

А. В. Тихонов

ПЛОСКИЕ ДИАГРАММЫ ДВУМЕРНЫХ УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть F^2 – замкнутая поверхность, не обязательно связная или ориентируемая. Пусть $L = f(F^2)$ – ее образ при вложении $f: F^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$. (Все многообразия и отображения будем считать сколь угодно гладкими.) Класс таких объектов относительно объемлемой изотопии называется *двумерным зацеплением*, $[L]$. Если F^2 – это сфера S^2 , то – *двумерным узлом*. Следуя классической традиции, будем далее говорить в основном именно об узлах, даже в тех случаях, когда буквально то же самое можно сказать о зацеплениях. Помимо этих объектов, нас также будут интересовать отображения поверхностей в \mathbb{R}^3 . Сразу же сменим терминологию: далее будем называть узел – классом изотопных узлов, представителя этого класса – узлом, представителей одного класса – изотопными узлами (и то же самое – для зацеплений).

Диаграммой двумерного узла (двумерного зацепления) будем называть раскрашенный (в два цвета) обобщенный (в смысле, который будет пояснен ниже) граф в \mathbb{R}^2 (называемый графом диаграммы), оснащенный дополнительной информацией, который строится следующим образом.

Пусть $K = f(S^2)$ – двумерный узел. Рассмотрим стандартные проекции $p_1: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ и $p_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (забывание последней координаты). Самопересечением проекции $p_1(K)$ узла K будем называть множество двойных точек сквозного отображения $p_1 \circ f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Пусть узел K находится в общем положении. Тогда самопересечение его проекции $p_1(K)$ в \mathbb{R}^3 представляет собой набор дуг (с концами в так называемых зонтиках Уитни – см. рис. 1.2.1) и окружностей, в свою очередь

Ключевые слова: двумерный узел, двумерное зацепление, диаграмма, диаграмма на плоскости, поверхность, вложенная поверхность, погруженная поверхность, поверхность Боя, поверхность с одной двойной линией, двойная линия, самопересечение, тройная точка, складка, линия складки, сборка, точка сборки, зонтик Уитни.

могущих пересекаться друг с другом в тройных точках. Спроектируем этот набор в \mathbb{R}^2 при помощи p_2 . Получившийся вложенный (в том смысле, что в каждом пересечении ребер мы добавляем вершину) граф $D_1(K)$ покрасим, скажем, в цвет 1. (Строго говоря, это не всегда граф, поскольку у него могут иметься замкнутые линии, не содержащие вершин, но я буду тем не менее тоже называть такой объект графом, опуская слово “обобщенный”).

Теперь рассмотрим сквозное отображение $p_2 \circ p_1 \circ f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; его особые точки образуют набор окружностей на сфере, а особые значения – граф в \mathbb{R}^2 (в том же обобщенном смысле). Назовем этот граф $D_2(K)$ и покрасим его в цвет 2. Объединение графов $D_1(K)$ и $D_2(K)$ обозначим $D(K)$ (снова добавляя вершину в каждом пересечении ребер). Теперь наложим дополнительное условие: пусть узел K таков, что граф $D(K)$ – общего положения, то есть не меняется, как граф, при достаточно малых шевелениях узла K . Этот граф назовем *графом диаграммы*.

Конструкция для зацеплений полностью аналогична, причем очевидно, что один и тот же граф диаграммы может соответствовать неизотопным зацеплениям. Также один и тот же граф диаграммы может соответствовать неизотопным узлам (например, нетрудно указать нетривиальный и тривиальный узлы с одинаковым графом диаграммы). Чтобы получилось то, что можно было бы действительно называть диаграммой узла или зацепления, необходимо добавить еще какую-то информацию. Мы добавим такую информацию, которая поможет не только восстановить изотопический тип поверхности, но и в какой-то степени “увидеть” поверхность.

Опишем подробно граф диаграммы узла и прообраз его окрестности. Ребра графа $D_1(K)$ будем изображать пунктирными линиями, $D_2(K)$ – сплошными.

1) Ребро графа $D_2(K)$ – это линия складки; прообраз в \mathbb{R}^3 маленькой площадки в \mathbb{R}^2 выглядит следующим образом – см. рис. 1.1.1 (прообраз в \mathbb{R}^4 выглядит точно так же):

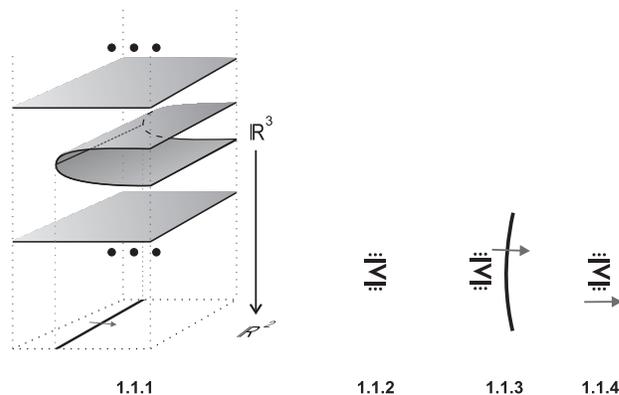


Рис. 1.1

Жирные точки заменяют какое-то количество листов. Толщина придана линиям, разумеется, исключительно для красоты. В \mathbb{R}^2 изображена линия складки – ребро графа $D_2(K)$.

Рис. 1.1.2. Добавим информацию о том, какие именно листы склеиваются. Этот значок представляет собой схематичное изображение прообраза маленького ориентированного отрезка, трансверсально пересекающего линию складки (вместо точек должно быть соответствующее количество черточек).

Рис. 1.1.3. Значок и трансверсальный отрезок (схемой прообраза которого является значок) – это и есть та дополнительная информация, которую мы добавляем к ребру графа. Таким образом, рисунок изображает фрагмент диаграммы узла.

Рис. 1.1.4. Предполагается, что значок снабжен стандартным отрезком (подразумеваемым, но не изображаемым), ориентированным слева направо. Чтобы восстановить схему прообраза, этот отрезок надо совместить с отрезком, трансверсальным ребру графа (воображая, что значок стоит на плоскости вертикально). Как уже было сказано, фактически это означает лишь указание на то, какие листы по отношению к проекции p_2 склеиваются, и с какой стороны от линии складки листов больше. Так что этот способ, конечно, не самый экономный, зато наглядный. Я изображаю складку в виде острого угла потому, что так удобнее рисовать; это условность.

2) На линиях складки могут быть точки сборки (ограничимся одним листом): рис. 1.2.1.

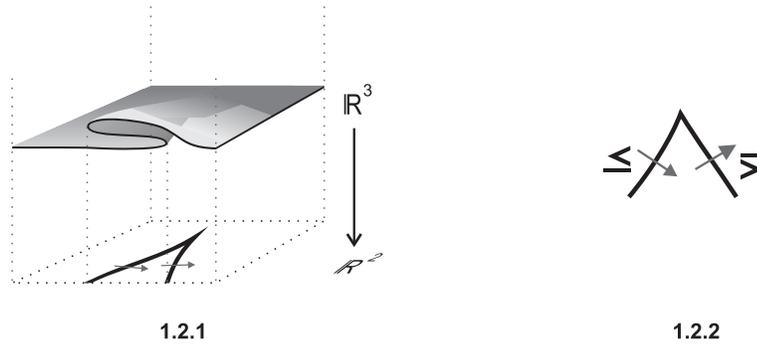


Рис. 1.2

Рис. 1.2.2. Такой вид примет соответствующий фрагмент диаграммы.

3) Проекция p_1 – не обязательно погружение, могут возникнуть зонтики Уитни. В зонтике Уитни заканчивается ребро графа $D_1(K)$, представляющее собой линию самопересечения в \mathbb{R}^3 : рис. 1.3.1.

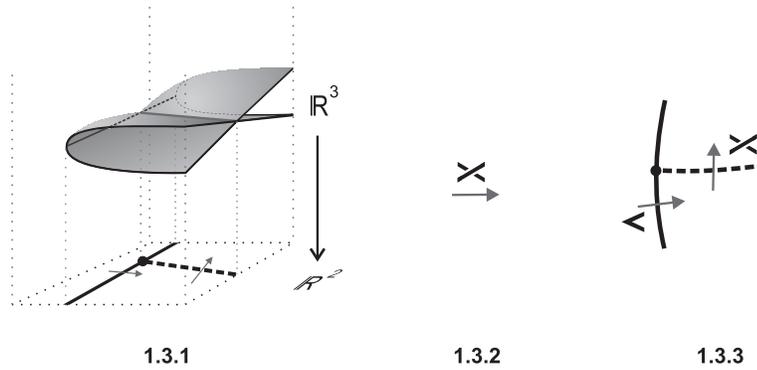


Рис. 1.3

Рис. 1.3.2. Схематическое изображение прообраза отрезка, трансверсального линии самопересечения, в \mathbb{R}^4 (этот прообраз сам по себе трехмерен).

Рис. 1.3.3. Диаграмма.

4) Пересечения линий самопересечения возможны, очевидно, только по три (ограничимся диаграммой):

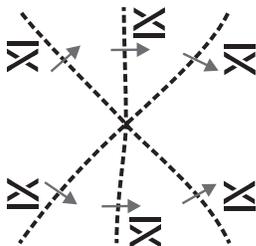


Рис. 1.4

5) Пересечение линии самопересечения со складкой. Чтобы прояснить ситуацию, изобразим сечения (прообразы линий, параллельных \mathbb{R}^1):

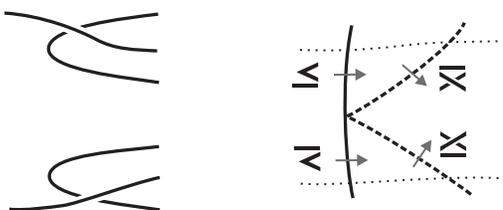


Рис. 1.5

Будем также называть эту ситуацию “отражением” линии самопересечения от складки. При отражении проход меняется на переход (или наоборот). Уголок смещается на одну позицию вверх (или вниз), а крестик – в противоположном направлении. Острый угол на линии самопересечения, разумеется, тоже дань условности; это удобно.

6) Линии складки или самопересечения, никак не взаимодействующие друг с другом в \mathbb{R}^3 , могут пересечься после проектирования на плоскость. Например:

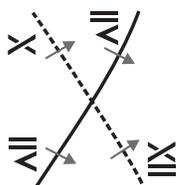


Рис. 1.6

Аналогично для других возможных сочетаний ребер.

Определение. Граф $D(K)$, снабженный вышеописанными значками на ребрах, называется диаграммой узла K .

Следующие утверждения очевидны, либо следуют из хорошо известных фактов:

1. При тех условиях общего положения, которые мы наложили на узел, других ситуаций встретиться не может. Если же узел не удовлетворяет условию общего положения, будем говорить, что у него нет диаграммы.

2. Определение диаграммы корректно, то есть каждому ребру графа однозначно соответствует значок. Сформулируем это утверждение точнее: выберем какой-то достаточно маленький ориентированный отрезок, трансверсальный данному ребру, и какой-то другой достаточно маленький ориентированный отрезок, трансверсальный этому же ребру, который можно соединить с первым отрезком непрерывным семейством ориентированных отрезков, трансверсальных данному ребру. Тогда схемы прообразов начального и конечного отрезков в семействе совпадут.

3. Узлы, имеющие одинаковые диаграммы, изотопны (см. §4). Более того, узлы, диаграммы которых изотопны в \mathbb{R}^2 , изотопны (в \mathbb{R}^4).

4. Если узел имеет диаграмму, то любой узел, полученный из этого узла достаточно малым шевелением, имеет такую же (изотопную) диаграмму (фактически это – изначально наложенное нами условие, но представляется полезным его повторить).

5. Сколь угодно малым шевелением узла можно добиться того, чтобы он имел диаграмму.

Следовательно, введенные нами диаграммы действительно являются диаграммами в обычном смысле слова. Все то же самое, разумеется, верно для зацеплений. Внеся очевидные поправки (см. §2), можно также определить, что такое диаграмма поверхности общего положения в \mathbb{R}^3 .

Введем еще одну условность (назовем ее “соглашение *”). Будем считать, что плоскость \mathbb{R}^2 – это лист бумаги, неподвижно лежащий перед нами на столе. Это означает, что на плоскости выделены направления влево-вправо и вверх-вниз. Так вот, мы, как правило, не будем рисовать ориентированный трансверсальный отрезок, а будем предполагать, что он, если не указан явно, то направлен слева направо (т.е. сонаправлен значку). Как следствие, при переходе через максимум или минимум (относительно направления вверх-вниз) во время

движения по ребру, значок необходимо сменить на зеркальный. На практике к этому легко привыкнуть (см. §5).

Цель данной статьи: продемонстрировать приемы работы с диаграммами узлов (зацеплений, поверхностей в трехмерном пространстве); показать на примерах, что диаграммы позволяют легко решать задачи, кажущиеся нетривиальными.

Историческое замечание: эти несложные идеи, вместе со многими другими, О. Я. Виро предложил своим студентам для дальнейшей разработки еще во второй половине 1980-х годов. Другой вариант диаграмм, более экономный, но менее наглядный, был тогда же создан Ларисой Унольт. Диаграммы, аналогичные вышеописанным, созданные С. Камадой, приведены в книге [1, разделы 1.5, 1.7.2]; мы частично воспользуемся его работой. Попытки получить с их помощью инварианты, насколько мне известно, не привели к успеху; мощные инварианты двумерных узлов получены с использованием проекции в \mathbb{R}^3 [1, раздел 4].

Благодарности: Олегу Яновичу Виро, Андрею Малютину и Семену Подкорытову за ценные указания, помощь и полезные замечания.

§2. ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММЫ

В качестве примера возьмем поверхность Боя, заданную сечениями, из “Книжки с картинками по топологии” [2, стр. 113, 115, 116, рис. 5(21)–5(91)]. Будем считать, что она в \mathbb{R}^3 , так что сечения и значки-крестики будут сплошными, без проходов и переходов; поэтому некоторые сечения из “Книжки” для нас излишни; другие же интервалы между сечениями мы рассмотрим более подробно, добавив сечения промежуточные (как и почему это делается, станет ясно из построения диаграммы). Я приведу сразу те сечения (слева на рис. 2.1), которые нам нужны, не останавливаясь на этом. Плоскость, на которую проектируем, “состоит” из “горизонтальной” прямой сечения и прямой “времени”. Диаграмму строим сверху вниз: рис. 2.1.

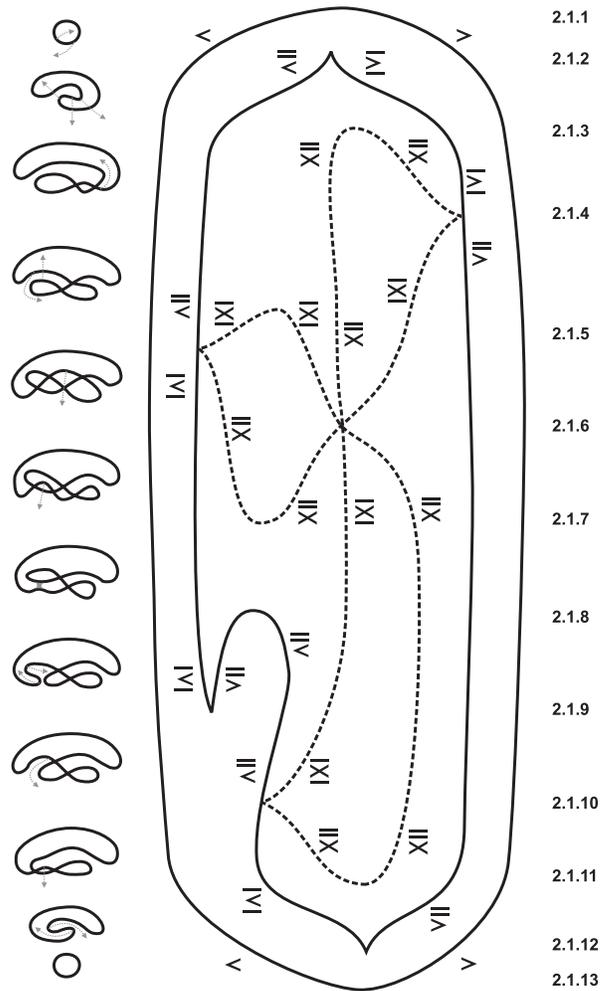


Рис. 2.1

Комментарии:

2.1.1 Переход через максимум = рождение линии складки, или, лучше сказать, рождение двух “противоположных” линий складки.

2.1.2 На нижнем листе делаем сборку.

2.1.3 Теперь мы хотим продеть “ложноножки” через противоположные листы; но сделать это надо аккуратно. Первым делом продавливаем один лист вниз через другой, это соответствует рождению двух линий самопересечения.

2.1.4 Перетаскиваем лист наверх через складку. На диаграмме возникает “отражение”.

2.1.5 Повторяем две предыдущие операции на второй линии.

2.1.6 Выворачивание треугольника, тройная точка.

2.1.7 Две линии самопересечения с одинаковыми значками сокращаются.

2.1.8 Седловая точка – рождение двух новых складок.

2.1.9 Сокращение складок в точке сборки.

2.1.10 Отражение.

2.1.11 Сокращение самопересечений.

2.1.12 Сокращение складок, противоположных и отличающихся “сдвигом на одну позицию”, в точке сборки.

2.1.13 Сокращение противоположных складок в точке минимума.

Приведа картинку в порядок, получаем то, что и должны были получить – рисунок из “Книжки с картинками” [2, стр. 113, рис. 5(13)].

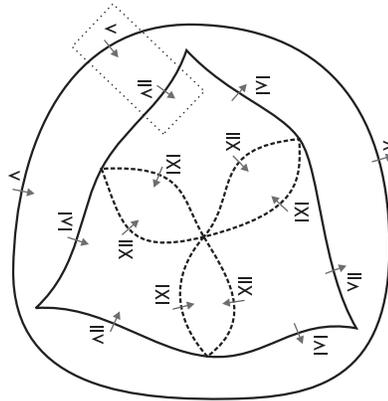


Рис. 2.2

(Выделенный фрагмент пригодится нам в параграфе 3.)

Пусть теперь мы хотим получить поверхность Боя не как погруженную в \mathbb{R}^3 , а как вложенную в \mathbb{R}^4 . Для этого нам необходимо и достаточно заменить сплошные значки на значки с проходами и переходами. Мы знаем, что, если расставить трансверсальные отрезки

так, как на рисунке 2.2, то при каждом отражении мы должны будем заменить проход на переход. А отражений на линии самопересечения – три. Каждый может самостоятельно сравнить это рассуждение с тем, которое приведено в “Книжке с картинками” [2, стр. 114 или стр. 115].

§3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИАГРАММ

С одним преобразованием мы уже встретились – это объемлемая изотопия в плоскости, которая не меняет диаграмму как граф. (Заметим в скобках, что, если мы следуем соглашению * (все отрезки направлены слева направо), нам придется в процессе изотопии следить за точками максимума и минимума и соответствующим образом менять значки.) Изотопные диаграммы соответствуют изотопным узлам. Но, конечно, изотопным узлам могут соответствовать и неизотопные диаграммы. Начнем с примера и зададим себе вопрос (правда, не про узлы, но сути дела это не меняет): почему получившаяся у нас поверхность Боя не совсем похожа на поверхность из “Наглядной геометрии” [3, стр. 318, рис. 321]?

Взглянем на диаграмму (рис. 2.2) и заметим, что складки во фрагменте, отмеченном точками, можно протащить одну над другой следующим образом (рис. 3.1):

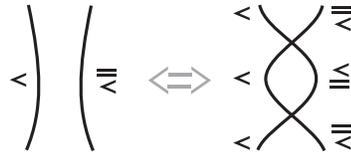


Рис. 3.1

Получаем (рис. 3.2):

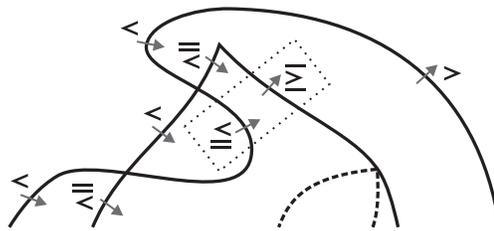


Рис. 3.2

Далее замечаем две складки, противоположные и отличающиеся сдвигом на один слой. Такие складки, как мы знаем, образуют сборку. Преобразование (рис. 3.3):

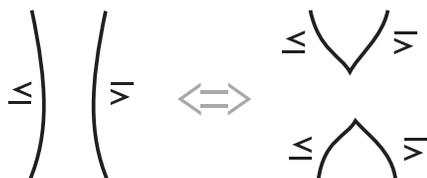


Рис. 3.3

Диаграмма (рис. 3.4):

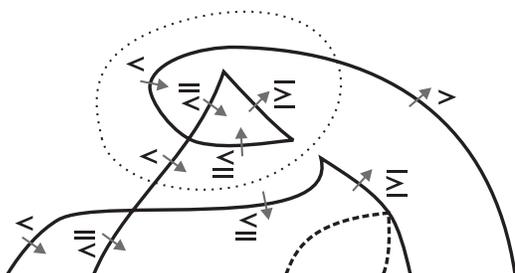


Рис. 3.4

Рассмотрим выделенный фрагмент, называемый “ласточкин хвост”. Чтобы разобраться, что там происходит, “снимем” с него сечения. Если все отрезки направлены правильно, слева направо, сечение получается просто путем последовательного считывания значков (рис. 3.5):

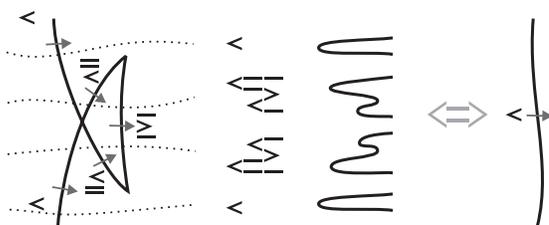


Рис. 3.5

Нетрудно убедиться, что “ласточкин хвост” – всего лишь вмятина. Выдавим ее (рис. 3.6):

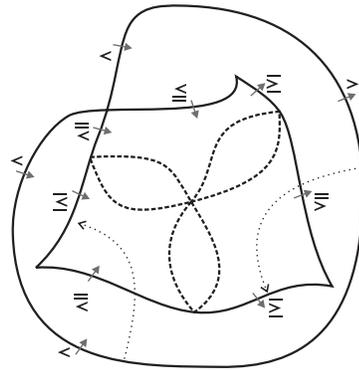


Рис. 3.6

Проделав еще две такие же серии преобразований, получим поверхность Боя в желаемом виде (рис. 3.7):

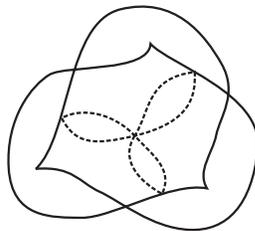


Рис. 3.7

Эту же деформацию, для сравнения, можно посмотреть и в «Книжке с картинками» [2, стр. 121, 122].

Приведем еще несколько преобразований (рис. 3.8):

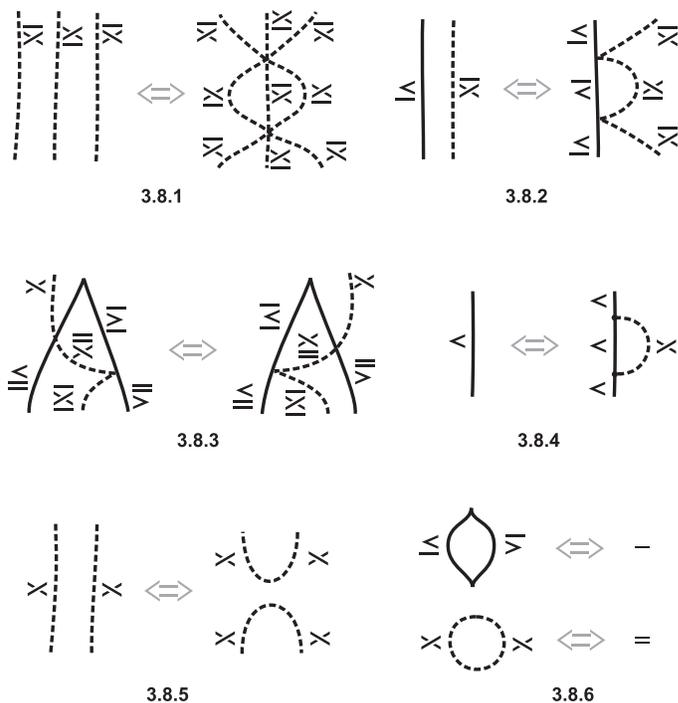


Рис. 3.8

Рис. 3.8.1. Образование или сокращение пары тройных точек.

Рис. 3.8.2. Переход линии самопересечения через складку.

Рис. 3.8.3. Переход линии самопересечения через сборку.

Рис. 3.8.4. Образование или сокращение пары зонтиков Уитни.

Рис. 3.8.5. Продавливание седла.

Рис. 3.8.6. Исчезновение линии складки; исчезновение линии самопересечения.

Полный список можно найти в [1, 1.7.2] (линии, которые у нас сплошные, там пунктирные, и наоборот). Заметим, что одно преобразование там лишнее (на рис. 1.26), ибо следует из двух других. В наших диаграммах оно выглядит так (рождение или сокращение двух зонтиков Уитни; рис. 3.9):



Рис. 3.9

Оно очевидно следует из 3.8.4 и 3.8.5. И наоборот, 3.8.4 столь же очевидно следует из него и 3.8.6. Фактически это означает эквивалентность соответствующих движений Роузмана (Roseman moves) – см. [4]. Фокус в том, чтобы правильно взглянуть на зонтик Уитни.

§4. РЕАЛИЗУЕМОСТЬ И РЕАЛИЗАЦИЯ

Перечислим необходимые свойства, которыми должна обладать диаграмма двумерного зацепления.

1) Условия на вершины, точнее, на то, как выглядит диаграмма в окрестностях вершин графа диаграммы. Эти условия, для каждого вида вершин, ясны из предыдущего изложения.

2) На концах каждого ребра графа диаграммы появляются, таким образом, два значка – они должны совпадать (с учетом направлений трансверсальных отрезков). Ребру (или замкнутой линии без вершин) должен однозначно соответствовать значок.

3) Каждой из областей, на которые граф диаграммы разбивает плоскость, мысленно присвоим значок, состоящий из некоторого количества (столько, сколько листов в прообразе) горизонтальных черточек (как на рис. 3.8.6, справа). Этот значок должен быть согласован (в очевидном смысле) с каждым значком на границе области. (Это условие будет автоматически выполняться, если граница области связна.)

4) Внешней области должен соответствовать пустой значок.

Приведенные требования также и достаточны: вклеивая площадки в окрестностях вершин, затем ленточки вдоль ребер и заклеивая листами дыры на месте областей, получаем замкнутую поверхность, вложенную в \mathbb{R}^4 , или, если хотим, отображенную в \mathbb{R}^3 .

Оказывается, этими условиями удобно пользоваться для построения поверхностей с заранее заданными свойствами. Для примера построим еще раз поверхность Боя. Пусть задача такова: предъявить погруженную в \mathbb{R}^3 поверхность с одной тройной точкой.

Нарисуем тройную точку в \mathbb{R}^3 (рис. 4.1):

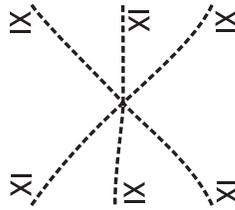


Рис. 4.1

Как минимум, мы должны как-то замкнуть свободные концы линий. Сделаем это с наименьшими затратами, а именно, заметим, что значки на соседних линиях отличаются сдвигом крестика на одну позицию – точно так же, как отличаются друг от друга значки на линии самопересечения по обе стороны точки отражения от складки. Нарисуем эти отражения – значки на складках определяются однозначно (рис. 4.2).

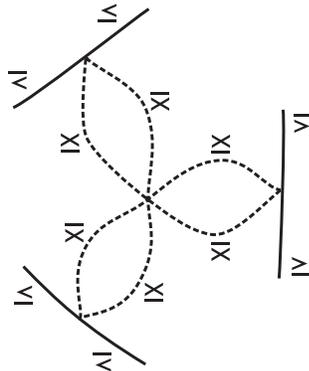


Рис. 4.2

Значки на соседних кусочках складок как раз такие, как по обе стороны от сборки. Вставляем сборки (рис. 4.3):

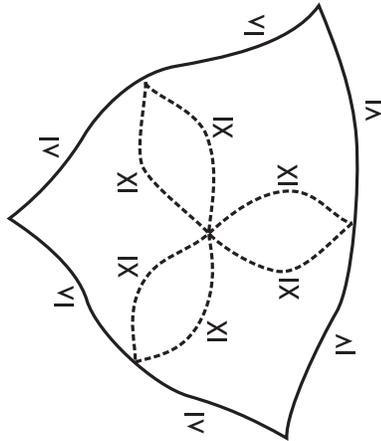


Рис. 4.3

Осталась одна черточка, висящая в пустоте. Мы могли бы сказать, что проектируем не на плоскость, а на сферу, но лучше мы добавим еще одну внешнюю складку (и по черточке сверху (или снизу) к каждому значку – рисовать их все я не буду; рис. 4.4).

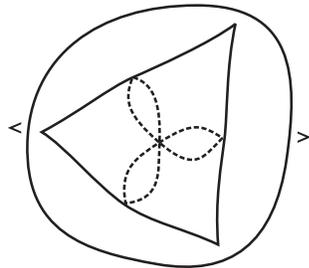


Рис. 4.4

Поверхность Боя готова. Построение занимает несколько минут и не требует усилий.

§5. ПОВЕРХНОСТИ С ДВУМЯ ТРОЙНЫМИ ТОЧКАМИ

Когда мы строили поверхность Боя, результат был заранее известен. Поэтому имеет смысл привести пример решения настоящей задачи. А именно, посмотрим, какие бывают поверхности с *двумя* тройными точками. Чтобы было интереснее, будем строить поверхности, вложенные в \mathbb{R}^4 (то есть такие, у которых при стандартной проекции

в \mathbb{R}^3 появляются две тройные точки; в этом же смысле будем говорить о линиях самопересечения). Ради упрощения картинок сменим точку зрения: будем проектировать не на плоскость, а на двумерную сферу, воспринимая ее как плоскость рисунка плюс бесконечно удаленная точка. Строить будем так, чтобы во внешнюю область диаграммы уходил ровно один слой.

Начнем с простейшей конфигурации – двух сокращающихся тройных точек (рис. 5.1):

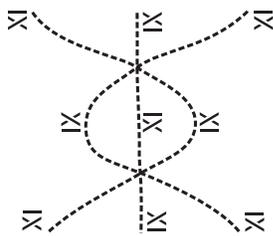


Рис. 5.1

Нетрудно заметить, что свободные концы линий можно замкнуть (рис. 5.2):

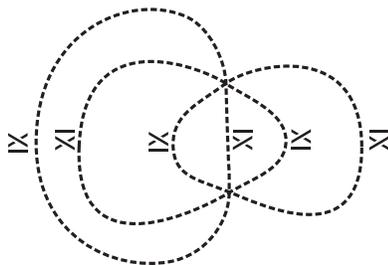


Рис. 5.2

Для того, чтобы выдержать правило * – все значки ориентированы слева направо – некоторые значки пришлось заменить на зеркальные; это легко понять, если увидеть, что эти линии можно замкнуть, только предварительно изогнув их, то есть создав максимум или минимум. Достраивать до сферы не будем: как это делается, увидим на втором примере. Получается поверхность с *тремя* линиями самопересечения. Можно ли построить поверхность с *двумя* тройными точками и *двумя* двойными линиями? Начнем с той же конфигурации и заметим, что

две пары хвостов можно замкнуть при помощи “отражения”; оставшаяся пара замыкается естественным образом (значок на этой линии необходимо обратить) – рис. 5.3:

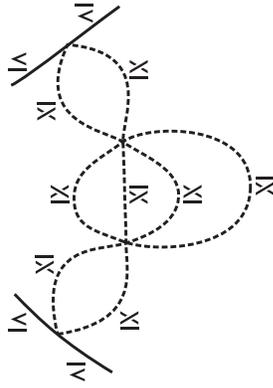


Рис. 5.3

Линия складки замыкается без труда; что же у нас получилось? Взглянем на сечение – прообраз линии, отмеченной точками. Для этого надо считать значки с тех линий, которые она пересекает (рис. 5.4):

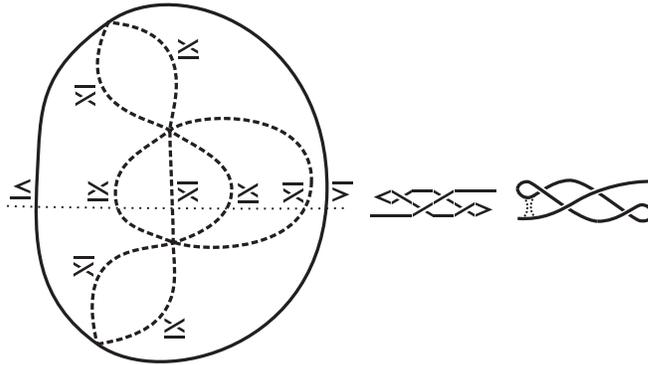
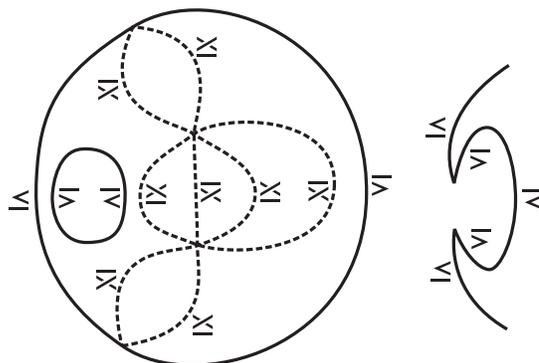


Рис. 5.4

В этом и заключается преимущество диаграмм данного вида – можно в любой момент посмотреть интересное нас сечение.

Нетрудно убедиться, что у нас тут две сферы (вторая натянута на ту сферу, на которую мы проектируем). Соединим их в одну при помощи трубочки – рис. 5.5.1:



5.5.1

5.5.2

Рис. 5.5

Рис. 5.5.2. Новая складка сокращается с самой левой складкой, образуя две сборки. Теперь распрявим картинку (рис. 5.6):

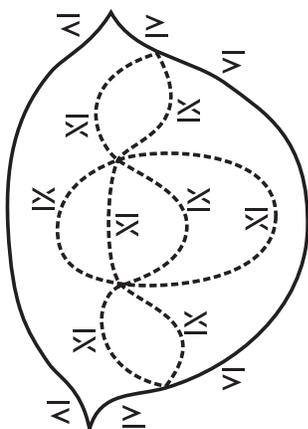


Рис. 5.6

Нетрудно заметить, что получившаяся поверхность не имеет седловых точек при проекции на вертикальную ось плоскости рисунка, следовательно, это сфера – с двумя тройными точками и двумя двойными линиями. В \mathbb{R}^4 она незаузлена.

Можно ли построить сферу с двумя тройными точками и *одной* двойной линией? Наверное, все бы получилось, если бы мы смогли, как в случае с поверхностью Боя, замкнуть все хвосты при помощи

отражений; для этого нам, очевидно, нужна какая-то другая исходная структура. Попробуем вот такую конфигурацию (рис. 5.7):

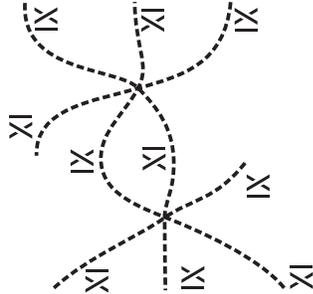


Рис. 5.7

Нижнюю тройную точку возьмем такую же, как раньше, тогда все остальные значки расставляются единственным образом (в \mathbb{R}^4 каждый третий значок у тройной точки однозначно определяется остальными двумя). Замкнем при помощи отражений; чтобы не запутаться в значках, нарисуем трансверсальные отрезки – согласно договоренности *, они все ориентированы слева направо (рис. 5.8).

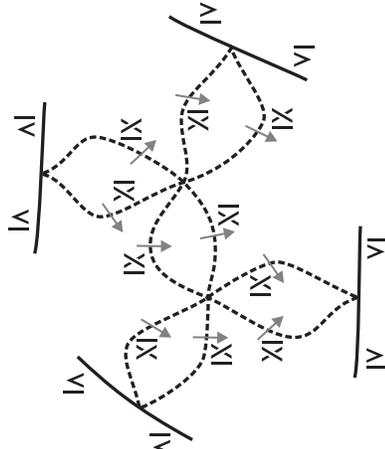


Рис. 5.8

Как видим, все удачно совпало: если отрезки на двойной линии по обе стороны от точки “отражения” согласованы (переходят друг в друга), крестики на значках противоположны – у одного проход, у другого переход; а если отрезки не согласованы, крестики должны совпадать –

именно так и получилось. Замкнем поверхность (понадобятся всего две сборки) и выпрямим ее (рис. 5.9):

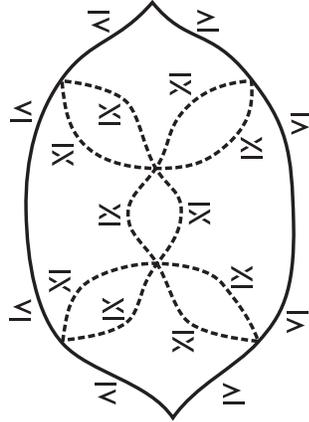


Рис. 5.9

В таком виде все подразумеваемые отрезки на линиях самопересечения рассогласованы вокруг точек отражений, поэтому крестики по сторонам точек отражения одинаковы.

Нетрудно убедиться, что получилась (незаузленная в \mathbb{R}^4) сфера с двумя тройными точками и ровно одной линией самопересечения (в \mathbb{R}^3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Carter, S. Kamada, M. Saito, *Surfaces in 4-Space*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 142. Low-Dimensional Topology III. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
2. Дж. Франсис, *Книжка с картинками по топологии*, Мир, М., 1991.
3. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, *Наглядная геометрия*, Наука, М., 1981.
4. K. Kawamura, *On relationship between seven types of Roseman moves*. — *Topology Appl.* **196**, Part B (2015), 551–557.

Tikhonov A. V. Planar diagrams of surface-links.

The paper discusses planar diagrams (called *charts* by S. Kamada) for embedded (in \mathbb{R}^4) or mapped in general position (in \mathbb{R}^3) surfaces and shows that the diagrams are very suitable for dealing with such surfaces and for easy construction of surface mappings with specific properties. A series of

examples is constructed, including an example of a sphere immersion with two triple points and a unique double line.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 121023
С.-Петербург, Россия
E-mail: `aleks_t_mail@bk.ru`

Поступило 1 ноября 2018 г.