};$$

$$\mu\int\limits_0^t\|v(s)\|^2_{V^1}ds\leqslant\frac{1}{\mu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}+\|a\|^2_{V^0}$$
$$\leqslant\frac{C}{\mu}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)}+\|a\|^2_{V^0}\leqslant\frac{CM^2}{\mu}+\|a_0\|^2_{V^0}.$$

Правые части этих неравенств не зависят от t, поэтому можно перейти к max по $t\in[0,T]$ в левой части:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\|v(t)\|^2_{V^0}\leqslant\frac{CM^2}{\mu}+\|a\|^2_{V^0};\quad \mu\int\limits_0^T\|v(s)\|^2_{V^1}ds\leqslant\frac{CM^2}{\mu}+\|a\|^2_{V^0}.$$

Отсюда и следуют требуемые неравенства (5.20) и (5.21).

Теперь применим уравнение к пробной функции Av.

$$\langle v', Av\rangle + \delta\int\limits_\Omega A^2vA^2v dx + \mu\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla Av dx - \lambda\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega v_iv_j\frac{\partial\Delta v_j}{\partial x_i}dx$$
$$+ \lambda\tau^*\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v)|)}\mathcal{E}_{ij}(\Delta v)dx = \lambda\langle f, Av\rangle.$$

Как и раньше преобразуем и оценим слагаемые в последнем равенстве.

$$\langle v', Av\rangle = \langle A^{1/2}v', A^{1/2}v\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{V^1};\quad \delta\int\limits_\Omega A^2vA^2vdx = \delta\|v\|^2_{V^4};$$
$$\mu\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla Avdx = \mu\int\limits_\Omega \Delta v\Delta vdx = \mu\|v\|^2_{V^2};$$
$$\lambda\langle f, Av\rangle = \lambda\|f\|_{V^0}\|Av\|_{V^0} \leqslant \|f\|_{V^0}\|v\|_{V^2} \leqslant \frac{\mu}{8}\|v\|^2_{V^2} + \frac{2\|f\|^2_{V^0}}{\mu};$$

$$-\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega v_iv_j\frac{\partial\Delta v_i}{\partial x_j}dx = \sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j\Delta v_i dx + \sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Delta v_i dx$$
$$= \sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k\partial x_k}dx + \sum_{j=1}^n\int\limits_\Omega v_i\mathrm{div}v\Delta v_i dx$$
$$= \sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_k}v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dx - \sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dx$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)dx - \sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dx$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dx - \sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dx$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega \operatorname{div} v\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dx - \sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dx.$$

Откуда в силу непрерывного вложения $W_1^1(\Omega)^n \subset L_{3/2}(\Omega)^n$ получаем:

$$\lambda \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \Delta v_i}{\partial x_j} dx = \lambda \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx$$
$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^3 dx \right)^{1/3} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right|^3 dx \right)^{1/3} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right|^3 dx \right)^{1/3}$$
$$\leqslant \|\nabla v\|^3_{L_3(\Omega)^{n^2}} = \big\| |\nabla v|^2 \big\|^{3/2}_{L_{3/2}(\Omega)} \leqslant C \left\| \nabla |\nabla v|^2 \right\|^{3/2}_{L_1(\Omega)^{n^2}}$$
$$\leqslant C \|\nabla^2 v\|^{3/2}_{L_2(\Omega)^n} \cdot \|\nabla v\|^{3/2}_{L_2(\Omega)^{n^2}} \leqslant \frac{3\mu}{4} \|v\|^2_{V^2} + \frac{C^4}{4\mu^3} \|v\|^6_{V^1}.$$

Рассмотрим $-\lambda\tau^* \sum\limits_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)|)} \mathcal{E}_{ij}(\Delta v) dx$. Имеем:

$$-\lambda\tau^* \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)|)} \mathcal{E}_{ij}(\Delta v)\, dx$$
$$= -\lambda\tau^* \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)|)} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \mathcal{E}_{ij}(v)\, dx$$
$$= \lambda\tau^* \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)|)} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v)\, dx.$$

Далее дифференцируя функцию $\frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)|)}$ как сложную функцию от $\mathcal{E}(v)$ (суперпозицию функции $f(x) = \frac{x}{\max\{\delta, x\}}$ и функции $g(v) = \mathcal{E}(v)$) получим:

$$\lambda\tau^* \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)|)} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v)\, dx$$
$$= \lambda\tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)|)} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_{pq}(v) \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v)\, dx.$$

Рассмотрим два случая, первый $\delta \geqslant |\mathcal{E}(v)|$:

$$\lambda\tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)|)} \frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{E}_{pq}(v)\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{E}_{ij}(v)\,dx$$

$$= \frac{\lambda\tau^*}{\delta} \sum_{i,j,k,p,q=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{pq}}\mathcal{E}_{ij}(v)\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{E}_{pq}(v)\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{E}_{ij}(v)\,dx$$

$$= \frac{\lambda\tau^*}{\delta} \sum_{i,j,k,p,q=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \delta_{pq}^{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{E}_{pq}(v)\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{E}_{ij}(v)\,dx = \frac{\lambda\tau^*}{\delta}\|\nabla\mathcal{E}(v\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant 0$$

Второй случай $\delta \leqslant |\mathcal{E}(v)|$:

$$\lambda\tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)|)} \frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{E}_{pq}(v)\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{E}_{ij}(v)\,dx =$$

$$= \lambda\tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{|\,\mathcal{E}(v)|} \frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{E}_{pq}(v)\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{E}_{ij}(v)\,dx =$$

$$= \lambda\tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{|\,\mathcal{E}(v)|}\left(\delta_{pq}^{ij} - \frac{\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{pq}}{|\,\mathcal{E}(v)|^2}\right) \frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{E}_{pq}(v)\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{E}_{ij}(v)\,dx \geqslant 0$$

В итоге получим:

$$\lambda\tau^* \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\,\mathcal{E}(v)|)}\mathcal{E}_{ij}(\Delta v)dx \geqslant 0$$

Отсюда имеем оценку:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{V^1} + \mu\|v\|^2_{V^2} + \delta\|v\|^2_{V^4} \leqslant \frac{3\mu}{4}\|v\|^2_{V^2} + \frac{C^4}{4\mu^3}\|v\|^6_{V^1} + \frac{\mu}{8}\|v\|^2_{V^2} + \frac{2\|f\|^2_{V^0}}{\mu}; \tag{5.26}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{V^1} + \frac{\mu}{8}\|v\|^2_{V^2} \leqslant \frac{2}{\mu}\|f\|^2_{V^0} + \frac{C^4}{4\mu^3}\|v\|^6_{V^1}. \tag{5.27}$$

Разделим это неравенство на $(1 + \|v\|^2_{V^1})^2$. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dt}\|v\|^2_{V^1}}{(1+\|v\|^2_{V^1})^2} + \frac{\mu}{8}\frac{\|v\|^2_{V^2}}{(1+\|v\|^2_{V^1})^2} \leqslant \frac{2}{\mu}\frac{\|f\|^2_{V^0}}{(1+\|v\|^2_{V^1})^2} + \frac{C^4}{4\mu^3}\frac{\|v\|^6_{V^1}}{(1+\|v\|^2_{V^1})^2}.$$

Так как $\dfrac{\|f\|^2_{V^0}}{(1+\|v\|^2_{V^1})^2} \leqslant \|f\|^2_{V^0}$, а

$$\frac{\|v\|^6_{V^1}}{(1+\|v\|^2_{V^1})^2} \leqslant \frac{\|v\|^2_{V^1}\|v\|^4_{V^1}}{(1+\|v\|^2_{V^1})^2} \leqslant \|v\|^2_{V^1},$$

то полученное неравенство можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2}\frac{\dfrac{d}{dt}\|v\|^2_{V^1}}{(1+\|v\|^2_{V^1})^2} + \frac{\mu}{8}\frac{\|v\|^2_{V^2}}{(1+\|v\|^2_{V^1})^2} \leqslant \frac{2}{\mu}\|f\|^2_{V^0} + \frac{C^4}{4\mu^3}\|v\|^2_{V^1}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до T:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T \frac{\dfrac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1}}{(1+\|v(t)\|^2_{V^1})^2}dt + \frac{\mu}{8}\int\limits_0^T \frac{\|v(t)\|^2_{V^2}}{(1+\|v(t)\|^2_{V^1})^2}dt$$
$$\leqslant \frac{2}{\mu}\int\limits_0^T \|f(t)\|^2_{V^0}dt + \frac{C^4}{4\mu^3}\int\limits_0^T \|v(t)\|^2_{V^1}dt$$
$$\leqslant \frac{2}{\mu}M^2 + \frac{C^4}{4\mu^2}\left(\frac{1}{\mu^2}M^2 + \frac{1}{\mu}\|v(t)\|^2_{V^0}\right).$$

Воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T \frac{\dfrac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^1}}{(1+\|v(t)\|^2_{V^1})^2}dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+\|v(T)\|^2_{V^1})^2} - \frac{1}{(1+\|v(0)\|^2_{V^1})^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(1+\|v(0)\|^2_{V^1})^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+\|v(T)\|^2_{V^1})^2}$$

и

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\|v(T)\|^2_{V^1})^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Получим неравенство:

$$\int\limits_0^T \frac{\|v(t)\|^2_{V^2}}{(1+\|v(t)\|^2_{V^1})^2}dt \leqslant C, \tag{5.28}$$

где $C = \dfrac{8}{\mu}\left(\dfrac{2}{\mu}M^2 + \dfrac{C^4}{4\mu^2}\left(\dfrac{1}{\mu}M^2 + \dfrac{1}{\mu}\|a\|^2_{V^0}\right) + 1\right)$.

Теперь выберем r, p, q так, чтобы: $q \in (0, \frac{1}{2})$, $r = \frac{2}{1+2q}$, а $p = \frac{2}{r(1-q)}$, $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$. По интерполяционному неравенству и неравенству Гёльдера получаем:

$$\int_0^T \|v\|^r_{W_2^{1+q}} \, dx \leqslant \int_0^T \|v\|^{qr}_{W_2^2} \|v\|^{r(1-q)}_{W_2^1} \, dx$$
$$\leqslant \left(\int_0^T \|v\|^{rp(1-q)}_{W_2^1} \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T \|v\|^{qp'r}_{W_2^2} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Но мы выбрали коэффициенты так, что $rp(1-q) = 2$, а $rqp' = \frac{2}{3}$. Поэтому имеем:

$$\int_0^T \|v\|^{\frac{2}{3}}_{W_2^2} \leqslant c \left(\int_0^T \frac{\|v\|^2_{V^2}}{(1 + \|v\|^2_{V^1})^2} \, ds \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^T (1 + \|v\|^2_{V^2}) \, ds \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Первый множитель ограничен в следствии (5.28), второй из-за (5.25). Откуда получаем оценку:

$$\|v\|_{L_r(0,T;W1+q_2)} \leqslant C. \tag{5.29}$$

Для получения оценок (5.23) и (5.24) заметим, что если пара (v, f) является решением операторного уравнения (3.10), то имеет место равенство:

$$v' + \delta A^3 v + \mu A v = -\lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f.$$

Следовательно:

$$\left\| v' + \delta A^3 v + \mu A \right\|_{L_2(0,T;V^{-2})} = \|-\lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f\|_{L_2(0,T;V^{-2})}. \tag{5.30}$$

В силу неравенства (4.16) левую часть можно оценить следующим образом:

$$\delta \|u\|_{L_2(0,T;V^4)} \leqslant \sqrt{2\delta + 1} \left(\|a\|_{V^1} + \left\| v' + \delta A^2 v + \mu A \right\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \right).$$

Откуда

$$\left\| v' + \delta A^3 v + \mu A \right\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \geqslant \frac{\delta}{\sqrt{2\delta + 1}} \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} - \|a\|_{V^1}.$$

Правую часть (5.30), в силу неравенств (4.12), (4.15) и условия ($\Psi 3$), можно оценить следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\|-\lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \\
&\quad \leqslant \lambda \|B_\delta(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \lambda \|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \lambda \|f\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \\
&\quad \leqslant \|B_\delta(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \\
&\quad \leqslant C + C\|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + C\|f\|_{L_2(0,T;V^0)} \\
&\quad \leqslant C + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{CM^2}{\mu} + \|a\|^2_{V^0} \right) + CM.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\frac{\delta}{\sqrt{2\delta+1}} \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} \leqslant C + \frac{C}{\mu} \left(\frac{M^2}{\mu} + \|a\|^2_{V^0} \right) + CM + \|a\|_{V^1}.
$$

Умножая последнее неравенство на $\sqrt{2\delta+1}$, получим

$$
\begin{aligned}
\delta \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} &\leqslant \sqrt{2\delta+1} \left(C + \frac{C}{\mu} \left(\frac{M^2}{\mu} + \|a\|^2_{V^0} \right) + CM + \|a\|_{V^1} \right) \\
&\leqslant 2 \left(C + \frac{C}{\mu} \left(\frac{M^2}{\mu} + \|a\|^2_{V^0} \right) + CM + \|a\|_{V^1} \right).
\end{aligned}
$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\delta \leqslant 1$. Обозначив последнюю часть неравенства через C, мы получаем требуемое неравенство (5.23).

Аналогично $v' = -\delta A^3 v - \mu A v - \lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f$. Отсюда

$$
\begin{aligned}
&\|v'\|_{L_2(0,T;V^{-2})} = \left\| -\delta A^3 v - \mu A v - \lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f \right\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \\
&\leqslant \delta \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} + \mu C \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + C + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{CM^2}{\mu} + \|a\|^2_{V^0} \right) + CM \\
&\qquad \leqslant C + \mu C \sqrt{\frac{C}{\mu} M^2 + \|a\|^2_{V^0}} + C + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{CM^2}{\mu} + \|a\|^2_{V^0} \right).
\end{aligned}
$$

Обозначив правую часть последнего неравенства через C, мы получим требуемую оценку на (5.24). Отметим, что константа C в этой оценке не зависит от δ.

Теорема существования аппроксимационной задачи. На данном этапе на основе теории степени вполне непрерывных многозначных векторных полей с компактными выпуклыми значениями будет доказано существование решения аппроксимационной задачи. Сначала докажем, что существует решение операторного включения (3.10).

Теорема 5.2. *Существует хотя бы одно решение* $v \in W_1$ *операторного включения* (3.10).

Доказательство. Мы воспользуемся теорией топологической степени для многозначных векторных полей вида $I - G$, где I — тождественное отображение, а G — вполне непрерывное многозначное отображение, определенное на ограниченной области банахова пространства и имеющее непустые, выпуклые, компактные значения.

По теореме 5.1 все решения семейства операторных включений (3.10) удовлетворяют априорным оценкам (5.23),(5.24). Следовательно, все включения этого семейства не имеют решений на границе шара $B_R \subset W_1$ радиуса $R = C + 1$ (где C – сумма правых частей из неравенств (5.24), (5.23)) с центром в нуле, то есть

$$v \notin \lambda\mathfrak{M}(v) \quad \text{для всех} \quad (v, \lambda) \in \partial B_R \times [0, 1].$$

Следовательно, определена топологическая степень

$$\deg(I - \lambda\mathfrak{M}, \overline{B_R}, 0),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Используя свойство гомотопической инвариантности степени и свойство нормировки степени, мы получим, что

$$\deg(I - \mathfrak{M}, \overline{B_R}, 0) = \deg(I, \overline{B_R}, 0) = 1.$$

Так как эта степень отлична от нуля, то существует хотя бы одно решение $v \in W_1$ операторного включения (3.10). □

Поскольку существует хотя бы одно решение $v \in W_1$ включения (3.10), то из вышеприведенных рассуждений следует, что задача (3.8)–(3.9) имеет хотя бы одно решение $(v, f) \in W_1 \times L_2(0, T; V^0)$, а следовательно и аппроксимационная задача имеет хотя бы одно решение $(v, f) \in W_1 \times L_2(0, T; V^0)$.

§6. Предельный переход

В этом пункте мы перейдем в аппроксимационной задаче к пределу при $\delta \to 0$. Тем самым будет доказана теорема 2.1.

В силу теоремы 5.2 для каждого $\delta > 0$ существует решение аппроксимационной задачи. Т.е. существует пара функций $(v, f) \in W_1 \times$

$L_2(0,T;V^0)$, которая для любого $\varphi \in V^2$ удовлетворяет интегральному равенству

$$\langle v'_\delta, \varphi\rangle + \mu \int_\Omega \nabla(v_\delta) : \nabla(\varphi)\, dx - \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_{\delta i} v_{\delta j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx$$
$$+ \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta)\mathcal{E}_{ij}(\varphi)}{max\{\delta, |\,\mathcal{E}(v_\delta)|\}}\, dx + \delta \int_\Omega A^2 v_\delta A\varphi\, dx = \int_\Omega f_\delta \varphi dx,$$

условию обратной связи $f_\delta \in \Psi(v_\delta)$ и начальному условию $v_\delta(0) = a$.

Рассмотрим последовательность $\delta \to 0$. В силу априорных оценок (5.20)–(5.24) имеют место следующие сходимости:

$$v_\delta \to v \ \text{ слабо в } L_2(0,T;V^1); \quad v_\delta \to v \ \text{ сильно в } L_2(0,T;L_4(\Omega)^3);$$
$$v_\delta \to v \text{ с ильно в } L_r(0,T;V^1); \quad v_\delta \to v' \ \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-2});$$
$$\delta v_\delta \to u \ \text{ слабо в } L_2(0,T;V^4).$$

Из указанных сходимостей получим, что

$$\langle v'_\delta, \varphi\rangle \to \langle v, \varphi\rangle \text{ при } \delta \to 0;$$
$$\mu \int_\Omega \nabla(v_\delta) : \nabla\varphi dx \to \mu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx \text{ при } \delta \to 0;$$
$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (v_\delta)_i (v_\delta)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \to \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \text{ при } \delta \to 0;$$
$$\delta \int_\Omega A^2 v A\varphi dx \to \int_\Omega A^2 u A\varphi dx \text{ при } \delta \to 0,$$

Однако, в смысле распределений $\delta A^2 v$ сходится к нулю. Отсюда, в силу единственности предела, $u = 0$.

Здесь мы воспользовались тем, что $v_\delta \to v$ сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega)^n)$, поэтому $(v_\delta)_i(v_\delta)_j$ сходится сильно к $v_i v_j$ в $L_1(0,T;L_2(\Omega))$.

Далее, так как $\dfrac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta)}{max\{\delta, |\,\mathcal{E}(v_\delta)|\}}$ ограничено сверху константой, не зависящей от δ, то это выражение сходится к некоторой функции w слабо, например, в $L_p(0,T;L_p(\Omega))$ для любого $1 < p < \infty$.

Покажем теперь, что на самом деле

$$\mu \int\limits_{\Omega} \nabla(v_\delta) : \nabla(\varphi)\, dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta)\mathcal{E}_{ij}(\varphi)}{\max\{\delta, |\,\mathcal{E}(v_\delta)|\}}\, dx \to \int\limits_{\Omega} \sigma : \mathcal{E}(\varphi) dx \quad \text{при} \quad \delta \to 0$$

для функции $\sigma \in L_2(0,T; L_2(\Omega)^n$, удовлетворяющей при почти всех $(t,x) \in Q_T$ реологическому соотношению (1.2). Для этого введем функцию

$$\sigma^\delta = 2\mu\mathcal{E}(v_\delta) + \frac{\tau^*\mathcal{E}(v_\delta)}{\max\{\delta, |\,\mathcal{E}(v_\delta)|\}}$$

и покажем, что она сходится в некотором смысле к функции $\sigma = 2\mu\mathcal{E}(v) + \frac{\tau^*}{|\mathcal{E}(v)|}\mathcal{E}(v)$.

В силу поточечной сходимости имеем, что при $\mathcal{E}(v_\delta) \neq 0$ последовательность $\sigma^\delta \to \sigma$.

Рассмотрим множество $A = Q_T \cap \{|\mathcal{E}(v)| = 0\} \cap \{|\sigma| > \tau_*\}$, и предположим, что $mes\, A = m > 0$. Определим:

$$\chi_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{|\sigma|}\mathbf{1}_A \in L_\infty(Q_T), \quad I^\delta = \int\limits_{Q_T} \sigma^\delta_{ij}\chi_{ij} dxdt, \quad I = \int\limits_{Q_T} \sigma_{ij}\chi_{ij} dxdt.$$

Обозначим $a = I - m\tau^*$, заметим что $a > 0$. Так как $I^\delta \to I$ (в силу слабой сходимости $\sigma^\delta \to \sigma$), то существует такое δ_0, что $\forall \delta < \delta_0$ выполнено $I^\delta > \dfrac{a}{2} + m\tau^*$. Обозначим $\delta_1 = \min\left(\delta_0, \dfrac{a}{24\mu|Q|}\right)$. Разделим A на три подобласти:

$$A_1 = Q \cap \{|\mathcal{E}(v_\delta)| \leqslant \delta\}, \quad A_2 = Q \cap \{\delta < |\mathcal{E}(v_\delta)| \leqslant \delta_1\},$$
$$A_3 = Q \cap \{|\mathcal{E}(v_\delta)| > \delta_1\}.$$

И разобьем интеграл I_δ а три части $I_\delta = \sum\limits_{k=1}^{3} \int\limits_{A_k} \sigma : \chi dx = \sum\limits_{k=1}^{3} I_k$.

Рассмотрим их поотдельности:

$$I_1 = \int\limits_{A_1} \left(2\mu + \frac{\tau^*}{\delta}\right) \mathcal{E}(v_\delta) : \chi dxdt, \quad |I_1| \leqslant 2\mu\delta_1 \mathrm{mes} Q + \tau^* \mathrm{mes} A_1 \cap A,$$

$$I_2 = \int\limits_{A_2} \left(2\mu + \frac{\tau^*}{|\mathcal{E}(v)|}\right) \mathcal{E}(v_\delta) : \chi dxdt, \quad |I_2| \leqslant 2\mu\delta_1 \mathrm{mes} Q + \tau^* \mathrm{mes} A_2 \cap A,$$

$$I_3 = \int\limits_{A_3} \sigma^\delta : \chi dxdt, \quad |I_3| \leqslant C(1 + \|v_\delta\|_{V^1}) I(\delta, \delta),$$

где $I(\delta_1, \delta) = (\mathrm{mes}(A \cap A_3))^{1/2}$.

Используя то, что $I_\delta > \frac{a}{2} + \mu\tau^*$ и $|I_\delta| \leqslant \sum_k |I_k|$ получим, что

$$\frac{a}{2} + \mu\tau^* < |I_\delta| \leqslant 4\mu\delta_1 \mathrm{mes} Q + CI(\delta_1, \delta) + m\tau^* \leqslant CI(\delta_1, \delta) + m\tau^* + \frac{a}{6}.$$

Получили противоречие с тем, что $I(\delta_1, \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, что следует из того, что $|\mathcal{E}(v_\delta)| \to 0$ почти всюду на A, следовательно $|\mathcal{E}(v_\delta)| \to 0$ по мере. Итак, $|\sigma| \leqslant \tau^*$ при $|\mathcal{E}(v)| = 0$.

Положим

$$B = Q_T \cap \{\mathcal{E}(v) \neq 0\}.$$

В силу выбора σ^δ имеем что $\sigma^\delta \to \sigma$ почти всюду на B. Для любого измеримого множества $Q' \subset Q_T$ и $\chi_{ij} \in L_\infty(Q_T)$ такого, что $\chi_{ij}|_{Q_T \setminus B} = 0$ имеем

$$\left| \int\limits_{Q'} \sigma^\delta : \chi dxdt \right| \leqslant \|\chi\|_{L_\infty(Q_T)} (\mathrm{mes}(Q'))^{1/2} (1 + \|v_d elta\|_{L_2(0,T;V^1)}).$$

Следовательно, по теореме Витали

$$\int\limits_B \sigma^\delta : \chi dxdt \to \int\limits_B \sigma : \chi dxdt.$$

С другой стороны $\sigma^\delta \to \sigma$ слабо в $L_2(Q_T)$. Отсюда и следует выполнение реологического соотношения при $|\mathcal{E}(v)| \neq 0$. Далее, принимая во внимание априорные оценки на функцию v_δ и условия $(\Psi 1) - (\Psi 4)$, мы без ограничения общности можем предположить, что существует $f_* \in L_2(0, T; V^0)$ такое, что

$$f_\delta \to f_* \in \Psi(v_*) \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Таким образом, переходя к пределу при $\delta \to 0$ в каждом из интегралов, получим, что тройка (v, σ, f) удовлетворяет при почти всех $t \in (0,T)$ для любого $\varphi \in V^2$ равенству

$$\langle v', \varphi\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\Omega} \sigma : \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi\rangle,$$

реологическому соотношению

$$\begin{aligned} \sigma = 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|} \quad &\text{для} \quad |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \\ |\sigma| \leqslant \tau^* \quad &\text{для} \quad |\mathcal{E}(v)| = 0, \end{aligned}$$

и условию обратной связи

$$f \in \Psi(v).$$

§7. Доказательство теоремы 1.2

В силу теоремы 1.1 множество решений рассматриваемой задачи - Σ не пусто. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $(v_l, \sigma_l, f_l) \in \Sigma$ такая что

$$\lim_{l\to\infty} \Phi(v_l, \sigma_l, f_l) = \inf_{(v,\sigma,f)\in\Sigma} \Phi(v, \sigma, f).$$

Отметим, что в силу доказательства теоремы 1.1 для решений имеют место следующие оценки:

$$\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C(v_0, f, \Omega), \qquad \|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)} \leqslant C(v_0, f, \Omega),$$
$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant C(v_0, f, \Omega), \|v\|_{L_\alpha(0,T;W_2^{1+\beta}(\Omega)^n)} \leqslant C(v_0, f, \Omega).$$

Здесь $0 < \beta < \frac{1}{2}$ и $1 < \alpha < 2$ некоторые константы, зависящие только от v_0, f, и Ω.

Отсюда как и ранее без ограничения общности и в случае необходимости, переходя к подпоследовательности, мы можем предположить, что

$$v_l \to v_* \ \text{ слабо в } L_2(0,T;V^1); \quad v_l \to v_* \ \text{ сильно в } L_2(0,T;L_4(\Omega)^n);$$
$$v_l \to v_* \ \text{ сильно в } L_r(0,T;V^1); \quad v_l \to v_*' \ \text{ слабо в } L_2(0,T;V^{-2});$$
$$\sigma_l \to \sigma_* \ \text{ слабо в } L_2(0,T;L_2(\Omega)^{n^2});$$
$$f_l \to f_* \in \Psi(f_*) \ \text{ сильно в } L_2(0,T;V^0).$$

Тогда как и ранее имеем следующие сходимости

$$\langle v_l', \varphi\rangle \to \langle v_*, \varphi\rangle \quad \text{при} \quad l \to 0;$$

$$\mu \int\limits_\Omega \nabla(v_l) : \nabla\varphi dx \to \mu \int\limits_\Omega \nabla v_* : \nabla\varphi dx \quad \text{при} \quad l \to 0;$$

$$\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (v_l)_i (v_l)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \to \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \quad \text{при} \quad l \to 0;$$

$$\int\limits_\Omega \sigma_l : \mathcal{E}(\varphi) dx \to \int\limits_\Omega \sigma_* : \mathcal{E}(\varphi) dx \quad \text{при} \quad l \to 0.$$

Аналогично предыдущему, переходя к пределу в реологическом соотношении (в силу слабой и поточечной сходимостей), получаем, что предельная тройка функций $(v_*, \sigma_*, f_*) \in \Sigma$. В силу второго условия на функционал качества Φ имеем

$$\Phi(v_*, \sigma_*, f_*) \leqslant \inf_{(v,\sigma,f)\in\Sigma} \Phi(v, \sigma, f).$$

Следовательно (v_*, σ_*, f_*) — требуемое решение.

Список литературы

1. V. V. Shelukhin, *Bingham Viscoplastic as a Limit of Non-Newtonian Fluids.* — J. Math. Fluid Mechanic **4**, No. 2 (2002), 109–127.
2. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980.
3. J. U. Kim, *On the Initial-Boundary Value Problem for a Bingham Fluid in a Three Dimensional Domain.* — Trans. Amer. Math. Soc. **304**, No. 2 (1987), 751–770.
4. Г. А. Серегин, *О динамической системе, порожденной двумерными уравнениями движения среды Бингама.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ, **188** (1991), 128-–142.
5. J. L. Lions, *Optimal control of systems governed by partial differential equations*, Springer, Berlin, 1971.
6. F. Abergel, R. Temam, *On Some Control Problems in Fluid Mechanics.* — Theor. Comput. Fluid Dyn. **1**, No. 6 (1990), 303–325.
7. M. D. Gunzburger, L. Hou, T. P. Svobodny, *Boundary velocity control of incompressible flow with an application to viscous drag reduction.* — SIAM J. Control Optim **30**, No. 1 (1992), 167–181.
8. А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Университетская серия, **5**, Научная книга, Новосибирск, 1999.
9. H. Choi, R. Temam, P. Moin, J. Kim, *Feedback control for unsteady flow and its application to Burgers equation.* — J. Fluid Mech. **253** (1993), 509–543.

10. V. V. Obukhovskii, P. Zecca, V. G. Zvyagin, *Optimal feedback control in the problem of the motion of a viscoelastic fluid.* — Topological Methods in Nonlinear Analysis, **23**, No. 2 (2004), 323–337.
11. V. G. Zvyagin, M. V. Turbin, *Optimal Feedback Control in the Mathematical Model of Low Concentrated Agueous Polymer Solutions.* — J. Optimization Theory and Applications **148**, No. 1 (2011), 146–163.
12. V. G. Zvyagin, M. Yu. Kuz'min, *On an optimal control problem in the Voight model of the motion of a viscoelastic fluid.* — J. Math. Sci. **149**, No. 5 (2008), 1618–1627.
13. V. Zvyagin, V. Obukhovskii, A. Zvyagin, *On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems.* — J. Fixed Point Theory and Applications **16** (2014), 27—82.
14. А. В. Звягин, *Задача оптимального управления с обратной связью для математической модели движения слабо концентрированных водных полимерных растворов с объективной производной.* — Сиб. матем. журнал **54**, No. 4 (2013), 807—825.
15. А. В. Звягин, *Оптимальное управление с обратной связью для термовязкоупругой модели движения жидкости Фойгта.* — Докл. Академии Наук **468**, No. 3 (2016), 251—253.
16. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, П. Е. Соболевский, Е. И.Пустыльник, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1970.
17. R. Temam, *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*, CBM-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1983.
18. V. G. Zvyagin, *Topological Approximation Approach to Study of Mathematical Problems of Hydrodynamics.* — J. Math. Sci. **201**, No. 6 (2014), 830—858.
19. В. Г. Звягин, М. В. Турбин, *Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред*, КРАСАНД, М., 2012.
20. J. L. Lions, E. Magenes, *Problemés aux limites non homogénes et applications*, **1**, Dunod, Paris, 1968.
21. Р. Темам, *Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1987.

Zvyagin V. G., Zvyagin A. V., Turbin M. V. Optimal feedback control problem for the Bingam model with periodical boundary conditions on spatial variables.

The paper is devoted to an optimal feedback control problem for Bingham model with periodic conditions on spatial variables. It is given an interpretation of the considered feedback control problem in the form of an operator inclusion with a multi-valued right-hand side. On the base of the topological approximation approach to the study of hydrodynamics problems and the degree theory of multivalued vector fields, the solutions existence of this inclusion is proved. Then it is proved that among the

solutions of the considered problem there is a solution which minimizes to a given quality functional.

ФГБОУ ВО
"Воронежский государственный университет",
Университетская пл. 1,
394018 Воронеж, Россия
E-mail: zvg_vsu@mail.ru
E-mail: zvyagin.a@mail.ru
E-mail: mrmike@mail.ru

Поступило 29 ноября 2018 г.