Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 477, 2018 г.

Г. И. Бижанова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**Посвящается профессору В. А. Солонникову
по случаю его 85-летия**

Работа посвящена исследованию задачи Коши для параболического уравнения с сингулярными по t коэффициентами при первых производных по пространственным переменным. К таким задачам сводятся задачи для параболических уравнений в областях с подвижными или свободными (неизвестными) границами, когда требуемая гладкость решений выше гладкости границы области.

Рассмотрим, к примеру, одномерную задачу в области $\Omega(t) := \{x : bt^\gamma < x < \infty\}$, $0 < \gamma < 1,\ b > 0$,

$$\partial_t u - a\partial_x^2 u = f(x,t) \quad \text{в } \Omega(t),\ 0 < t < T,$$
$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{в } \Omega(0), \quad u\big|_{x=bt^\gamma} = \varphi(t),\ 0 < t < T.$$

После замены переменной $y = x - bt^\gamma,\ t = t_1$ задача сведется к задаче с неизвестной функцией $u(y+bt_1^\gamma, t_1) =: v(y,t_1)$ в области $(0,\infty)$

$$\partial_{t_1} v - a\partial_y^2 v - b\gamma \frac{1}{t^{1-\gamma}}\partial_y v = f(y - bt_1^{1-\gamma}, t_1),\ y \in (0,\infty),\ t_1 \in (0,T),$$
$$v\big|_{t=0} = u_0(y), \quad y \in (0,\infty),\ v\big|_{y=0} = \varphi(t_1),\ t_1 \in (0,T),$$

где $1-\gamma \in (0,1)$.

Мы видим, что к задачам для параболических уравнений с сингулярными по t коэффициентами при первых производных по пространственным переменным сводятся краевые задачи в нецилиндрических областях. Исследование в классах гладких функций задач в нецилиндрических областях с подвижными границами, гладкость которых

Ключевые слова: параболические уравнения с сингулярными коэффициентами, задача Коши, весовое пространство Гельдера, существование, единственность, оценки решения.

Работа выполнена по гранту No. AP05133898 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

меньше гладкости решений, было начато М. Жевре [1]. Л. И. Камыниным были получены результаты о разрешимости одномерных краевых задач в областях с границей, удовлетворяющей условию Жевре [2, 3]. В работах Е. А. Бадерко [4–6] были продолжены исследования одномерных и многомерных краевых задач в областях с границами меньшей гладкости по сравнению с гладкостью решения в пространствах Гельдера. Следует отметить, что все исследования в указанных работах [1–6] проводились методами теории тепловых потенциалов и сведением задач к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода.

В. П. Михайловым [7] было доказано, что если граница области задана уравнением $x = -\sqrt{t}\ln t,\ \ t \in (0,1)$, то решение задачи для параболического уравнения с такой границей не будет единственным. В этом случае после замены переменной $y = x + \sqrt{t}\ln$ уравнение теплопроводности $\partial_t u - a\partial_x^2 u = 0$, $x \in (-\sqrt{t}\ln t, \infty)$ примет вид

$$\partial_t v - a\partial_y^2 v + (\frac{1}{2\sqrt{t}}\ln t + \frac{1}{\sqrt{t}})\partial_y v = 0, \quad y \in (0,\infty).$$

В настоящей работе доказана однозначная разрешимость задачи Коши (1), (2) в весовом пространстве Гельдера, причем в уравнении (1) $\beta_i \in (0, 1/2],\ i = 1, \ldots, n$. Для этого построено решение задачи в явном виде, затем устанавливается теорема 2 для задачи (1), (2) с $\beta_1 = \ldots = \beta_n = \beta$, при помощи которой доказывается теорема 1.

Пусть $D := \mathbb{R}^n,\ n \geqslant 1,\ D_T := D \times (0,T),\ x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Через $C_1, C_2, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные.

Рассмотрим задачу Коши для параболического уравнения с сингулярными по t коэффициентами при первых производных по пространственным переменным

$$\partial_t u - a\Delta u - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{t^{\beta_i}}\partial_{x_i} u = f(x,t) \text{ в } D_T, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \text{ в } D, \tag{2}$$

где $a, b_1, \ldots, b_n$ – постоянные коэффициенты, $a > 0$, $\beta_i \in (0, 1/2]$, $i = 1, \ldots, n$.

В одномерном случае здесь и далее имеем уравнение в виде

$$\partial_t u - a\partial_x^2 u - \frac{b}{t^\beta}\partial_x u = f(x,t).$$

Задачу (1), (2) будем изучать в классическом и весовом пространствах Гельдера $C_{x\ \ t}^{l,\,l/2}(\overline{\Omega}_T)$ и $C_{\beta}^{\,2+\alpha}(\Omega_T)$, l – нецелое положительное число, $\alpha \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$.

Нормы $|u|_{\Omega_T}^{(l)}$ и $|u|_{\beta,\Omega_T}^{(2+\alpha)}$ в этих пространствах определяются в виде

$$
\begin{aligned}
|u|_{\Omega_T}^{(l)} = &\sum_{2m_0+|m|=0}^{[l]} |\partial_t^{m_0}\partial_x^m u|_{\Omega_T} \\
&+ \sum_{2m_0+|m|=[l]} \Big([\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} + [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)} \Big) \\
&+ \begin{cases} \sum\limits_{2m_0+|m|=[l]-1} [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]_{t,\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}, & [l] \geqslant 1, \\ 0, & [l] = 0, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $\alpha = l - [l] \in (0,1)$, $m = (m_1, \ldots, m_n)$, m_i – положительные числа или 0, $i = 0, 1, \ldots, n$, $|m| = m_1 + \ldots + m_n$,

$$
|v|_{\Omega_T} = \max_{(x,t)\in\overline{\Omega}_T} |\,v|, \ \ [v]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} = \max_{(x,t),(z,t)\in\overline{\Omega}_T} \frac{\big|v(x,t)-v(z,t)\big|}{|x-z|^\alpha},
$$

$$
[v]_{t,\Omega_T}^{(\alpha)} = \max_{(x,t),(x,t_1)\in\overline{\Omega}_T} \frac{\big|v(x,t)-v(x,t_1)\big|}{|t-t_1|^\alpha}
$$

и

$$
\begin{aligned}
|u|_{\beta,\Omega_T}^{(2+\alpha)} = &\sum_{|m|=0}^{2} |D_x^m u|_{\Omega_T} + \sup_{t\leqslant T} t^\beta |\partial_t u|_{\Omega_t'} \\
&+ \sum_{|m|=2} \Big([D_x^m u]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} + [D_x^m u]_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)} \Big) + \sup_{t\leqslant T} t^\beta [D_t u]_{x,\Omega_t'}^{(\alpha)} \\
&+ \sup_{t\leqslant T} t^{\beta+\alpha/2} [\partial_t u]_{t,\Omega_t'}^{(\alpha/2)} + \sum_{|m|=1} \sup_{t\leqslant T} t^\beta [D_x^m u]_{\Omega_t'}^{(\frac{1+\alpha}{2})},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\Omega_t' = \Omega \times (t/2, t)$.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. *Пусть* $\beta_i \in (0, 1/2]$, $i = 1, \ldots, n$, $\beta = \max(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha \in (0,1)$.

Тогда для любых функций

$$
u_0(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{D}), \quad f(x,t) \in C_{x\ \ t}^{\,\alpha,\,\alpha/2}(\overline{D}_T)
$$

задача (1), (2) *имеет единственное решение*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

такое, что $u_1(x,t) \in C^{\,2+\alpha}_{\,\beta}(D_T)$, $u_2(x,t) \in C^{\,2+\alpha,1+\alpha/2}_{\,x\quad\ \ t}(\overline{D}_T)$ *и справедливы оценки*

$$|u_1|^{(2+\alpha)}_{\beta,D_T} \leqslant C_1 |u_0|^{(2+\alpha)}_{D} \tag{5}$$

$$|u_2|^{(2+\alpha)}_{D_T} \leqslant C_2 |f|^{(\alpha)}_{D_T}, \tag{6}$$

где u_1 *– решение задачи* (1), (2) *с* $f(x,t) = 0$, u_2 *– решение задачи* (1), (2) *с* $u_0(x) = 0$.

Замечание 1. В теореме 1 функция $u_2(x,t)$ принадлежит классическому пространству Гельдера $C^{\,2+\alpha,1+\alpha/2}_{\,x\quad\ \ t}(\overline{D}_T)$. Это связано с тем, что $u_2|_{t=0} = 0$, $\partial_{x_i} u_2|_{t=0} = 0$, $\partial^2_{x_i x_j} u_2|_{t=0} = 0$, $i,j = 1,\dots,n$, в отличие от $u_1(x,t)$.

Получим решение задачи (1), (2) в явном виде.

Лемма 1. *Пусть* $\beta_i \in (0,1)$, $i = 1,\dots,n$.

Решение задачи (1), (2) *имеет вид*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{7}$$

$$u_1(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi)\Gamma(x - \xi + (c_1 t^{1-\beta_1},\dots,c_n t^{1-\beta_n}),t)\,d\xi, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} u_2(x,t) = &\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi,\tau) \\ &\times\Gamma(x-\xi+(c_1(t^{1-\beta_1}-\tau^{1-\beta_1}),\dots,c_n(t^{1-\beta_n}-\tau^{1-\beta_n})),t)\,d\xi, \end{aligned} \tag{9}$$

где $c_i = \frac{b_i}{1-\beta_i}$, $i = 1,\dots,n$,

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{a\pi t})} e^{-\frac{x^2}{4at}}$$

– есть фундаментальное решение уравнения теплопроводности $\partial_t u - a\Delta u = 0$.

Доказательство. К задаче (1), (2) применим интегральное преобразование Фурье по $x = (x_1,\dots,x_n)$ [8]

$$F[u] = \widetilde{u}(s,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,t) e^{-ixs} dx, \quad s = (s_1,\dots,s_n),$$

тогда мы получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\widetilde{u}\,' + \Big(as^2 - i\sum_{i=1}^{n} b_i t^{1-\beta_i}\Big)\widetilde{u} = \widetilde{f}(s,t),\ t>0, \qquad \widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{u}_0(s). \tag{10}$$

Решение задачи (10) имеет вид

$$\widetilde{u}(s,t) = \widetilde{u}_0(s)e^{-as^2t+i\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_k}{1-\beta_k}t^{1-\beta_k}s_k} + \int\limits_0^t f(s,\tau)e^{-as^2(t-\tau)}e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_k}{1-\beta_k}(t^{1-\beta_k}-\tau^{1-\beta_k})s_k}\,d\tau.$$

После применения формул обратного преобразования Фурье к $\widetilde{u}$

$$F^{-1}[e^{-as^2t}] = \frac{1}{(2\sqrt{a\pi t})^n}e^{-\frac{x^2}{4at}} = \Gamma(x,t),$$

$$F^{-1}[\widetilde{f}(s)e^{ids}] = f(x+d), \quad f(x) = F^{-1}[\widetilde{f}(s)], \quad d=(d_1,\dots,d_n),$$

мы получим решение задачи (1), (2) в виде (7)–(9).

Подставив функции (8), (9) в уравнение (1) и условие (2), мы убедимся, что формула (7) дает решение задачи (1), (2). □

Для доказательства теоремы 1 сначала рассмотрим задачу

$$\partial_t u - a\Delta u - \frac{c}{t^\beta}\nabla^T u = f(x,t) \quad \text{в } D_T, \qquad u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{в } D, \tag{11}$$

где $c=(c_1,\dots,c_n)$, $\nabla^T = \mathrm{colon}(\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n})$ – вектор-столбец.

Теорема 2. *Пусть* $\beta\in(0,1/2]$, $\alpha\in(0,1)$.

Тогда для любых функций

$$u_0(x)\in C^{2+\alpha}(\overline{D}), \quad f(x,t)\in C_{x\ \ t}^{\alpha,\,\alpha/2}(\overline{D}_T)$$

задача (11) *имеет единственное решение*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

такое, что

$$u_1(x,t)\in C_{\beta}^{2+\alpha}(D_T), \quad u_2(x,t)\in C_{x\ \ \ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_T)$$

и справедливы оценки

$$|u_1|^{(2+\alpha)}_{\beta,D_T} \leqslant C_3|u_0|^{(2+\alpha)}_{D} \tag{12}$$

$$|u_2|^{(2+\alpha)}_{D_T} \leqslant C_4|f|^{(\alpha)}_{D_T}. \tag{13}$$

Положив в формулах (8), (9) $\beta_i = \beta$, $i = 1, \dots, n$, мы получим решение задачи (11)

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

$$u_1(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} u_0(\xi)\Gamma(x-\xi+ct^{1-\beta},t)\,d\xi, \tag{14}$$

$$u_2(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}_n} f(\xi,\tau)\Gamma(x-\xi+c(t^{1-\beta}-\tau^{1-\beta}),t)\,d\xi. \tag{15}$$

В формулах (14), (15) применим подстановку

$$y = x + ct^{1-\beta},$$

тогда будем иметь

$$u_1(y-ct^{1-\beta},t) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} u_0(\xi)\Gamma(y-\xi,t)\,d\xi =: v_1(y,t), \tag{16}$$

$$\begin{aligned} u_2(y-ct^{1-\beta},t) &= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}_n} f(\xi,\tau)\Gamma(y-\xi-c\tau^{1-\beta},t-\tau)\,d\xi \\ &= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}_n} f(\eta-c\tau^{1-\beta},\tau)\Gamma(y-\eta,t-\tau)d\eta =: v_2(y,t) \end{aligned} \tag{17}$$

в интеграле (17) мы произвели также замену переменной интегрирование $\eta = \xi + c\tau^{1-\beta}$ и получили функцию $f(\eta - c\tau^{1-\beta},\tau)$.

Лемма 2. *Пусть* $\beta \in (0,1/2]$, $f(x,t) \in C^{\alpha,\alpha/2}_{x\ \ t}(\overline{D}_T)$.

Тогда $f(y-ct^{1-\beta},t) =: f_1(y,t) \in C^{\alpha,\alpha/2}_{y\ \ t}(\overline{D}_T)$ *и*

$$|f_1|^{(\alpha)}_{D_T} \leqslant C_5|f(y,t)|^{(\alpha)}_{D_T}. \tag{18}$$

Доказательство. Норма функции $f_1(y,t)$ в $C^{\alpha,\alpha/2}_{y\ \ t}(\overline{D}_T)$ определяется формулой (3)

$$|f_1|^{(\alpha)}_{D_T} := |f_1|_{D_T} + [f_1]^{(\alpha)}_{y,D_T} + [f_1]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}. \tag{19}$$

Очевидно,

$$|f_1|_{D_T} = |f(y-ct^{1-\beta},t)|_{D_T} = |f(y,t)|_{D_T}, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}|f_1(y,t)-f_1(\xi,t)| &= |f(y-ct^{1-\beta},t)-f(\xi-ct^{1-\beta},t)|\\ &\leqslant [f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}|y-\xi|^{\alpha}\end{aligned}$$

и

$$[f_1]^{(\alpha)}_{y,D_T} \leqslant [f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}. \tag{21}$$

Оценим разность

$$\begin{aligned}|\Delta| = |f_1(y,t)-f_1(y,t_1)| \leqslant{}& |f(y-ct^{1-\beta},t)-f(y-ct_1^{1-\beta},t)|\\ &+|f(y-ct_1^{1-\beta},t)-f(y-ct_1^{1-\beta},t_1)|.\end{aligned}$$

Пусть $t_1<t$, тогда

$$|\Delta| \leqslant C_6\big([f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}(t^{1-\beta}-t_1^{1-\beta})^{\alpha} + [f(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}(t-t_1)^{\alpha/2}\big).$$

Так как

$$(t^{1-\beta}-t_1^{1-\beta})^{\alpha} \leqslant C_7(t-t_1)^{\alpha(1-\beta)} \leqslant C_7(t-t_1)^{\alpha/2}\, t^{\alpha(1/2-\beta)},$$

то

$$\begin{aligned}|\Delta| &= |f_1(y,t)-f_1(y,t_1)|\\ &\leqslant C_8\big([f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} + [f(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\big)(t-t_1)^{\alpha/2}\end{aligned}$$

и

$$[f_1]^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \leqslant C_8\big([f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} + [f(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\big). \tag{22}$$

Применив соотношения (20)–(22) в формуле (19), мы получим оценку (18) и лемму 2. □

Доказательство теоремы 2. Непосредственными оценками потенциалов (14), (15), как в [9], мы можем доказать теорему. Но мы поступим по-другому.

Мы представили решение задачи (11) в виде (16), (17).

Рассмотрим функцию $v_1(y,t)$ – потенциал (16). Легко видеть, что $v_1(y,t)$ является решением задачи Коши

$$\partial_t v_1 - a\Delta_y v_1 = 0 \quad \text{в} \quad D_T,\ \ v_1|_{t=0} = u_0(y) \text{ в } D,$$

но тогда [9] $v_1(y,t) \in C^{\,2+\alpha,1+\alpha/2}_{\,y\quad t}(\overline{D}_T)$ и

$$|v_1(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T} \leqslant C_9 |u_0|^{(2+\alpha)}_{D}. \tag{23}$$

После замены $y = x + ct^{1-\beta}$ в формуле (14) мы обозначили

$$u_1(y - ct^{1-\beta}, t) = v_1(y,t) \tag{24}$$

Соотношение (24) можем записать в виде

$$u_1(x,t) = v_1(x + ct^{1-\beta}, t).$$

Легко видеть, что

$$|u_1(x,t)|_{D_T} = |v_1(x + ct^{1-\beta}, t)|_{D_T} = |v_1(y,t)|_{D_T},$$

$$\begin{aligned} |\partial_{x_i} u_1(x,t)|_{D_T} &= |\partial_{x_i} v_1(x + ct^{1-\beta}, t)|_{D_T} = |\partial_{y_i} v_1(y,t)|_{D_T}, \\ |\partial^2_{x_i x_j} u_1(x,t)|_{D_T} &= |\partial^2_{x_i x_j} v_1(x + ct^{1-\beta}, t)|_{D_T} \\ &= |\partial^2_{y_i y_j} v_1(y,t)|_{D_T} \end{aligned} \tag{25}$$

и

$$\begin{aligned} [\partial^2_{x_i x_j} u_1(x,t)]^{(\alpha)}_{x,D_T} &= [\partial^2_{x_i x_j} v_1(x + ct^{1-\beta}, t)]^{(\alpha)}_{x,D_T} \\ &= [\partial^2_{y_i y_j} v_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}, \quad i,j = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{26}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие оценки при $t/2 \leqslant t_1 < t$, $\beta \in (0, 1/2]$:

$$(t^{1-\beta} - t_1^{1-\beta})^{\alpha} \leqslant (t - t_1)^{\alpha/2 + \alpha(1/2-\beta)}, \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_1^{\beta}} - \frac{1}{t^{\beta}} &= \beta \int_{t_1}^{t} \frac{d\tau}{\tau^{1+\beta}} = \beta \int_{t_1}^{t} \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha/2}\, \tau^{\alpha/2+\beta}} \\ &\leqslant C_{10} \frac{1}{t^{\beta+\alpha/2}} (t - t_1)^{\alpha/2}, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} t^{1-\beta} - t_1^{1-\beta} &= (1-\beta) \int_{t_1}^{t} \frac{\tau^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\tau^{\beta + \frac{1-\alpha}{2}}} d\tau \\ &\leqslant C_{11} \frac{1}{t^{\beta}} (t - t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}} t^{\frac{1-\alpha}{2}}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$t^{1-\beta} - t_1^{1-\beta} \leqslant C_{11} (t - t_1)^{\alpha/2}\, t^{1/2 - \beta + \frac{1-\alpha}{2}}. \tag{30}$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}
&\partial^2_{x_ix_j}u_1(x,t)-\partial^2_{x_ix_j}u_1(x,t_1)\\
&\quad=\big(\partial^2_{x_ix_j}v_1(x+ct^{1-\beta},t)-\partial^2_{x_ix_j}v_1(x+ct_1^{1-\beta},t)\big)\\
&\qquad+\big(\partial^2_{x_ix_j}v_1(x+ct_1^{1-\beta},t)-\partial^2_{x_ix_j}v_1(x+ct_1^{1-\beta},t_1)\big).
\end{aligned}\tag{31}$$

Учитывая, что $v_1(y,t)\in C^{\,2+\alpha,1+\alpha/2}_{\;y\quad\;\; t}(\overline{D}_T)$, и привлекая неравенство (27), мы получим

$$\begin{aligned}
&|\partial^2_{x_ix_j}u_1(x,t)-\partial^2_{x_ix_j}u_1(x,t_1)|\\
&\leqslant C_{12}[\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)]^{\alpha}_{y,D_T}(t^{1-\beta}-t_1^{1-\beta})^{\alpha}\\
&\quad+C_{13}[\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)]^{\alpha/2}_{t,D_T}(t-t_1)^{\alpha/2}\\
&\leqslant C_{14}\Big([\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}+[\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\Big)(t-t_1)^{\alpha/2},
\end{aligned}\tag{32}$$

$i,j=1,\dots,n$, и

$$[\partial^2_{x_ix_j}u_1]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\leqslant C_{15}\Big([\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}+[\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\Big).\tag{33}$$

Оценим производную

$$\begin{aligned}
&\partial_tu_1(x,t)=\partial_tv_1(x+ct^{1-\beta},t)\\
&=(1-\beta)\frac{1}{t^{\beta}}c\nabla_x^Tv_1(x+ct^{1-\beta},t)+\partial_{t^*}v_1(x+ct^{1-\beta},t^*)|_{t^*=t}
\end{aligned}\tag{34}$$

и ее константы Гельдера.

Из (34) сразу получим оценки

$$|\partial_tu_1(x,t)|\leqslant C_{16}\Big(\frac{1}{t^{\beta}}\sum_{i=1}^{n}|\partial_{y_i}v_1(y,t)|_{D_t}+|\partial_tv_1(y,t)|_{D_t}\Big)\tag{35}$$

и

$$\sup_{t\leqslant T}t^{\beta}|\partial_tu_1|_{D_t'}\leqslant C_{17}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\partial_{y_i}v_1(y,t)|_{D_T}+|\partial_tv_1(y,t)|_{D_T}\Big),\tag{36}$$

где $D_t'=D\times(t/2,t)$. Составим разность, учитывая формулу (34),

$$\begin{aligned}
\Delta_1&:=\partial_tu_1(x,t)-\partial_tu_1(x,t_1)\\
&=\big(\partial_{t^*}v_1(x+ct^{1-\beta},t^*)|_{t^*=t}-\partial_{t^*}v_1(x+ct_1^{1-\beta},t^*)|_{t^*=t}\big)\\
&\quad+\big(\partial_{t^*}v_1(x+ct_1^{1-\beta},t^*))|_{t^*=t}-\partial_{t^*}v_1(x+ct_1^{1-\beta},t^*))|_{t^*=t_1}\big)
\end{aligned}$$

$$+ (1-\beta)\big(\frac{1}{t^\beta} - \frac{1}{t_1^\beta}\big) c\nabla_x^T v_1(x+ct^{1-\beta}, t)$$

$$+ \frac{1}{t_1^\beta}\big(c\nabla_x^T v_1(x+ct^{1-\beta}, t) - c\nabla_x^T v_1(x+ct_1^{1-\beta}, t)\big)$$

$$+ \frac{1}{t_1^\beta}\big(c\nabla_x^T v_1(x+ct_1^{1-\beta}, t) - c\nabla_x^T v_1(x+ct_1^{1-\beta}, t_1)\big) =: \sum_{i=1}^{5} \Delta_{1i}. \quad (37)$$

Принимая во внимание неравенства (27), (28), (30) и учитывая, что $v_1(y,t) \in C^{\,2+\alpha, 1+\alpha/2}_{\;y \quad\; t}(\overline{D}_T)$ и $\beta \in (0, 1/2]$, будем иметь

$$|\Delta_{11}| \leqslant C_{18} [\partial_t v_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} (t-t_1)^{\alpha/2} t^{\alpha(1/2-\beta)},$$

$$|\Delta_{12}| \leqslant C_{19} [\partial_t v_1(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T} (t-t_1)^{\alpha/2},$$

$$|\Delta_{13}| \leqslant C_{20} \frac{1}{t^{\beta+\alpha/2}} \sum_{i=1}^{n} |\partial_{y_i} v_1(y,t)|_{D_t} (t-t_1)^{\alpha/2},$$

$$|\Delta_{14}| \leqslant C_{21} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{t^\beta} |\partial^2_{y_i y_j} v_1(y,t)| (t-t_1)^{\alpha/2}\, t^{\frac{1-\alpha}{2}+(1/2-\beta)}$$

$$|\Delta_{15}| \leqslant C_{22} \sum_{i=1}^{n} [\partial_{y_i} v_1(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T} (t-t_1)^{\alpha/2}\, t^{1/2-\beta}.$$

Применив установленные оценки в соотношении (37)

$$|\partial_t u_1(x,t) - \partial_{t_1} u_1(x,t_1)| \leqslant C_{23}\big([\partial_t v_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} + [\partial_t v_1(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\big)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{t^{\beta+\alpha/2}} |\partial_{y_i} v_1(y,t)|_{D_t} + [\partial_{y_i} v_1(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T}\Big) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{t^\beta} |\partial^2_{y_i y_j} v_1(y,t)| t^{\frac{1-\alpha}{2}+1/2-\beta}\Big)(t-t_1)^{\alpha/2}, \quad (38)$$

получим

$$\sup_{t\leqslant T} t^{\beta+\alpha/2} [\partial_t u_1]^{(\alpha/2)}_{t,D'_t} \leqslant C_{24} |v_1(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T}. \quad (39)$$

Сформируем разность, приняв во внимание формулу (34),

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \partial_t u_1(x,t) - \partial_t u_1(z,t) = \partial_t v_1(x+ct^{1-\beta},t) - \partial_t v_1(z+ct^{1-\beta},t)\\ &= (1-\beta)\frac{1}{t^\beta}\big(c\nabla_x^T v_1(x+ct^{1-\beta},t) - c\nabla_z^T v_1(z+ct^{1-\beta},t)\big)\\ &\quad + \big(\partial_{t^*} v_1(x+ct^{1-\beta},t^*) - \partial_{t^*} v_1(z+ct^{1-\beta},t^*)\big)|_{t^*=t}\end{aligned}$$

и оценим ее

$$\begin{aligned}|\Delta_2| &\leqslant \Big((1-\beta)\frac{1}{t^\beta}\frac{|c\nabla_x^T v_1(x+ct^{1-\beta},t) - c\nabla_z^T v_1(z+ct^{1-\beta},t))|^\alpha}{|x-z|^\alpha}\\ &\qquad\times\big|c\nabla_x^T v_1(x+ct^{1-\beta},t) - c\nabla_z^T v_1(z+ct^{1-\beta},t)\big|^{1-\alpha}\\ &\qquad+[\partial_t v_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}\Big)|x-z|^\alpha\\ &\leqslant C_{25}\Big(\frac{1}{t^\beta}\big(\sum_{i,j=1}^n|\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)|_{D_t}\big)^\alpha\big(\sum_{i=1}^n|\partial_{y_i}v_1(y,t)|_{D_t}\big)^{1-\alpha}\\ &\qquad+[\partial_t v_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}\Big)|x-z|^\alpha.\end{aligned}$$

Применим неравенство Юнга

$$|ab| \leqslant \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q,\ \ 1/p+1/q=1,\ \ p>1, \tag{40}$$

с $1/p=\alpha,\ \ 1/q=1-\alpha$, тогда

$$\begin{aligned}|\Delta_2| \leqslant C_{26}\Big(\frac{1}{t^\beta}\Big(\sum_{i,j=1}^n|\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)|_{D_t}+\sum_{i=1}^n|\partial_{y_i}v_1(y,t)|_{D_t}\Big)\\ +[\partial_t v_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}\Big)|x-z|^\alpha,\end{aligned} \tag{41}$$

отсюда получим

$$\begin{aligned}\sup_{t\leqslant T} t^\beta[\partial_t u_1]^{(\alpha)}_{x,D_t'} \leqslant C_{27}\Big(\sum_{i,j=1}^n|\partial^2_{y_iy_j}v_1(y,t)|_{D_T}\\ +\sum_{i=1}^n|\partial_{y_i}v_1(y,t)|_{D_T}+[\partial_t v_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}\Big).\end{aligned} \tag{42}$$

И наконец, оценим разность

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \partial_{x_i} u_1(x,t) - \partial_{x_i} u_1(x,t_1)\\ &= \big(\partial_{x_i} v_1(x+ct^{1-\beta},t) - \partial_{x_i} v_1(x+ct_1^{1-\beta},t)\big)\\ &\quad + \big(\partial_{x_i} v_1(x+ct_1^{1-\beta},t) - \partial_{x_i} v_1(x+ct_1^{1-\beta},t_1)\big),\end{aligned}$$

используя неравенство (29),

$$\begin{aligned}|\Delta_3| \leqslant C_{28}\Big(&\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{t^\beta}|\partial^2_{y_iy_j} v_1(y,t)|_{D_t}\, t^{\frac{1-\alpha}{2}}\\ &+ [\partial_{y_i} v_1(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_t}\Big)(t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}}.\end{aligned} \tag{43}$$

Отсюда будем иметь

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sup_{t\leqslant T} t^\beta[\partial_{x_i} u_1]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{D_T}\\ &\leqslant C_{29}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}|\partial^2_{y_iy_j} v_1(y,t)|_{D_T} + \sum_{i=1}^{n}[\partial_{y_i} v_1(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T}\Big).\end{aligned} \tag{44}$$

Применяя оценки (25), (26), (33), (36), (39), (42), (44), а также (23) для функции $v_1(y,t)$, мы получим оценку нормы (4) функции $u_1(x,t)$

$$|u_1|^{(2+\alpha)}_{\beta,D_T} \leqslant C_{30}|v_1(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T} \leqslant C_{31}|u_0|^{(2+\alpha)}_{D_T},$$

т.е. оценку (12) теоремы 2.

Докажем оценку (13) для функции

$$u_2(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi,\tau)\Gamma(x-\xi+c(t^{1-\beta}-\tau^{1-\beta}),t-\tau)\,d\xi$$

которую мы записали после замены $y = x + ct^{1-\beta}$ в виде (17)

$$u_2(y-ct^{1-\beta},t) =: v_2(y,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} f(\eta - c\tau^{1-\beta},\tau)\Gamma(y-\eta,t-\tau)d\eta, \tag{45}$$

где

$$f(y-ct^{1-\beta},t) \in C^{\alpha,\alpha/2}_{y\ \ t}(\overline{D}_T)$$

и

$$|f(y-ct^{1-\beta},t)|^{(\alpha)}_{D_T} \leqslant C_3|f(x,t)|^{(\alpha)}_{D_T}$$

согласно лемме 2. Но тогда [9] $v_2(y,t) \in C^{\,2+\alpha,1+\alpha/2}_{\,y\quad t}(\overline{D}_T)$ и

$$|v_2(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T} \leqslant C_{32}|f(y,t)|^{(\alpha)}_{D_T}.$$

Оценим сначала функцию $v_2(y,t)$, определяемую формулой (45),

$$|v_2(y,t)| \leqslant |f(y,t)|_{D_T} t. \tag{46}$$

Далее, имеем

$$\partial_{y_i} v(y,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(\eta - c\tau^{1-\beta},\tau) - f(y - c\tau^{1-\beta},\tau)\big)\Gamma_{y_i}(y-\eta,t-\tau)d\eta,$$

$$\partial_{y_i y_j} v(y,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(\eta - c\tau^{1-\beta},\tau) - f(y - c\tau^{1-\beta},\tau)\big)$$
$$\times \Gamma_{y_i y_j}(y-\eta,t-\tau)d\eta, \quad i,j = 1,\ldots,n.$$

Привлекая оценку ядра $\Gamma(x,t)$

$$|\partial_t^{m_0}\partial_x^m \Gamma(x,t)| \leqslant C_{33}\frac{1}{t^{\frac{n+2m_0+|m|}{2}}}e^{-\frac{x^2}{8at}}$$

и учитывая, что $f(y - ct^{1-\beta},t) \in C^{\alpha,\alpha/2}_{y\;\; t}$, мы получим

$$|\partial_{y_i} v_2(y,t)| \leqslant C_{34}[f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} t^{\frac{1+\alpha}{2}}, \tag{47}$$

$$|\partial^2_{y_i y_j} v_2(y,t)| \leqslant C_{35}[f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} t^{\alpha/2},\ i,j = 1,\ldots,n. \tag{48}$$

Теперь в формуле $u_2(y - ct^{1-\beta},t) = v_2(y,t)$ произведем замену $x = y - ct^{1-\beta}$, тогда получим $u_2(x,t) = v_2(x + ct^{1-\beta},y)$.

Для функции $u_2(x,t)$ мы получим точно такие же оценки, как и для функции $u_1(x,t) = v_1(x + ct^{1-\beta},y)$. Поэтому воспользуемся ими, а также учтем оценки (46)–(48).

Итак, из формулы (35), записанной для $u_2(x,t)$, в силу (47) имеем

$$
\begin{aligned}
|\partial_t u_2(x,t)| &\leqslant C_{36}\Big(\frac{1}{t^\beta}\sum_{i=1}^n |\partial_{y_i} v_2(y,t)| + |\partial_t v_2(y,t)|\Big)\\
&\leqslant C_{37}\Big(\sum_{i=1}^n |\partial_{y_i} v_2(y,t)| t^{\frac{1+\alpha}{2}-\beta} + |\partial_t v_2(y,t)|\Big)\\
&\leqslant C_{38}\Big(\sum_{i=1}^n |\partial_{y_i} v_2(y,t)|_{D_T} + |\partial_t v_2(y,t)|_{D_T}\Big),\\
&\qquad \beta\in(0,1/2].
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Оценим константы Гельдера функции $u_2(x,t)$. Запишем неравенство (38) для функции $u_2(x,t)$ с учетом оценок (47), (48) производных $\partial_{y_i} v_2(y,t),\ \partial^2_{y_i y_j} v_2(y,t)$

$$
\begin{aligned}
|\partial_t u_2(x,t) - \partial_{t_1} u_2(x,t_1)| &\leqslant C_{39}\Big([\partial_t v_2(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} + [\partial_t v_2(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_t}\\
&+ \frac{1}{t^{\beta+\alpha/2}}[f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} t^{\frac{1+\alpha}{2}} + [\partial_{y_i} v_2(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T}\\
&+ \frac{1}{t^\beta}[f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} t^{\frac{1-\alpha}{2}+1/2-\beta+\alpha/2}\Big)(t-t_1)^{\alpha/2},
\end{aligned}
$$

где в третьем и пятом слагаемых в правой части неравенства

$$
t^{\frac{1+\alpha}{2}-\beta-\alpha/2} = t^{1/2-\beta},\ \ t^{\frac{1-\alpha}{2}+1/2-\beta+\alpha/2-\beta} = t^{2(1/2-\beta)},
$$

соответственно, $\beta\in(0,1/2]$. Это неравенство дает оценку

$$
[\partial_t u_2]^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \leqslant C_{40}\Big(|v_2(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T} + [f]^{(\alpha)}_{x,D_T}\Big). \tag{50}
$$

Рассмотрим разность, составленную с помощью формулы (34),

$$
\begin{aligned}
\Delta_4 &= \partial_t u_2(x,t) - \partial_t u_2(z,t)\\
&= \partial_t v_2(x+ct^{1-\beta},t) - \partial_t v_2(z+ct^{1-\beta},t) = \Delta_{41}+\Delta_{42};
\end{aligned}
\tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{41} &= (1-\beta)\frac{1}{t^\beta}\Big(c\nabla_x^T v_2(x+ct^{1-\beta},t) - c\nabla_z^T v_2(z+ct^{1-\beta},t)\Big),\\
\Delta_{42} &= \Big(\partial_{t^*} v_2(x+ct^{1-\beta},t^*) - \partial_{t^*} v_2(z+ct^{1-\beta},t^*)\Big)|_{t^*=t}.
\end{aligned}
$$

Оценим Δ_{41} другим способом, не так, как Δ_2 для функции $\partial_t u_1(x,t)$ (см.(41), (42)). Здесь мы учтем, что

$$
v_2|_{t=0}=0,\quad \partial_{x_i} v_2|_{t=0}=0,\quad \partial_{x_i x_j} v_2|_{t=0}=0.
$$

В Δ_{41} входят производные $\partial_{x_i} v_2(x+ct^{1-\beta},t)$, $i=1,\dots,n$. Поэтому, для простоты, рассмотрим разность одной производной

$$\Delta_5 = \partial_{x_i} v_2(x+ct^{1-\beta},t) - \partial_{x_i} v_2(x+ct^{1-\beta},0) \\ - \partial_{z_i} v_2(z+ct^{1-\beta},t) + \partial_{z_i} v_2(z+ct^{1-\beta},0), \quad i=1,\dots,n.$$

Имеем

$$|\Delta_5| = \frac{|\partial_{x_i} v_2(x+ct^{1-\beta},t) - \partial_{z_i} v_2(z+ct^{1-\beta},t)|^\alpha}{|x-z|^\alpha} \\ \times \big|\big(\partial_{x_i} v_2(x+ct^{1-\beta},t) - \partial_{x_i} v_2(x+ct^{1-\beta},0)\big) \\ - \big(\partial_{z_i} v_2(z+ct^{1-\beta},t) - \partial_{z_i} v_2(z+ct^{1-\beta},0)\big)\big|^{1-\alpha}|x-z|^\alpha \\ \leqslant C_{41}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\partial^2_{y_i y_j} v_2(y,t)|_{D_t}\Big)^\alpha \Big([\partial_{y_i} v_2(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T}\Big)^{1-\alpha} t^{\frac{1+\alpha}{2}(1-\alpha)}|x-z|^\alpha.$$

Применив оценку (48) к $|\partial^2_{y_i y_j} v_2|$, а затем неравенство Юнга (40) с $1/p=\alpha$, $1/q = 1-\alpha$, будем иметь

$$|\Delta_5| \leqslant C_{42} t^{\alpha^2/2+1/2-\alpha^2/2}\Big([f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} + [\partial_{y_i} v_2(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T}\Big)|x-z|^\alpha,$$

и для разности Δ_{41} из (51) получим

$$|\Delta_{41}| \leqslant C_{43}\big([f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} + \sum_{i=1}^{n}[\partial_{y_i} v_2(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T}\big)t^{1/2-\beta},$$

Δ_{42} подчиняется оценке

$$|\Delta_{42}| \leqslant C_{44}[\partial_t v_2(y,t)]^{(\alpha/2)}_{y,D_T}.$$

Отсюда и (51)следует

$$|\partial_t u_2(x,t) - \partial_t u_2(z,t)| \\ \leqslant C_{45}\Big(\big([f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} + \sum_{i=1}^{n}[\partial_{y_i} v_2(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T}\big)t^{1/2-\beta} \\ + [\partial_t v_2(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}\Big)|x-z|^\alpha,\ \beta\in(0,1/2],$$

и

$$[\partial_t u_2]^{(\alpha)}_{x,D_T} \leqslant C_{46}\Big(|v_2(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T} + [f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}\Big). \tag{52}$$

Рассмотрим разность

$$\Delta_6 = \partial_{x_i} u_2(x,t) - \partial_{x_i} u_2(x,t_1),$$

для нее справедлива оценка (43) с $v_2(y,t)$ вместо $v_1(y,t)$. Учтем также неравенство (48): $|\partial^2_{y_iy_j}v_2(y,t)| \leqslant C_{35}[f]^{(\alpha)}_{y,D_T}\,t^{\alpha/2}$, тогда будем иметь

$$|\Delta_6| \leqslant C_{47}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\partial^2_{y_iy_j}v_2(y,t)|_{D_t}t^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta} + [\partial_{y_i}v_2(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T}\Big)(t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}}$$

$$\leqslant C_{48}\Big([f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}t^{\alpha/2-\alpha/2+(1/2-\beta)} + [\partial_{y_i}v_2(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T}\Big)(t-t_1)^{\frac{1+\alpha}{2}},$$

отсюда получим

$$\sum_{i=1}^{n}[\partial_{x_i}u_2]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T} \leqslant C_{49}\Big([f(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T} + \sum_{i=1}^{n}[\partial_{y_i}v_2(y,t)]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_T}\Big). \tag{53}$$

Собирая оценки (25), (26), (33) с $u_2(x,t)$ и $v_2(y,t)$ вместо $u_1(x,t)$ и $v_1(y,t)$, а также (49), (50), (52), (53), мы установим оценку (13): $|u_2|^{(2+\alpha)}_{\beta,D_T} \leqslant C_3|f|^{(\alpha)}_{D_T}$ и завершим доказательство теоремы 2. □

Доказательство теоремы 1. Теорема доказывается так же, как теорема 2. Рассмотрим функции $u_1(x,t), u_2(x,t)$, определяемые формулами (8), (9) соответственно. Для удобства обозначим вектор

$$d(t) = (c_1t^{1-\beta_1},\dots,c_nt^{1-\beta_n}),\ c_i = \frac{b_i}{1-\beta_i},\ i=1,\dots,n.$$

Произведем в формулах (8), (9) замену переменной

$$x = y + (c_1t^{1-\beta_1},\dots,c_nt^{1-\beta_n}) \equiv x + d(t),$$

затем в (9) замену переменной интегрирования $\eta = \xi + d(\tau)$, тогда получим

$$u_1(y-d(t),t) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} u_0(\xi)\Gamma(y-\xi,t)\,d\xi =: w_1(y,t), \tag{54}$$

$$\begin{aligned} &u_2(y-d(t),t)\\ &\quad= \int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(\eta-d(\tau),\tau)\Gamma(y-\eta,t-\tau)d\eta =: w_2(y,t), \end{aligned} \tag{55}$$

где согласно лемме 2 с $\beta = \max(\beta_1,\dots,\beta_n)$

$$f(y-d(t),t) \in C^{\,\alpha,\alpha/2}_{\,y\ \ \ t}(\overline{D}_T)$$

и $|f_1|^{(\alpha)}_{D_T} \leqslant C_5|f(y,t)|^{(\alpha)}_{D_T}$.

Из формул (54), (55) следует, что

$$w_i(y,t) \in C_{y\ \ t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_T), \quad i = 1,2,$$

[9] и

$$|w_1|_{D_T}^{(2+\alpha)} \leqslant C_{50}|u_0|_D^{(2+\alpha)},\ |w_2|_{D_T}^{(2+\alpha)} \leqslant C_{51}|f(y,t)|_{D_T}^{(\alpha)}. \qquad (56)$$

Вернемся к переменной x, произведя в формулах (54), (55) замену $y = x + d(t)$, тогда будем иметь

$$u_j(x,t) = w_j(x + d(t), t), \quad j = 1,2.$$

Рассмотрим функцию $u_1(x,t)$. Для нее справедливы оценки (25), (26). Далее, составим разность (31) с w_1 вместо v_1 и применим оценки (32)

$$\begin{aligned}
&|\partial^2_{x_ix_j}u_1(x,t) - \partial^2_{x_ix_j}u_1(x,t_1)| \\
&\quad = |\partial^2_{x_ix_j}w_1(x+d(t),t) - \partial^2_{x_ix_j}w_1(x+d(t_1),t_1)| \\
&\quad = \Big|\big(\partial^2_{x_ix_j}w_1(x+(c_1t^{1-\beta_1},\cdots,c_nt^{1-\beta_n}),t) \\
&\qquad - \partial^2_{x_ix_j}w_1(x+(c_1t_1^{1-\beta_1},\cdots,c_nt_1^{1-\beta_n}),t)\big) \\
&\qquad + \big(\partial^2_{x_ix_j}w_1(x+d(t_1),t) \\
&\qquad - \partial^2_{x_ix_j}w_1(x+d(t_1),t_1)\big)\Big| \\
&\quad \leqslant C_{52}\sum_{k=1}^n[\partial^2_{x_ix_j}w_1(y,t)]^{(\alpha)}_{y,D_T}(t^{1-\beta_k} - t_1^{1-\beta_k})^\alpha \\
&\qquad + [\partial^2_{x_ix_j}w_1(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}(t-t_1)^{\alpha/2}.
\end{aligned}$$

Учитывая оценку (27): $(t^{1-\beta} - t_1^{1-\beta})^\alpha \leqslant (t-t_1)^{\alpha/2+\alpha(1/2-\beta)}$ при $t/2 \leqslant t_1 < t,\ \beta \in (0,1/2]$, мы получим

$$(t^{1-\beta_k} - t_1^{1-\beta_k})^\alpha \leqslant (t-t_1)^{\alpha/2+\alpha(1/2-\beta_k)},\ \beta_k \in (0,1/2],\ k = 1,\ldots,n,$$

и

$$[\partial^2_{x_ix_j}u_1]^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \leqslant C_{53}\big([\partial^2_{x_ix_j}w_1(y,t)]^{(\alpha)}_{x,D_T} + [\partial^2_{x_ix_j}w_1(y,t)]^{(\alpha/2)}_{t,D_T}\big).$$

Запишем производную

$$\begin{aligned}
&\partial_t u_1(x,t) = \partial_t w_1(x+(c_1t^{1-\beta_1},\cdots,c_nt^{1-\beta_n}),t) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{c_i(1-\beta_i)}{t^{\beta_i}}\partial_{x_i}w_1(x+d(t),t) + \partial_{t^*}w_1(x+d(t),t^*)|_{t^*=t}
\end{aligned}$$

и оценим ее

$$|\partial_t u_1(x,t)| \leqslant C_{54} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t^{\beta_i}} |\partial_{y_i} w_1(y,t)|_{D_T} + C_{55} |\partial_t w_1(y,t)|_{D_T}.$$

Отсюда следует

$$\sup_{t \leqslant T} t^{\beta} |\partial_t u_1|_{D'_t} \leqslant C_{56} \Big(\sum_{i=1}^{n} |\partial_{y_i} w_1(y,t)|_{D_T} + |\partial_t| w_1(y,t)|_{D_T} \Big),$$

где $\beta = \max(\beta_1, \dots, \beta_n)$, $D'_t = D \times (t/2, t)$.

Аналогично устанавливаются все другие оценки для функций

$$u_j(x,t) = w_j(x + (c_1 t_1^{1-\beta_1}, \cdots, c_n t_1^{1-\beta_n}), t), \quad j = 1, 2.$$

В результате мы будем иметь

$$|u_1|^{(2+\alpha)}_{\beta, D_T} \leqslant C_{57} |w_1(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T}, \quad |u_2|^{(2+\alpha)}_{D_T} \leqslant C_{58} |w_2(y,t)|^{(2+\alpha)}_{D_T}.$$

Привлекая неравенства (56) для функций $w_j(y,t)$, $j = 1, 2$, мы получим оценки (5), (6)

$$|u_1|^{(2+\alpha)}_{\beta, D_T} \leqslant C_1 |u_0|^{(2+\alpha)}_{D}, \ |u_2|^{(2+\alpha)}_{D_T} \leqslant C_2 |f|^{(\alpha)}_{D_T}$$

и теорему 1. □

Список литературы

1. . M. Gevrey, *Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique.* – J. Math. Pur. Appl. Ser 6., V. 9., No. 4 (1913), 305–471.
2. Л. И. Камынин, *К теории Жевре для параболических потенциалов. V.* — Дифференц. уравнения **7**, No. 3 (1972), 494–509.
3. Л. И. Камынин *К теории Жевре для параболических потенциалов. VI.* — Дифференц. уравнения **8**, No. 6 (1972), 1015–1025.
4. Е. А. Бадерко, *О решении первой краевой задачи для параболических уравнений с помощью потенциала простого слоя.* — ДАН СССР **283**, No. 1 (1985), 11–13.
5. Е. А. Бадерко, *Решение методом граничных интегральных уравнений задач для линейных параболических уравнений произвольного порядка в негладких областях.* Дисс. докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1992.
6. Е. А. Бадерко, *Краевые задачи для параболического уравнения и граничные интегральные уравнения.* — Дифференц. уравнения **28**, No. 1 (1992), 17–23.
7. В. П. Михайлов, *Теорема существования и единственности решения одной граничной задачи для параболического уравнения в области с особыми точками на границе* . — Тр. МИАН СССР **91** (1967), 47–58.
8. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. Т.1.* Наука, М., 1969.

9. О. А. Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Наука, М., 1967.

Bizhanova G. I. Solution of the Cauchy problem for ф parabolic equation with singular coefficients.

The paper is concerned with the Cauchy problem for the second order parabolic equation with the singular coefficients with respect to t at the first order spatial derivatives. The solution of the problem is constructed in the explicit form. For it, it is defined a weighted Hölder space with the weight as a positive power of t. The existence, uniqueness, estimates of the solution are proved.

Институт математики
и математического
моделирования,
ул. Пушкина, 125, г. Алматы, Казахстан
E-mail: galina_math@mail.ru,
bizhanova@math.kz

Поступило 9 декабря 2018 г.