Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 477, 2018 г.

Ю. О. Беляева, А. Л. Скубачевский

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА–ПУАССОНА В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

§1. Введение

Интерес к изучению уравнений Власова обусловлен многочисленными приложениями этих уравнений. Как в физике так и в математике им посвящена обширная литература (см. [1–5, 7–21] и имеющуюся там библиографию). Кинетические уравнение с самосогласованным электрическим полем (уравнения Власова) без столкновений используются при моделировании высокотемпературной плазмы и исследовании ее поведения в управляемом термоядерном реакторе. Уравнения Власова используются также для описания бесстолкновительного затухания волн в плазме: эффекта затухания Ландау [18].

Будем рассматривать систему уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре:

$$-\Delta\varphi(x,t) = 4\pi e\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_\beta \beta f^\beta(x,v,t)\,dv, \quad x\in Q,\ 0<t<T, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t} + (v,\nabla_x f^\beta) + \frac{\beta e}{m_\beta}\left(-\nabla_x\varphi + \frac{1}{c}[v,B],\nabla_v f^\beta\right) = 0, \tag{1.2}$$
$$x\in Q,\ v\in\mathbb{R}^3,\ 0<t<T,\ \beta=\pm1$$

с начальными условиями

$$f^\beta(x,v,t)\big|_{t=0} = f_0^\beta(x,v), \qquad x\in\bar{Q},\ v\in\mathbb{R}^3,\ \beta=\pm1 \tag{1.3}$$

и краевым условием Дирихле

$$\varphi(x,t)=0, \qquad x\in\partial Q,\ 0\leqslant t<T. \tag{1.4}$$

Здесь $Q=G\times\mathbb{R}$, $G\subset\mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial G\in C^\infty$, $\partial Q = \partial G\times\mathbb{R}$, $f^\beta = f^\beta(x,v,t)$ – функция плотности распределения

Ключевые слова: уравнения Власова–Пуассона, смешанная задача, классические решения, внешнее магнитное поле.

положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x со скоростью v в момент времени t; $\varphi = \varphi(x,t)$ – потенциал самосогласованного электрического поля; ∇_x и ∇_v – градиенты по x и v, соответственно; m_{+1} и m_{-1} – массы иона и электрона; e – заряд электрона; c – скорость света; B – индукция внешнего магнитного поля; $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$; $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Можно выделить несколько направлений в исследовании уравнений Власова. Решение уравнения (1.1) может быть записано в виде ньютоновского потенциала. Подставляя это решение в уравнение (1.2), мы получим интегро-дифференциальное уравнение, содержащее ядро со слабой особенностью. Глобальная разрешимость описанных выше уравнений со “сглаженным” ядром в отсутствие магнитного поля изучалась в работах У. Брауна и К. Хеппа [12], В. П. Маслова [5] и Р. Л. Добрушина [2].

Существование глобального обобщенного решения задачи Коши для уравнений Власова–Пуассона было доказано А. А. Арсеньевым [1]. Далее уравнения с сингулярным ядром и существование глобального обобщенного решения в случае задачи Коши изучались Р. Дж. ДиПерна и П. Л. Лионсом [13], Э. Хорстом и Р. Хюнце [16] и др.

Глобальным классическим решениям задачи Коши для системы уравнений Власова–Пуассона посвящены работы Ю. Батта [11], Э. Хорста [15], К. Пфаффельмозера [19] и Дж. Шеффера [20], К. Бардоса и П. Дегонда [10].

В областях с границей уравнения Власова исследованы значительно меньше. В случае полупространства глобальные классические решения изучались Я. Гуо [14] и Х. Дж. Хуангом, Х. Х. Л. Веласкесом [17]. В общей постановке вопрос о существовании классических решений смешанных задач для системы уравнений Власова–Пуассона является нерешенной проблемой [4].

Для осуществления управляемого термоядерного синтеза используется высокотемпературная плазма. Наиболее взвешенное и корректное определение понятия плазмы может быть сформулировано следующим образом [3]. “Плазма — это ионизованный газ, состоящий из электронов и полностью или частично ионизованных атомов (ионов), движение которых и (как следствие) макроскопическое поведение всей плазмы определяется преимущественно коллективными процессами.” В большинстве исследований по уравнениям Власова допускается ряд упрощений: рассматривается однокомпонентная плазма, магнитное поле B полагается равным нулю. В случае бесконечного цилиндра уравнения Власова–Пуассона описывают кинетику плазмы в пробочной ловушке. Чтобы осуществить удержание плазменного шнура строго внутри реактора в реальных установках используют достаточно большое магнитное поле. Поэтому важно рассматривать двукомпонентную модель плазмы под действием внешнего магнитного поля и исследовать решения, носители которых лежат на некотором расстоянии от границы области.

Смешанные задачи для уравнений Власова–Пуассона, описывающих двукомпонентную модель плазмы с внешним магнитным полем, в бесконечном цилиндре и полупространстве впервые исследовалась в работах [7–9, 21]. Получен ряд результатов связанных с существованием и единственностью классических решений с носителями, лежащими на некотором расстоянии от границы рассматриваемых областей.

Данная работа посвящена исследованию первой смешанной задачи для системы уравнений Власова–Пуассона с внешним магнитным полем в бесконечном цилиндре. Показано, что если магнитное поле B достаточно велико, то характеристики уравнений Власова не пересекают границу рассматриваемой области. Получены новые достаточные условия существования и единственности решений, носители которых лежат строго во внутреннем цилиндре.

Статья построена следующим образом. Раздел 2 содержит обозначения и определения используемых функциональных пространств. В Разделе 3 исследуются траектории движения частиц системы уравнений Власова с фиксированным потенциалом. Показано, что при действии достаточно большого магнитного поля характеристики не пересекают границу цилиндра. Раздел 4 посвящен построению функций $F_\varphi(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum\limits_{\beta=\pm 1} \beta f_\varphi^\beta(x,v,t)\,dv$, где $f_\varphi^\beta(x,v,t)$-решения системы (1.1)–(1.2) с фиксированным потенциалом. Далее в разделе 4 показано, что функции $F_\varphi(x,t)$ принадлежат соответствующим пространствам Гельдера. В Разделе 5 доказаны существование и единственность решения задачи (1.1)–(1.4) для достаточно малых начальных функций распределения и достаточно большого магнитного поля.

§2. Обозначения

Введем некоторые функциональные пространства. Обозначим через $C^s(\mathbb{R}^n)$ $(C^s(\overline{Q}))$, $s \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, пространство Гёльдера функций непрерывных в $\mathbb{R}^n$ $(\overline{Q})$ и имеющих непрерывные производные в $\mathbb{R}^n$ $(\overline{Q})$ вплоть до k-го порядка, $k = [s]$, с конечной нормой

$$\|u\|_s = \max_{|\alpha| \leqslant k} \sup_x \bigl|\mathcal{D}^\alpha u(x)\bigr| \quad \text{для} \quad s = k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant k,$$
$$\|u\|_s = \|u\|_k + |u|_{k+\sigma} \qquad \text{для} \quad s = k + \sigma,\ 0 \leqslant k \in \mathbb{Z},\ 0 < \sigma < 1,$$

где

$$|u|_{k+\sigma} = \max_{|\alpha|=k} \sup_{x \neq y} |x-y|^{-\sigma} \bigl|\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(y)\bigr|,$$
$$\mathcal{D}^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Введем пространство $C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T])$ ограниченных непрерывных функций в $\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T]$, имеющих в $\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T]$ все производные первого порядка ограниченные и непрерывные в $\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T]$.

Замечание 2.1. Для любого $s \geqslant 0$ пространства $C^s(\mathbb{R}^n)$ и $C^s(\overline{Q})$ банаховы. Если $s = k + \sigma$, $0 \leqslant k \in \mathbb{Z}$ и $0 < \sigma < 1$, то пространство $C^s(\mathbb{R}^n)$ $(C^s(\overline{Q}))$ не является сепарабельным, а множество бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n(\overline{Q})$ с конечной нормой $\|\cdot\|_s$ не будет всюду плотным в $C^s(\mathbb{R}^n)$ $(C^s(\overline{Q}))$.

Пусть $\dot{C}^k(\mathbb{R}^n)$, $k, n \in \mathbb{N}$ – пространство непрерывно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями.

Обозначим через $C_0^s(\bar{Q})$, $s \geqslant 0$, замыкание множества функций из $C^s(\bar{Q})$ с компактными в $\bar{Q}$ носителями.

Будем обозначать $\widehat{C}^s(\overline{\mathbb{R}^3})$ пространство вектор-функций

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$$

с координатами $Y_i \in C^s(\overline{\mathbb{R}^3})$ и нормой

$$\|Y\|_s = \max_{0\leqslant m\leqslant k} \langle Y\rangle_m, \quad \langle Y\rangle_m = \left\{\sum_{i=1}^{3} \max_{|\alpha|=m} \left\|\mathcal{D}^\alpha Y_i\right\|_0^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{для} \quad s = k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant k,$$
$$\|Y\|_s = \|Y\|_k + \langle Y\rangle_{k+\sigma}, \quad \langle Y\rangle_{k+\sigma} = \left\{\sum_{i=1}^{3} |Y_i|_{k+\sigma}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{для} \quad s = k+\sigma, \qquad 0 \leqslant k \in \mathbb{Z},\ 0 < \sigma < 1.$$

Введем банахово пространство $C\big([0,T], C_0^s(\overline{Q})\big)$, $s > 0$, непрерывных функций $[0,T] \ni t \mapsto \varphi(\,\cdot\,,t) \in C_0^s(\overline{Q})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{s,T} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \big\|\varphi(\,\cdot\,,t)\big\|_s.$$

Рассмотрим также банахово пространство $L_1\big((0,T), C_0^s(\overline{Q})\big)$, $s > 0$, измеримых по Лебегу функций $(0,T) \ni t \mapsto \varphi(\,\cdot\,,t) \in C_0^s(\overline{Q})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{L_1((0,T),C_0^s(\overline{Q}))} = \int_0^T \big\|\varphi(\,\cdot\,,t)\big\|_s dt.$$

Будем обозначать $W_p^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$, $p > 2$, пространство Соболева функций из $v \in L_p(Q)$ имеющих все обобщенные производные $\partial_x^\alpha v \in L_p(Q)$, $|\alpha| \leqslant k$, с нормой

$$\|v\|_{W_p^k(Q)} = \left\{\sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_Q \big|\partial_x^\alpha v(x)\big|^p dx\right\}^{1/p}. \tag{2.1}$$

Обозначим $W_p^{k-\frac{1}{p}}(\partial Q)$, $k \geqslant 1$, пространство следов на ∂Q функций из $W_p^k(Q)$ с нормой

$$\|g\|_{W_p^{k-\frac{1}{p}}(\partial Q)} = \inf_{\omega} \|\omega\|_{W_p^k(Q)} \qquad (\omega|_{\partial Q} = g). \tag{2.2}$$

Обозначим

$$M_{s,R} = \big\{\varphi \in C\big([0,T], C_0^s(\overline{Q})\big) \colon \|\varphi\|_{L_1((0,T),C_0^s(\overline{Q}))} \leqslant R\big\},$$

$R > 0$, $s > 0$. Очевидно, что $M_{s,R}$ – полное метрическое пространство с метрикой $\rho_{s,R}(\varphi,\psi) = \|\varphi - \psi\|_{s,T}$.

Определение 2.1. *Вектор-функцию* $\{\varphi, f^\beta\}$,

$$\varphi \in C([0,T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q})),$$

$$f^\beta \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T])$$

мы назовем классическим решением задачи (1.1)–(1.4), *в случае если* $\{\varphi, f^\beta\}$ *удовлетворяет уравнениям* (1.1), (1.2), *начальным условиям* (1.3) *и краевому условию* (1.4).

Пусть

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x - x^0| < r\}, \quad B_r = B_r(0), \quad |B_r| = 4\pi r^3/3$$

и

$$G_\delta = \{x' \in G : \operatorname{dist}(x', \partial G) > \delta\},$$
$$Q_\delta = \{x \in Q \colon \operatorname{dist}(x, \partial Q) > \delta\},$$

где $\delta > 0$. Предположим, что $G_{2\delta} \neq \varnothing$.

Сформулируем теперь условия, которым должны удовлетворять магнитное поле B и начальные плотности распределения $f_0^\beta(x,v)$.

Условие 2.1. Пусть $B \in \widehat{C}^{1+\sigma}(\overline{Q})$, и пусть $B(x) = (0,0,h)$ для $x \in \overline{Q}_{\delta/4}$, где

$$\frac{16c}{e\delta}\,\psi(T)\big(\rho + \sqrt{3}\,eR\big) < h, \tag{2.3}$$

$\delta, \rho, R, h > 0$ не зависят от x, а $\psi \in C\big([0,\infty), [0,1]\big)$ неубывающая функция, заданная по формуле

$$\psi(t) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \cos\left(\dfrac{eh}{cm_{-1}}\,t\right)\right)^{\frac{1}{2}}, & t \in \Big[0, \dfrac{m_{-1}c\pi}{eh}\Big], \\ 1, & t \in \Big[\dfrac{m_{-1}c\pi}{eh}, \infty\Big). \end{cases}$$

Обозначим

$$\mathcal{D}_0 = \big(Q_{\delta_0} \cap B_{\varkappa_0}\big) \times B_{\rho_0}, \tag{2.4}$$

где $\delta_0, \varkappa_0, \varkappa, \rho_0 > 0$ таковы, что $3\delta/2 < \delta_0 < \varkappa_0 < \varkappa - \delta/8$, $\rho_0 < \rho$, $Q_{\delta_0} \cap B_{\varkappa_0} \neq \varnothing$.

Условие 2.2. Пусть $f_0^\beta \in \dot{C}^{1+\sigma}(\mathbb{R}^6)$ и пусть $\operatorname{supp} f_0^\beta \subset \mathcal{D}_0$.

§3. Характеристики уравнений Власова с фиксированным потенциалом

Предположим, что выполняются условия 2.1 и 2.2. Для заданной функции $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$, уравнение (1.2) с начальным условием (1.3) можно решить, используя метод характеристик. Для этого рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX^\beta_\varphi}{d\tau} = V^\beta_\varphi, \quad 0 < \tau < T,\ \beta = \pm 1, \tag{3.1}$$

$$\frac{dV^\beta_\varphi}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta} \nabla_x \varphi\big(X^\beta_\varphi, \tau\big) + \frac{\beta e}{m_\beta c}\big[V^\beta_\varphi, B(X^\beta_\varphi)\big], \tag{3.2}$$
$$0 < \tau < T,\ \beta = \pm 1$$

с начальными условиями

$$X^\beta_\varphi\big|_{\tau=0} = x, \quad \beta = \pm 1, \tag{3.3}$$

$$V^\beta_\varphi\big|_{\tau=0} = v, \quad \beta = \pm 1, \tag{3.4}$$

где $x \in Q$, $v \in \mathbb{R}^3$.

Поскольку $\varphi \in C\big([0,T], C^{2+\sigma}_0(\overline{Q})\big)$, из теоремы о непродолжаемых решениях следует, что для любых $x \in Q$ и $v \in \mathbb{R}^3$ существует единственное непродолжаемое решение задачи (3.1)–(3.4) на некотором полуинтервале $\big[0, T^\beta_\varphi(x,v)\big)$ с $T^\beta_\varphi(x,v) \leqslant T$. Обозначим это решение через $\big(X^\beta_\varphi(x,v,\tau), V^\beta_\varphi(x,v,\tau)\big)$.

Лемма 3.1. *Пусть $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$. Тогда*

$$\big|V^\beta_\varphi(x,v,t)\big| < \rho_1, \quad \beta = \pm 1 \tag{3.5}$$

для всех $x \in Q$, $0 < t < T^\beta_\varphi(x,v)$, и $|v\,| < \rho$, где $\rho_1 = \rho + \frac{3^{\frac{1}{2}} e}{m_{-1}} R$.

Доказательство. Умножим уравнение (3.2) на V^β_φ. Тогда мы имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\big|V^\beta_\varphi(x,v,\tau)\big|^2 = -\frac{\beta e}{m_\beta}\big(\nabla_x \varphi\big(X^\beta_\varphi, \tau\big), V^\beta_\varphi(x,v,\tau)\big).$$

Отсюда из неравенства Коши–Буняковского мы получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\big|V^\beta_\varphi(x,v,\tau)\big|^2 \leqslant \frac{e}{m_{-1}}\big|\nabla_x \varphi\big(X^\beta_\varphi, \tau\big)\big|\big|V^\beta_\varphi(x,v,\tau)\big|.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau}\left|V_\varphi^\beta(x,v,\tau)\right| \leqslant \frac{e}{m_{-1}}\left|\nabla_x\varphi\left(X_\varphi^\beta,\tau\right)\right|. \tag{3.6}$$

Интегрируя (3.6) от 0 до t по $d\tau$, имеем

$$\begin{aligned}\left|V_\varphi^\beta(x,v,t)\right| &\leqslant |v| + \frac{e}{m_{-1}}\int_0^t \left|\nabla_x\varphi\left(X_\varphi^\beta,\tau\right)\right| d\tau \\ &\leqslant \rho + 3^{1/2}\frac{e}{m_{-1}}\int_0^t \|\varphi(\,\cdot\,,\tau)\|_1\, d\tau.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Поскольку $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$, из (3.7) следует (3.5). □

Введем матрицу

$$R(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \qquad \theta\in\mathbb{R}.$$

Умножение на матрицу $R(\theta)$ соответствует вращению на угол θ на плоскости. Следующее утверждение позволяет применить свойства этого оператора к исследованию траекторий заряженных частиц при наличии ненулевого магнитного поля в (3.2). В [9] доказаны следующие свойства матрицы $R(\theta)$.

Лемма 3.2. (a) $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1+\theta_2)$, $\quad \theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$.

(b) $R(\theta)^m = R(m\theta)$, $\quad \theta\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{Z}$.

(c) $\dfrac{d}{d\theta}R(\theta) = R(\pi/2)R(\theta) = R(\theta+\pi/2)$, $\quad \theta\in\mathbb{R}$.

(d) $|R(\theta)\,x| = |x|$, $\theta\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^2$.

(e) $\exp(tR(\theta)) = \exp(t\cos\theta)R(t\sin\theta)$.

Обозначим $x' = (x_1,x_2)$ и

$$X_\varphi^{\beta\prime}(x,v,\tau) = \left(X_{\varphi1}^\beta(x,v,\tau), X_{\varphi2}^\beta(x,v,\tau)\right).$$

Лемма 3.3. *Пусть при некоторых* $\delta,\rho,R,h>0$, *выполняется условие* 2.1, *и пусть* δ', *таково, что* $\delta'\geqslant\delta/2$. *Тогда для всех* $\varphi\in M_{2+\sigma,R}$ *решение* $\left(X_\varphi^\beta(x,v,\tau),\ V_\varphi^\beta(x,v,\tau)\right)$ *задачи* (3.1)–(3.4) *на интервале*

$\big[0, T^\beta_\varphi(x,v)\big)$ $\big(T^\beta_\varphi(x,v) \leqslant T\big)$ *обладает следующими свойствами: если* $x' \in G_{\delta'}$, $v \in B_\rho$, *то* $T^\beta_\varphi(x,v) = T$, $\big|X^{\beta'}_\varphi(x,v,\tau) - x'\big| < \delta/8$, *а* $V^\beta_\varphi(x,v,\tau) \in B_{\rho_1}$ *для всех* $\tau \in [0,T)$.

Доказательство. 1. Докажем, что $T^\beta_\varphi(x,v) = T$ и $\big|X^{\beta'}_\varphi(x,v,\tau) - x'\big| < \delta/8$ для всех $\tau \in \big[0, T^\beta_\varphi(x,v)\big)$.

Предположим противное: либо $T^\beta_\varphi(x,v) < T$, либо

$$\big|X^{\beta'}_\varphi(x,v,\tau_0) - x'\big| \geqslant \delta/8$$

для некоторого $\tau_0 \in \big[0, T^\beta_\varphi(x,v)\big)$.

Заметим, что неравенство $T^\beta_\varphi(x,v) < T$ влечет выполнение следующего соотношения $\lim\limits_{\tau \to T^\beta_\varphi(x,v)-0} dist\big(X^{\beta'}_\varphi(x,p,\tau), \partial G\big) = 0$. Следовательно, $\big|X^{\beta'}_\varphi(x,v,\tau_0) - x'\big| \geqslant \delta/8$ для некоторого $\tau_0 \in [0, T^\beta_\varphi)$. Поскольку $X^{\beta'}_\varphi(x,v,0) = x'$, то для некоторого τ_1, $0 < \tau_1 < T^\beta_\varphi(x,v)$, мы имеем

$$\begin{aligned} &\big|X^{\beta'}_\varphi(x,v,\tau_1) - x'\big| = \delta/8, \\ &\big|X^{\beta'}_\varphi(x,v,\tau) - x'\big| < \delta/8, \quad \tau \in [0,\tau_1). \end{aligned} \tag{3.8}$$

В силу условия 2.1, мы можем переписать уравнение (3.2) в виде

$$\frac{dV^\beta_\varphi(\tau)}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_x \varphi(X^\beta_\varphi,\tau) + \frac{\beta e}{m_\beta c}\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^\beta_\varphi(\tau), \quad \tau \in (0,\tau_1).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} V^\beta_{\varphi 1}(\tau) \\ V^\beta_{\varphi 2}(\tau) \end{pmatrix} + \frac{\beta e h}{m_\beta c} R\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\begin{pmatrix} V^\beta_{\varphi 1}(\tau) \\ V^\beta_{\varphi 2}(\tau) \end{pmatrix} = -\frac{\beta e}{m_\beta}\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi(X^\beta_\varphi,\tau),$$
$$\tau \in (0,\tau_1).$$

Умножая последнее уравнение на $\exp\Big(\tau\,\dfrac{\beta e h}{m_\beta c}\, R\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big)\Big)$, мы получим

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\left[\exp\left(\tau\frac{\beta e h}{m_\beta c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\begin{pmatrix} V^\beta_{\varphi 1}(\tau) \\ V^\beta_{\varphi 2}(\tau) \end{pmatrix}\right] \\ &\qquad = -\frac{\beta e}{m_\beta}\exp\left(\tau\frac{\beta e h}{m_\beta c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi\big(X^\beta_\varphi,\tau\big), \ \tau \in (0,\tau_1). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Интегрируя (3.9) от 0 до t, $t \in (0, \tau_1)$, мы имеем

$$\exp\left(t\frac{\beta eh}{m_\beta c} R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\begin{pmatrix} V^\beta_{\varphi 1}(t) \\ V^\beta_{\varphi 2}(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\beta e}{m_\beta}\int\limits_0^t \exp\left(\tau\frac{\beta eh}{m_\beta c}\, R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi\bigl(X^\beta_\varphi, \tau\bigr)\,d\tau.$$

Из леммы 3.2 (e) следует, что

$$\exp\left(\tau\frac{\beta eh}{m_\beta c}\, R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(\tau\frac{\beta eh}{m_\beta c}\,\cos\frac{\pi}{2}\right) R\left(\tau\frac{\beta eh}{m_\beta c}\,\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= R\left(\tau\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right),$$

умножая предыдущее уравнение на $R\left(-t\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right)$, мы получим

$$\begin{pmatrix} V^\beta_{\varphi 1}(t) \\ V^\beta_{\varphi 2}(t)\end{pmatrix} = R\left(-t\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\beta e}{m_\beta}\int\limits_0^t R\left((\tau - t)\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right)\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi\bigl(X^\beta_\varphi, \tau\bigr)\,d\tau.$$

Поэтому из (3.1) мы получим

$$\begin{pmatrix} X^\beta_{\varphi 1}(\tau_1) \\ X^\beta_{\varphi 2}(\tau_1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + I_1 + I_2, \tag{3.10}$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^{\tau_1} R\left(-t\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} dt,$$

$$I_2 = -\frac{\beta e}{m_\beta}\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_0^t R\left((\tau - t)\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right)\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi\bigl(X^\beta_\varphi, \tau\bigr)\,d\tau dt.$$

Вычислим I_1 и I_2.

В силу леммы 3.2 (c) мы имеем

$$R\left(-t\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right) = -\frac{m_\beta c}{\beta eh}\frac{d}{dt}\left(R\left(-t\,\frac{\beta eh}{m_\beta c} - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{m_\beta c}{\beta eh}\left[-R\left(-t\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}-\frac{\pi}{2}\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{t=\tau_1}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\\
&= \frac{m_\beta c}{\beta eh}\left\{-R\left(-\tau_1\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}-\frac{\pi}{2}\right)+R(-\frac{\pi}{2})\right\}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\\
&= \frac{m_\beta c}{\beta eh}\left\{-R\left(-\tau_1\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right)+R(0)\right\}R\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\\
&= \frac{m_\beta c}{\beta eh}\begin{pmatrix}1-\cos\left(\tau_1\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right) & -\sin\left(\tau_1\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right)\\ \sin\left(\tau_1\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right) & 1-\cos\left(\tau_1\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\\
&=\frac{m_\beta c}{\beta eh}\begin{pmatrix}\sin\left(\tau_1\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right) & 1-\cos\left(\tau_1\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right)\\ -\left(1-\cos\left(\tau_1\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right)\right) & \sin\left(\tau_1\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\\
&=\frac{m_\beta c}{\beta eh}\begin{pmatrix}\beta\sin\left(\tau_1\frac{eh}{m_\beta c}\right)v_1+\left(1-\cos\left(\tau_1\,\frac{eh}{m_\beta c}\right)\right)v_2\\ -\left(1-\cos\left(\tau_1\,\frac{eh}{m_\beta c}\right)\right)v_1+\beta\sin\left(\tau_1\,\frac{eh}{m_\beta c}\right)v_2\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы имеем

$$
\begin{aligned}
&|I_1|=\frac{m_\beta c}{eh}\\
&\times\sqrt{\left(\beta\sin\left(\tau_1\frac{eh}{m_\beta c}\right)v_1+\left(1-\cos\left(\tau_1\,\frac{eh}{m_\beta c}\right)\right)v_2\right)^2+\left(-\left(1-\cos\left(\tau_1\,\frac{eh}{m_\beta c}\right)\right)v_1+\beta\sin\left(\tau_1\frac{eh}{m_\beta c}\right)v_2\right)^2}\\
&= \frac{m_\beta c}{eh}\sqrt{\left(v_1^2+v_2^2\right)\left(\left(1-\cos\left(\tau_1\,\frac{eh}{m_\beta c}\right)\right)^2+\sin^2\left(\tau_1\,\frac{eh}{m_\beta c}\right)\right)}\\
&= \frac{m_\beta c}{eh}|v|\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\left(\tau_1\,\frac{eh}{m_\beta c}\right)}\\
&\leqslant \frac{2c}{eh}\,\psi(\tau_1)|v| \leqslant \frac{2c}{eh}\,\psi(T)|v|.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

С другой стороны, используя лемму 3.2 (c), мы видим, что

$$
I_2 = -\frac{\beta e}{m_\beta}\int_0^{\tau_1}\left\{\int_\tau^{\tau_1}R\left((\tau-t)\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right)dt\right\}\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi\big(X_\varphi^\beta,\tau\big)\,d\tau
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c}{h}\int\limits_0^{\tau_1}\left\{R\left((\tau-\tau_1)\,\frac{\beta eh}{m_\beta c}\right)-R(0)\right\}R\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi\big(X_\varphi^\beta,\tau\big)d\tau\\
&= \frac{c}{h}\int\limits_0^{\tau_1}\begin{pmatrix}\cos\Big((\tau-\tau_1)\,\frac{eh}{m_\beta c}\Big)-1 & -\sin\Big((\tau-\tau_1)\frac{eh}{m_\beta c}\Big)\\ \sin\Big((\tau-\tau_1)\frac{eh}{m_\beta c}\Big) & \cos\Big((\tau-\tau_1)\,\frac{eh}{m_\beta c}\Big)-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi(X_\varphi^\beta,\tau)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\varphi(X_\varphi^\beta,\tau)}{\partial x_2}\end{pmatrix}d\tau\\
&= \frac{c}{h}\int\limits_0^{\tau_1}\begin{pmatrix}\sin\Big((\tau-\tau_1)\frac{eh}{m_\beta c}\Big) & \cos\Big((\tau-\tau_1)\,\frac{eh}{m_\beta c}\Big)-1\\ 1-\cos\Big((\tau-\tau_1)\,\frac{eh}{m_\beta c}\Big) & \sin\Big((\tau-\tau_1)\,\frac{eh}{m_\beta c}\Big)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi(X_\varphi^\beta,\tau)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\varphi(X_\varphi^\beta,\tau)}{\partial x_2}\end{pmatrix}d\tau\\
&= \frac{c}{h}\int\limits_0^{\tau_1}\begin{pmatrix}\sin\Big((\tau-\tau_1)\frac{eh}{m_\beta c}\Big)\frac{\partial\varphi(X_\varphi^\beta,\tau)}{\partial x_1}+\Big(\cos\Big((\tau-\tau_1)\frac{eh}{m_\beta c}\Big)-1\Big)\frac{\partial\varphi(X_\varphi^\beta,\tau)}{\partial x_2}\\ \Big(1-\cos\Big((\tau-\tau_1)\frac{eh}{m_\beta c}\Big)\Big)\frac{\partial\varphi(X_\varphi^\beta,\tau)}{\partial x_1}+\sin\Big((\tau-\tau_1)\frac{eh}{m_\beta c}\Big)\frac{\partial\varphi(X_\varphi^\beta,\tau)}{\partial x_2}\end{pmatrix}d\tau
\end{aligned}
$$

Тогда аналогично (3.11) мы имеем

$$
\begin{aligned}
&|I_2| = \frac{c}{h}\int\limits_0^{\tau_1}\\
&\times\sqrt{\left(\Big(1-\cos\Big((\tau-\tau_1)\frac{eh}{m_\beta c}\Big)\Big)^2+\sin^2\Big((\tau-\tau_1)\frac{eh}{m_\beta c}\Big)\right)\left(\Big(\frac{\partial\varphi(X_\varphi^\beta,\tau)}{\partial x_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varphi(X_\varphi^\beta,\tau)}{\partial x_2}\Big)^2\right)}\,d\tau\\
&= \frac{c}{h}\int\limits_0^{\tau_1}\left(\Big(1-\cos\Big((\tau-\tau_1)\frac{eh}{m_\beta c}\Big)\Big)^2+\sin^2\Big((\tau-\tau_1)\frac{eh}{m_\beta c}\Big)\right)^{\frac12}\Big|\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi\big(X_\varphi^\beta,\tau\big)\Big|\,d\tau\\
&\leqslant \frac{2c}{h}\,\psi(T)\int\limits_0^{\tau_1}\Big|\nabla_{(x_1,x_2)}\varphi\big(X_\varphi^\beta,\tau\big)\Big|\,d\tau \leqslant \frac{2\sqrt{2}c}{h}\,\psi(T)\int\limits_0^{T}\big\|\varphi(\,\cdot\,,\tau)\big\|_1 d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Из (3.8), (3.10)–(3.12) следует, что

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{8} &= \big|X_\varphi^{\beta'}(x,v,\tau_1)-x'\big| \leqslant |I_1|+|I_2|\\
&\leqslant \psi(T)\,\frac{2c}{eh}\left(\rho+2^{\frac12}e\int\limits_0^{T}\big\|\varphi(\,\cdot\,,\tau)\big\|_1 d\tau\right)\\
&\leqslant \psi(T)\,\frac{2c}{eh}\Big(\rho+2^{\frac12}eR\Big).
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

С другой стороны, (2.3) влечет за собой неравенство

$$\frac{2c}{eh}\,\psi(T)\left(\rho + 3^{\frac{1}{2}} eR\right) < \frac{\delta}{8}.$$

Это противоречит (3.13). Таким образом, мы доказали, что $T^\beta_\varphi(x,v) = T$ и $\left|X^{\beta'}_\varphi(x,v,\tau) - x'\right| < \delta/8$ для всех $\tau \in [0,T)$.

2. В силу леммы 3.1, $\left|V^\beta_\varphi(x,v,t)\right| < \rho_1$ для всех $x' \in G_{\delta'}$, $v \in B_\rho$ и $t \in [0,T)$. □

Следствие 3.1. *Предположим, что выполняется следующее условие*:

Условие 3.1. Пусть $B \in \widehat{C}^{1+\sigma}(\overline{Q})$, и пусть $B(x) = (0,0,h)$ для $x \in \overline{Q}_{\delta/4}$, где

$$\frac{16c}{e\delta}\left(\rho + \sqrt{3}\, eR\right) < h, \tag{3.14}$$

$\delta, \rho, R, h > 0$ не зависят от x.

Тогда для любых $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$, $x \in Q_{7\delta/8}$ *и* $v \in B_\rho$, *мы имеем* $T^\beta_\varphi(x,v) = \infty$ *и* $X^\beta_\varphi(x,v,\tau) \in Q_{3\delta/4}$, $V^\beta_\varphi(x,v,\tau) \in B_{\rho_1}$ *для всех* $\tau \in [0,\infty)$.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений (3.1), (3.2) на интервале $(0,t)$, $0 < t \leqslant T$, с начальными условиями

$$X^\beta_\varphi\big|_{\tau=t} = y \qquad (\beta = \pm 1), \tag{3.15}$$

$$V^\beta_\varphi\big|_{\tau=t} = q \qquad (\beta = \pm 1). \tag{3.16}$$

В силу теоремы о непродолжаемых решениях для любых $y \in Q$ и $q \in \mathbb{R}^3$ существует единственное непродолжаемое решение задачи (3.1), (3.2), (3.15), (3.16) для

$$\tau \in \left(T^\beta_\varphi(y,q,t), t\right], \quad 0 \leqslant T^\beta_\varphi(y,q,t) < t.$$

Обозначим это решение через $\left(X^\beta_\varphi(y,q,t,\tau)\ V^\beta_\varphi(y,q,t,\tau)\right)$.

Аналогично лемме 3.3 можно доказать следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Пусть при некоторых* $\delta, \rho, R, h > 0$, *выполняется условие* 2.1 *и пусть* δ', *таково, что* $\delta' \geqslant \delta/2$. *Тогда для всех* $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ *решение* $\left(X^\beta_\varphi(y,q,t,\tau),\ V^\beta_\varphi(y,q,t,\tau)\right)$ *задачи* (3.1), (3.2), (3.15), (3.16) *на интервале* $\left(T^\beta_\varphi(y,q,t), t\right]$ $\left(0 \leqslant T^\beta_\varphi(y,q,t)\right)$ *обладает следующими свойствами*:

если $y' \in G_{\delta'}$, $q \in B_{\rho_1}$, *то* $T^{\beta}_{\varphi}(y,q,t){=}0$, $\bigl|X^{\beta'}_{\varphi}(y,q,t,\tau) - y'\bigr| < \delta/8$, *а* $V^{\beta}_{\varphi}(y,q,t,\tau) \in B_{\rho_2}$ *для всех* $\tau \in (0,t]$, *где* $\rho_2 = \rho_1 + \frac{3^{\frac{1}{2}} e}{m_{-1}} R$.

Следствие 3.2. *Пусть выполняется условие* 3.1. *Тогда для любых* $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$, $y \in Q_{7\delta/8}$, $q \in B_{\rho_1}$ *и* $0 < t \leqslant T$ *мы имеем* $T^{\beta}_{\varphi}(y,q,t) = 0$, $X^{\beta}_{\varphi}(y,q,t,\tau) \in Q_{3\delta/4}$ *и* $V^{\beta}_{\varphi}(y,q,t,\tau) \in B_{\rho_2}$.

§4. Плотности распределения заряженных частиц

Обозначим
$$\Omega_0 = \bigl(Q_{3\delta/4} \cap B_{\varkappa_1}\bigr) \times B_{\rho_1}, \tag{4.1}$$
где $\varkappa_1 = \varkappa + T\rho_1$.

Пусть выполняется условие 2.1, и пусть $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$. Тогда из леммы 3.4 следует, что для любых $(y,q) \in \Omega_0$ и $0 < t \leqslant T$ существует единственное непродолжаемое решение $\bigl(X^{\beta}_{\varphi}(y,q,t,\tau),\ V^{\beta}_{\varphi}(y,q,t,\tau)\bigr)$ задачи (3.1), (3.2), (3.15), (3.16) на полуинтервале $(0,t]$. Продолжая функции $X^{\beta}_{\varphi}(y,q,t,\tau)$, $V^{\beta}_{\varphi}(y,q,t,\tau)$ по непрерывности в $\tau = 0$, мы будем полагать $\widehat{X}^{\beta}_{\varphi}(y,q,t) = X^{\beta}_{\varphi}(y,q,t,0)$, $\widehat{V}^{\beta}_{\varphi}(y,q,t) = V^{\beta}_{\varphi}(y,q,t,0)$.

Для произвольно заданного $0 < t \leqslant T$ рассмотрим отображение $\widehat{S}^{\beta}_{\varphi,t}(y,q)\colon \Omega_0 \to \Omega^{\beta}_{\varphi,t} = \{(x,v)\colon (x,v) = \widehat{S}_{\varphi,t}(y,q),\ (y,q) \in \Omega_0\}$, заданное по формуле
$$\widehat{S}^{\beta}_{\varphi,t}(y,q) = \bigl(\widehat{X}^{\beta}_{\varphi}(y,q,t), \widehat{V}^{\beta}_{\varphi}(y,q,t)\bigr).$$

Поскольку $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ и $B \in \widehat{C}^{1+\sigma}(\overline{Q})$, то согласно теореме о дифференцируемости решений по начальным данным функция $\widehat{S}^{\beta}_{\varphi,t}(y,q)$ непрерывно дифференцируема по y и q на множестве Ω_0.

Положим $\widehat{S}^{\beta}_{\varphi,0}(x,v) = (x,v)$.

Очевидно, для любого $0 \leqslant t < T$ отображение $S^{\beta}_{\varphi,t}\colon \Omega^{\beta}_{\varphi,t} \to \Omega_0$, заданное по формуле
$$S^{\beta}_{\varphi,t}(x,v) = \bigl(X^{\beta}_{\varphi}(x,v,t), V^{\beta}_{\varphi}(x,v,t)\bigr)$$
является обратным к $\widehat{S}^{\beta}_{\varphi,t}$, т. е.
$$\widehat{S}^{\beta}_{\varphi,t}\bigl(S^{\beta}_{\varphi,t}(x,v)\bigr) = (x,v), \quad (x,v) \in \Omega^{\beta}_{\varphi,t}. \tag{4.2}$$
Продолжим отображение $S^{\beta}_{\varphi,t}$ по непрерывности в $t = T$.

Поскольку $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ и $B \in \widehat{C}^{1+\sigma}(\overline{Q})$, то согласно теореме о дифференцируемости решений по начальным данным функция $S_{\varphi,t}(x,v)$ непрерывно дифференцируема по x, v и t для любых $t \in [0,T]$ и

$(x,v) \in \Omega^{\beta}_{\varphi,t}$. Поэтому из (4.2) и непрерывной дифференцируемости $\widehat{S}^{\beta}_{\varphi,t}$ по y и q следует, что функция $\widehat{S}^{\beta}_{\varphi,t}$, $y,q \in \Omega_0$, непрерывно дифференцируема по t.

Лемма 4.1. *Пусть выполнено условие* 2.1, *и пусть* $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$. *Тогда*

$$\left|\frac{\partial \widehat{X}^{\beta}_{\varphi}(x,v,t)}{\partial x_j}\right| + \left|\frac{\partial \widehat{V}^{\beta}_{\varphi}(x,v,t)}{\partial x_j}\right| \leqslant c_0, \tag{4.3}$$
$$(x,v) \in \Omega_0, \qquad 0<t<T, \quad j=1,2,3,$$

где

$$c_0 = \exp\left(\max\left\{\frac{3eR}{m_{-1}} + \frac{\sqrt{3}\, e\rho_2}{cm_{-1}}\, \langle B\rangle_1 T,\, T\right\}\right). \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть $(x,v) \in \Omega_0$. Рассмотрим уравнения в вариациях для системы (3.1), (3.2).

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial X^{\beta}_{\varphi}}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial V^{\beta}_{\varphi}}{\partial x_j} \qquad (0<\tau<t), \tag{4.5}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial V^{\beta}_{\varphi}}{\partial x_j}\right) = -\frac{\beta e}{m_\beta}\sum_{k=1}^{3} \nabla_{X^{\beta}_{\varphi}}\left(\frac{\partial \varphi\big(X^{\beta}_{\varphi},\tau\big)}{\partial X^{\beta}_{\varphi k}}\right)\frac{\partial X^{\beta}_{\varphi k}}{\partial x_j}$$
$$+\frac{\beta e}{m_\beta c}\left\{\left[\frac{\partial V^{\beta}_{\varphi}}{\partial x_j}, B\big(X^{\beta}_{\varphi}\big)\right] + \left[V^{\beta}_{\varphi}, \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial B\big(X^{\beta}_{\varphi}\big)}{\partial X^{\beta}_{\varphi k}}\,\frac{\partial X^{\beta}_{\varphi k}}{\partial x_j}\right]\right\}, \tag{4.6}$$
$$0<\tau<t.$$

В силу (3.15), (3.16) с $y=x$ и $q=v$ начальные условия для системы (4.5), (4.6) примут вид

$$\left.\frac{\partial X^{\beta}_{\varphi i}}{\partial x_j}\right|_{\tau=t} = \delta_{ij}, \qquad \left.\frac{\partial V^{\beta}_{\varphi i}}{\partial x_j}\right|_{\tau=t} = 0, \quad i=1,2,3. \tag{4.7}$$

Рассмотрим сначала уравнение (4.5). Перейдем к новой переменной $\xi=\tau$ и проинтегрируем (4.5) по ξ от τ до t:

$$\int_{\tau}^{t}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial X^{\beta}_{\varphi}(\xi)}{\partial x_j}\right)d\xi = \int_{\tau}^{t}\frac{\partial V^{\beta}_{\varphi}(\xi)}{\partial x_j}d\xi, \quad 0<\tau<t.$$

Отсюда из (4.7) получим

$$A_j - \frac{\partial X_\varphi^\beta(\tau)}{\partial x_j} = \int\limits_\tau^t \frac{\partial V_\varphi^\beta(\xi)}{\partial x_j} d\xi, \quad 0 < \tau < t,$$

где $A_j \in R^3$ - вектор с элементами $a_{ij} = \delta_{ij} (i = 1, 2, 3)$.

Перейдем к новым переменным $s = t - \xi$, $\tau_1 = t - \tau$:

$$A_j - \frac{\partial X_\varphi^\beta(t-\tau_1)}{\partial x_j} = \int\limits_0^{\tau_1} \frac{\partial V_\varphi^\beta(t-s)}{\partial x_j} ds, \quad 0 < \tau < t.$$

Полагая $\widetilde{X}_\varphi^\beta(s) = X_\varphi^\beta(t-s)$, $\widetilde{V}_\varphi^\beta(s) = V_\varphi^\beta(t-s)$, получим:

$$\frac{\partial \widetilde{X}_\varphi^\beta(\tau_1)}{\partial x_j} = A_j - \int\limits_0^{\tau_1} \frac{\partial \widetilde{V}_\varphi^\beta(s)}{\partial x_j} d(s), \quad 0 < \tau_1 < t.$$

Отсюда вытекает следующее неравенство:

$$\left| \frac{\partial \widetilde{X}_\varphi^\beta(\tau_1)}{\partial x_j} \right| \leqslant 1 + \int\limits_0^{\tau_1} \left| \frac{\partial \widetilde{V}_\varphi^\beta(s)}{\partial x_j} \right| ds, \quad 0 < \tau_1 < t. \tag{4.8}$$

Рассмотрим теперь уравнение (4.6). Умножим обе части (4.6) на $\dfrac{\partial V_\varphi^\beta}{\partial x_j}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left| \frac{\partial V_\varphi^\beta}{\partial x_j} \right|^2 = & \left| \frac{\partial V_\varphi^\beta}{\partial x_j} \right| \frac{d}{d\tau} \left| \frac{\partial V_\varphi^\beta}{\partial x_j} \right| \\
&= - \frac{\beta e}{m_\beta} \sum_{k=1}^3 \nabla_{X_\varphi^\beta} \left(\frac{\partial \varphi\big(X_\varphi^\beta, \tau\big)}{\partial X_{\varphi k}^\beta} \right) \frac{\partial X_{\varphi k}^\beta}{\partial x_j} \frac{\partial V_\varphi^\beta}{\partial x_j} \\
&+ \frac{\beta e}{m_\beta c} \left(\left[V_\varphi^\beta, \sum_{k=1}^3 \frac{\partial B\big(X_\varphi^\beta\big)}{\partial X_{\varphi k}^\beta} \frac{\partial X_{\varphi k}^\beta}{\partial x_j} \right], \frac{\partial V_\varphi^\beta}{\partial x_j} \right), \quad 0 < \tau < t.
\end{aligned}$$

Перейдем к новой переменной $\xi = \tau$ и проинтегрируем полученное неравенство по ξ от τ до t с учетом начальных условий (4.7). Тогда мы имеем

$$\left|\frac{\partial V_\varphi^\beta(\tau)}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{3e}{m_\beta}\int\limits_\tau^t \|\varphi(\,\cdot\,,\xi)\|_2 \left|\frac{\partial X_\varphi^\beta(\xi)}{\partial x_j}\right| d\xi + \frac{\sqrt{3}e\rho_2}{m_\beta c}\langle B\rangle_1 \int\limits_\tau^t \left|\frac{\partial X_\varphi^\beta(\xi)}{\partial x_j}\right| d\xi.$$

Переходя к новым переменным $s = t - \xi$, $\tau_1 = t - \tau$ мы получим

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \widetilde{V}_\varphi^\beta(\tau_1)}{\partial x_j}\right| &\leqslant \frac{3e}{m_\beta}\int\limits_0^{\tau_1} \big\|\varphi(\,\cdot\,,t-s)\big\|_2 \left|\frac{\partial \widetilde{X}_{\varphi k}^\beta(s)}{\partial x_j}\right| ds \\ &+ \frac{e}{m_\beta c}\sqrt{3}\rho_2\langle B\rangle_1 \int\limits_0^{\tau_1} \left|\frac{\partial \widetilde{X}_{\varphi k}^\beta(s)}{\partial x_j}\right| ds, \quad 0 < \tau_1 < t.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Из неравенств (4.8), (4.9) следует

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial X_\varphi^\beta(\tau)}{\partial x_j}\right| + \left|\frac{\partial V_\varphi^\beta(\tau)}{\partial x_j}\right| &= \left|\frac{\partial X_\varphi^\beta(t-\tau_1)}{\partial x_j}\right| + \left|\frac{\partial V_\varphi^\beta(t-\tau_1)}{\partial x_j}\right| \\ &= \left|\frac{\partial \widetilde{X}_\varphi^\beta(\tau_1)}{\partial x_j}\right| + \left|\frac{\partial \widetilde{V}_\varphi^\beta(\tau_1)}{\partial x_j}\right| \leqslant 1 + \int\limits_0^{\tau_1} \left|\frac{\partial \widetilde{V}_\varphi^\beta(s)}{\partial x_j}\right| ds \\ &+ \frac{3e}{m_\beta}\int\limits_0^{\tau_1} \big\|\varphi(\,\cdot\,,t-s)\big\|_2 \left|\frac{\partial \widetilde{X}_\varphi^\beta(s)}{\partial x_j}\right| ds \\ &+ \frac{e}{m_\beta c}\sqrt{3}\rho_2\langle B\rangle_1 \int\limits_0^{\tau_1} \left|\frac{\partial \widetilde{X}_\varphi^\beta(s)}{\partial x_j}\right| ds.\end{aligned}$$

Тогда из леммы Гронуолла будет следовать

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial \widetilde{X}_\varphi^\beta(\tau_1)}{\partial x_j}\right| + \left|\frac{\partial \widetilde{V}_\varphi^\beta(\tau_1)}{\partial x_j}\right| \\ &\qquad\leqslant \exp\left(\max\left\{\frac{3eR}{m_{-1}} + \frac{\sqrt{3}\,e\rho_2}{cm_{-1}}\,\langle B\rangle_1 T,\, T\right\}\right).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Полагая $\tau = 0$ в функциях

$$\left|\frac{\partial X_\varphi^\beta(\tau)}{\partial x_j}\right| = \left|\frac{\partial X_\varphi^\beta(x,v,t,\tau)}{\partial x_j}\right| \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial V_\varphi^\beta(\tau)}{\partial x_j}\right| = \left|\frac{\partial V_\varphi^\beta(x,v,t,\tau)}{\partial x_j}\right|,$$

из (4.10) мы выводим (4.3). $\square$

Обозначим

$$\mathcal{D}_0^1 = \big(Q_{7\delta/8} \cap B_{\varkappa_1-\delta/8}\big) \times B_{\rho_1} \tag{4.11}$$

где $\varkappa_1 > 0$ задано по формуле (4.1).

Лемма 4.2. *Пусть выполняются условия* 2.1, 2.2. *Тогда для любых* $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ *и* $0 < t \leqslant T$, *мы имеем*

$$\operatorname{supp} f_0^\beta\big(\widehat{S}_{\varphi,t}^\beta(x,v)\big) \subset \mathcal{D}_0^1.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $S_{\varphi,t}^\beta(\operatorname{supp} f_0^\beta) \subset \mathcal{D}_0^1$. В силу условия 2.2 $\operatorname{supp} f_0^\beta \subset \mathcal{D}_0$. Докажем, что $S_{\varphi,t}^\beta(\mathcal{D}_0) \subset \mathcal{D}_0^1$. Пусть $(x,v) \in \mathcal{D}_0$. Тогда из леммы 3.3 следует, что $S_{\varphi,t}^\beta(x,v) \in Q_{7\delta/8} \times B_{\rho_1}$. По условию $|x| < \varkappa - \delta/8$. Поэтому, т. к. $\big|V_\varphi^\beta(x,v,\tau)\big| \leqslant \rho_1$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$, из (3.1) мы получим

$$\big|X_\varphi^\beta(x,v,t)\big| \leqslant |x| + \int\limits_0^t \big|V_\varphi^\beta(x,v,\tau)\big|\,d\tau < \varkappa - \frac{\delta}{8} + T\rho_1 = \varkappa_1 - \frac{\delta}{8}. \quad \square$$

Пусть выполняются условия 2.1 и 2.2.

Определим функцию $f_\varphi^\beta(x,v,t)$ по формуле

$$f_\varphi^\beta(x,v,t) = \begin{cases} f_0^\beta\big(\widehat{S}_{\varphi,t}^\beta(x,v)\big), & (x,v) \in \mathcal{D}_0^1,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & (x,v) \in \big(Q \times \mathbb{R}^3\big) \setminus \mathcal{D}_0^1, \\ & \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{4.12}$$

где $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$.

В силу леммы 4.2, $\operatorname{supp} f_0^\beta\big(\widehat{S}_{\varphi,t}^\beta(x,v)\big) \subset \mathcal{D}_0^1$. Следовательно, используя метод характеристик и непрерывную дифференцируемость функций $\widehat{S}_{\varphi,t}^\beta(x,v)$ по x, v, t, мы видим, что для заданной функции $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ существует единственное решение задачи (1.2), (1.3) в $C^1\big(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0,T]\big)$. Это решение задается формулой (4.12).

Обозначим

$$F_\varphi(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta=\pm 1} \beta f_\varphi^\beta(x,v,t)\,dv \qquad (x \in \overline{Q},\ 0 \leqslant t \leqslant T). \tag{4.13}$$

Замечание 4.1. В силу леммы 4.2 и формулы (4.11),

$$\operatorname{supp} f_0^\beta\big(\widehat{S}_{\varphi,t}^\beta(x,v)\big) \subset \big(Q_{7\delta/8} \cap B_{\varkappa_1-\delta/8}\big) \times B_{\rho_1}.$$

Следовательно в (4.13) мы интегрируем по B_{ρ_1}. Поэтому интеграл в (4.13) существует.

Далее мы покажем, что функция $F_\varphi(x,t)$ принадлежит соответствующим пространствам Гельдера. Будем обозначать

$$m_s = \max_\beta \|f_0^\beta\|_s, \quad s \geqslant 0.$$

Лемма 4.3. *Пусть $\delta > 0$ таково, что $G_{2\delta} \neq \varnothing$. Предположим, что выполняются условия* 2.1, 2.2, *и пусть $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Для любой $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ мы имеем $F_\varphi \in C([0,T], C_0^\sigma(\overline{Q}))$, при этом*

$$\|F_\varphi\|_{L_1((0,T),C_0^\sigma(\overline{Q}))} \leqslant c_1 m_\sigma, \tag{4.14}$$

где $c_1 = 2|B_{\rho_1}|\big(1 + 3^{\sigma/2}c_0^\sigma\big)T$, $c_0 > 0$ – постоянная из леммы 4.1.

2) *Для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in M_{2+\sigma,R}$ и $0 \leqslant t \leqslant T$ мы имеем*

$$\big\|F_{\varphi_1}(\,\cdot\,,t) - F_{\varphi_2}(\,\cdot\,,t)\big\|_\sigma \leqslant c_2 m_{1+\sigma}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_1((0,t),C^2(\overline{Q}))}, \tag{4.15}$$

где $c_2 = c_2(T,\delta,\rho,R,\|B\|_{1+\sigma},\sigma) > 0$ не зависит от φ_1 и φ_2.

Доказательство утверждения 1) аналогично доказательству леммы 3.3. в [8]. Оценку (4.14) можно получить аналогично оценке (5.1) в лемме 5.2 из [9]. Доказательство утверждения 2) аналогично доказательству леммы 5.3. в [9].

§5. Однозначная разрешимость задачи

Рассмотрим вспомогательную задачу для уравнения Пуассона с условием Дирихле в бесконечном цилиндре.

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in Q, \tag{5.1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial Q. \tag{5.2}$$

Введем линейный ограниченный оператор

$$L\colon W_2^2(Q) \to \mathcal{W}_2^0(Q,\partial Q) = L_2(Q) \times W_2^{3/2}(\partial Q),$$

ассоциированный с задачей (5.1), (5.2) по формуле

$$Lu = \big(-\Delta u, u|_{\partial Q}\big). \tag{5.3}$$

Используя преобразование Фурье по переменной x_3, из (5.1), (5.2) мы получим

$$\lambda^2\widehat{u}(x',\lambda) - \Delta_{x_1,x_2}\widehat{u}(x',\lambda) = \widehat{f}(x,\lambda), \qquad x \in G. \tag{5.4}$$

$$\widehat{u}(x,\lambda) = 0, \qquad x \in \partial G. \tag{5.5}$$

Здесь $\widehat{u}(x',\lambda) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\tau)e^{-i\lambda x_3}dx_3$ преобразование Фурье функции $u(x)$ по переменной x_3.

Определим операторно-значную функцию $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \widehat{L}(\lambda)$ соответствующую задаче (5.4), (5.5). Значениями этой функции являются линейные ограниченные операторы $\widehat{L}(\lambda)\colon W_2^2(G) \to \mathcal{W}_2^0(G,\partial G)$ определяемые по формуле

$$\widehat{L}(\lambda)v = \big(\lambda^2 v - \Delta_{x_1,x_2}, v|_{\partial G}\big). \tag{5.6}$$

Очевидно, операторно-значная функция $\widehat{L}(\lambda)$ не имеет действительных собственных значений. Поэтому из теоремы 6.3 в [6] вытекает следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Для любой функции* $f \in C_0^\sigma(\bar{Q})$ *существует единственное решение задачи* (5.1), (5.2) $u \in C_0^{2+\sigma}(\bar{Q})$ *и*

$$\|u\|_{C_0^{2+\sigma}(\bar{Q})} \leqslant c_3\|f\|_{C_0^\sigma(\bar{Q})}, \tag{5.7}$$

где $c_3 > 0$ *не зависит от* f.

Сформулируем и докажем основной результат работы.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия* 2.1 *и* 2.2. *Предположим также, что выполняется следующее неравенство*:

$$4\pi e c_1 c_3 m_\sigma < R, \tag{5.8}$$

где $c_1, c_3 > 0$ *– константы из лемм 4.1, 5.1.*

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1.1)–(1.4) *такое, что* $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ *и* $\operatorname{supp} f^\beta(\,\cdot\,,\cdot\,,t) \subset \mathcal{D}_0^1$ *для всех* $t \in [0,T]$.

Доказательство. 1. Для каждой функции $\varphi \in M_{2+\sigma,R}$ мы обозначим через u_φ классическое решение задачи (5.1), (5.2) с $f = 4\pi e F_\varphi(x,t)$, где функция $F_\varphi(x,t)$ задана по формуле (4.13). В силу лемм 4.2, 4.3 $F_\varphi \in C\big([0,T], C_0^\sigma(\overline{Q})\big)$. Поэтому из леммы 5.1 следует, что

$$u_\varphi \in C\big([0,T], C_0^{2+\sigma}(\overline{Q})\big).$$

Обозначим u_φ через $A\varphi$.

В силу (4.14) и (5.7), мы имеем

$$\|A\varphi\|_{2+\sigma,T} \leqslant 4\pi e c_3\|F_\varphi\|_{\sigma,T} \leqslant 4\pi e c_1 c_3 m_\sigma < R \quad \text{для} \quad \varphi \in M_{2+\sigma,R}. \tag{5.9}$$

Следовательно, оператор A отображает пространство $M_{2+\sigma,R}$ в себя.

2. В полном метрическом пространстве $M_{2+\sigma,R}$ введем эквивалентную метрику по формуле

$$\rho'_{2+\sigma,R}(\varphi_1,\varphi_2)=\sup_{0<t<T}\big(\|\varphi_1(\,\cdot\,,t)-\varphi_2(\,\cdot\,,t)\|_{2+\sigma}\exp(-kt)\big),$$

где $k>0$ достаточно велико, $\varphi_1,\varphi_2\in M_{2+\sigma,R}$.

Из лемм 5.1 и 4.3 следует, что

$$\begin{aligned}\big\|(A\varphi_1-A\varphi_2)(\,\cdot\,,t)\big\|_{2+\sigma}&\leqslant 4\pi ec_3\big\|(F_{\varphi_1}-F_{\varphi_2})(\,\cdot\,,t)\big\|_{\sigma}\\&\leqslant 4\pi em_{1+\sigma}c_2c_3\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_1((0,t),C^2(\overline{Q}))}\end{aligned}\tag{5.10}$$

для любых $\varphi_1,\varphi_2\in M_{2+\sigma,R}$.

Очевидно,

$$\begin{aligned}&\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_1((0,t),C^2(\overline{Q}))}\exp(-kt)\\&\leqslant\int_0^t\big\|(\varphi_1-\varphi_2)(\,\cdot\,,s)\big\|_{2+\sigma}\exp(-ks)\exp\big(k(s-t)\big)\,ds\\&\leqslant\rho'_{2+\sigma,R}(\varphi_1,\varphi_2)\int_0^t\exp\big(k(s-t)\big)\,ds\leqslant\frac{1}{k}\,\rho'_{2+\sigma,R}(\varphi_1,\varphi_2).\end{aligned}$$

Умножим (5.10) на $\exp(-kt)$ и возьмем супремум при $t\in(0,T)$, тогда

$$\rho'_{2+\sigma,R}(A\varphi_1,A\varphi_2)\leqslant\frac{4\pi em_{1+\sigma}c_2c_3}{k}\,\rho'_{2+\sigma,R}(\varphi_1,\varphi_2).$$

Пусть $k=8\pi em_{1+\sigma}c_2c_3$. Тогда мы имеем

$$\rho'_{2+\sigma,R}(A\varphi_1,A\varphi_2)\leqslant\frac{1}{2}\,\rho'_{2+\sigma,R}(\varphi_1,\varphi_2).\tag{5.11}$$

Из (5.9) и (5.11) следует, что оператор $A\colon M_{2+\sigma,R}\to M_{2+\sigma,R}$ имеет единственную неподвижную точку $\varphi\in M_{2+\sigma,R}$. Таким образом, задача (1.1)–(1.4) имеет единственное классическое решение $\{\varphi,f^\beta_\varphi\}$, где φ – неподвижная точка оператора A, а f^β_φ задается по формуле (4.12). Из леммы 4.2 мы получим $\operatorname{supp} f^\beta_\varphi(\,\cdot\,,\,\cdot\,,t)\subset\mathcal{D}^1_0$ для всех $t\in[0,T]$. $\square$

Авторы глубоко благодарны В. В. Козлову за внимание к работе и ценные советы.

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН “5-100” и гранта РФФИ No. 17-01-00401.

Список литературы

1. А. А. Арсеньев, *Существование в целом слабого решения системы уравнений Власова.* — Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **15**, No. 1 (1975), 136–147.
2. Р. Л. Добрушин, *Уравнения Власова.* — Функц. анализ и его прил. **13**, No. 2 (1979), 48–58.
3. В. В. Ильгисонис,*Классические задачи физики горячей плазмы*, Издательский дом МЭИ, М., (2016).
4. В. В. Козлов, *Обобщенное кинетическое уравнение Власова.* — УМН **63**, No. 4(382) (2008), 93–130.
5. В. П. Маслов, *Уравнения самосогласованного поля.* — Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. матем. **11**, ВИНИТИ, М. (1978), 153–234.
6. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*, Наука, М., 1991.
7. А. Л. Скубачевский, *Смешанные задачи для уравнений Власова–Пуассона в полупространстве*, *Теория функций и уравнения математической физики. Сборник статей. К* 90*-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Льва Дмитриевича Кудрявцева.* — Тр. МИАН, **283**, МАИК, М. (2013), pp. 204–232.
8. А. Л. Скубачевский, *Уравнения Власова–Пуассона для двукомпонентной плазмы в однородном магнитном поле.* — УМН, **69**, No. 2 (2014), 107–148.
9. А. Л. Скубачевский, Y. Tsuzuki, *Классические решения уравнений Власова–Пуассона с внешним магнитным полем в полупространстве.* — ЖВМ и МФ, **57**, No. 3, (2017), 536–552.
10. C. Bardos, P. Degond, *Global existence for the Vlasov–Poisson equation in 3 space variables with small initial data.* — Ann. Inst. H. Poincarŕe Anal. Non Linŕeaire, 2, No. 2 (1985), 101–118.
11. J. Batt, *Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics.* — J. Differential Equations, **25**, No. 3 (1977), 342–364.
12. W. Braun, K. Hepp, *The Vlasov dynamics and its fluctuations in the 1/N limit of interacting classical particles.* — Comm. Math. Phys., **56**, No. 2 (1977), 101–113.
13. R. J. DiPerna, P. L. Lions, *Global weak solutions of Vlasov–Maxwell systems.* — Comm. Pure Appl. Math., **42**, No. 6 (1989), 729–757.
14. Y. Guo, *Regularity for the Vlasov equations in a half space.* — Indiana Univ. Math. J., **43**, No. 1 (1994), 255–320.
15. E. Horst,*On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation. I. General theory.* — Math. Methods Appl. Sci., **3**, No. 1 (1981), 229–248.
16. E. Horst, R. Hunze, *Weak solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation.* — Math. Methods Appl. Sci., **6**, No. 1 (1984), 262–279.
17. H. J. Hwang, J. J. L. Velázquez, *On global existence for the Vlasov–Poisson system in a half space.* — J. Differential Equations, **247**, No. 6 (2009), 1915–1948.
18. C. Mouhot, C. Villani, *On Landau damping.* — Acta Math. **207**, No. 1 (2011), 29–201.

19. K. Pfaffelmoser, *Global classical solutions of the Vlasov–Poisson system in three dimensions for general initial data.* — J. Differential Equations **95**, No. 2 (1992), 281–303.
20. J. Schäffer, *Global existence of smooth solutions to the Vlasov–Poisson system in three dimensions.* — Comm. Partial Differential Equations, **16**, No. 8–9 (1991), 1313–1335.
21. A. L. Skubachevskii, *Nonlocal elliptic problems in infinite cylinder and applications.* — Discr. Contin. Dynam. Systems. Ser. S. **9**., No. 3, (2016).

Belyaeva Yu. O., Skubachevskii A. L. Unique solvability of the first mixed problem for the Vlasov–Poisson system in an infinite cylinder.

We consider the first mixed problem for the Vlasov-Poisson system in an infinite cylinder. This problem describes the kinetics of charged particles of high-temperature plasma. We show that the characteristics of the Vlasov equations do not reach the boundary of the cylinder if the external magnetic field is sufficiently large. Sufficient conditions are obtained for existence and uniqueness of the classical solution of the Vlasov–Poisson system with ions and electrons density distribution functions supported at some distance from the boundary of the cylinder.

Российский Университет
Дружбы Народов,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6,
117198 Москва, Россия
E-mail: yilia-b@yandex.ru,
skublector@gmail.com

Поступило 3 декабря 2018 г.