Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 476, 2018 г.

В. И. Субботин

О ДВУХ КЛАССАХ МНОГОГРАННИКОВ С РОМБИЧЕСКИМИ ВЕРШИНАМИ

§1. Введение

Исторически первым известным расширением класса правильных (платоновых) многогранников являются равноугольно-полуправильные (архимедовы) многогранники. В настоящее время существует много работ, расширяющих и обобщающих класс правильных (платоновых) многогранников на случай невыпуклых многогранников, многогранников в многомерных и неевклидовых пространствах (см., например, [1–4] и библиографический список в этих работах; в [4] приведены также ссылки на работы, продолжающие исследования многогранников с правильными гранями Н. У. Джонсона и В. А. Залгаллера [3]).

В частности, одно из обобщений правильных многогранников представлено в работе автора [4]. В этой работе в основу положены свойства симметрии элементов многогранника: найдены все многогранники *сильно симметричные относительно вращения граней* (класс FS). Напомним определение этого класса.

Определение 1. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется сильно симметричным относительно вращения граней, если у каждой грани существует ось вращения многогранника, перпендикулярная этой грани и пересекающая ее относительную внутренность.*

В этом определении порядок оси вращения многогранника может быть меньше порядка оси вращения грани, рассматриваемой как фигура, отделённая от многогранника.

Заметим, что условие на оси вращения граней можно ослабить, [4]: класс FS получается также, если требовать, чтобы у каждой грани F имелась ось вращения, которая является осью вращения звезды грани F. Под звездой грани F (вершины V) понимается совокупность всех

Ключевые слова: сильно симметричный многогранник, ромбическая вершина, зеркально-поворотная ось вращения, TE-преобразование, RS- и RR-многогранники.

граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с гранью F (вершиной V). Таким образом, глобальное условие на оси вращения можно заменить локальной осесимметричностью звёзд граней. Грани, звёзды которых локально осесимметричны, будем называть *локально симметричными*.

Среди FS-многогранников имеются семь, каждый из которых не является комбинаторно эквивалентным правильным или равноугольно-полуправильным (архимедовым) многогранникам. Приведём рисунки этих семи многогранников из [4].

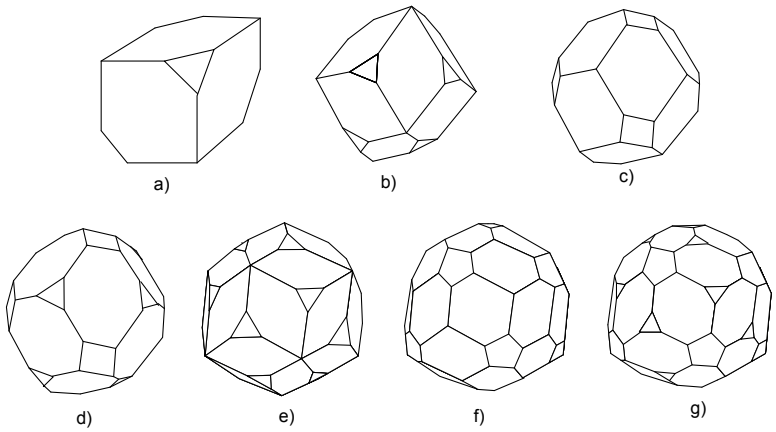

Рис. 1. FS-многогранники.

Каждый из этих многогранников получен отсечением вершин: a) – куба, b)–d) – ромбододекаэдра, e)–g) – ромботриаконтаэдра. Преобразование отсечения вершины определяется, например, в [5, с. 439].

В дальнейшем из них нам понадобятся только *усеченный ромбический триаконтаэдр* (рис. 1, g) и 2-*й полуусеченный ромбический триаконтаэдр* (рис. 1, f).

В настоящей работе вводятся два класса замкнутых выпуклых многогранников в E^3: класс RS – с симметричными ромбическими вершинами и локально симметричными гранями, и класс RR – с симметричными ромбическими вершинами и правильными гранями. Доказана полнота найденного списка RS-многогранников и существование некоторых многогранников класса RR.

§2. RS-многогранники

Введём необходимую терминологию.

Вершину V многогранника будем называть *n-ромбической*, если ее звезда состоит из n равных ромбов, имеющих общей вершиной V и сходящихся в этой вершине либо острыми, либо тупыми углами. Если n-ромбическая вершина расположена на нетривиальной оси вращения порядка n многогранника, то такую вершину будем называть *симметричной*.

Ромбическую вершину будем называть *изолированной*, если ее звезда не имеет общих элементов ни с какой из звезд других ромбических вершин многогранника.

Фигура, состоящая из ромбов звезды симметричной n-ромбической вершины, называется далее *симметричной n-ромбической шапочкой*, а сама вершина называется *вершиной шапочки*.

Определение 2. *RS-многогранником называется многогранник, у которого существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани, не входящие ни в одну из звезд этих вершин. Причём каждая грань, не входящая в звезду ромбической вершины, является локально симметричной.*

§3. Теорема о RS-многогранниках

Определение 3. *Преобразование отсечения вершины и последующего симметричного продления в своей плоскости получившейся в результате отсечения грани будем называть TE-*преобразованием.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Следующие девять типов многогранников исчерпывают класс RS*:

a)–b) 110-*гранники с* 5-*ромбическими вершинами*;

c) 90-*гранник с* 5-*ромбическими вершинами*;

d) 80-*гранник с* 5-*ромбическими вершинами*;

e) 12-*гранник – удлиненный ромбический додекаэдр с* 4-*ромбическими вершинами*;

f) 12-*гранник – удлиненный ромбоэдр с* 3-*ромбическими вершинами*;

g) 90-*гранник с* 5-*ромбическими вершинами*;

h) 80-*гранник с* 5-*ромбическими вершинами*;

k) 12-*гранник с* 4-*ромбическими вершинами*.

Многогранники, соответствующие типам a)–k), представлены на рисунке 2. На этом рисунке для наглядности многогранники g) и h) представлены фрагментом соединения ромбических шапочек: вершины, помеченные одинаковыми числами, в многограннике отождествляются.

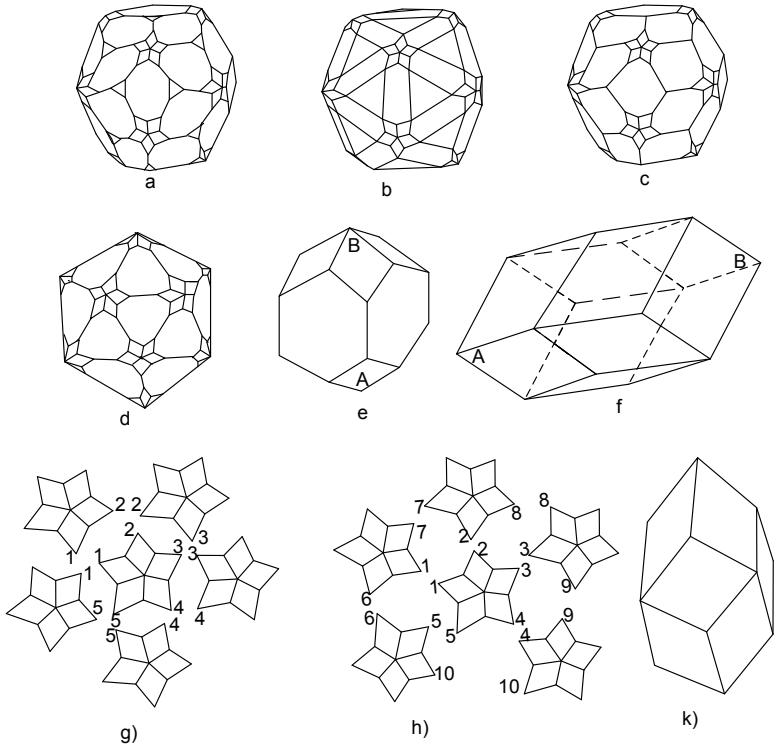

Рис. 2. RS-многогранники.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1. *Всякий многогранник класса RS может быть получен применением TE-преобразования к некоторому многограннику, сильно симметричному относительно вращения граней.*

Доказательство. Для наглядности доказательство проведём для случая изолированных ромбических вершин.

Рассмотрим некоторый RS-многогранник M. Пусть A – некоторая его изолированная n-ромбическая вершина. Проведём плоскость p, опорную к M в точке A, перпендикулярно оси вращения, проходящей через A. Сдвинем параллельно плоскость p в направлении от точки A к внутренности M до тех пор, пока эта плоскость не пройдет через меньшие диагонали всех ромбов ромбической шапочки с вершиной A. Удалим часть многогранника, лежащую по ту сторону от плоскости p, которая содержит вершину A. Пересечение плоскости p с M представляет собой грань F. Через внутренность F проходит ось вращения многогранника M. Каждое ребро грани F является стороной треугольника, входящего в звезду F. Эти треугольники образуют связное множество граней. Обозначим это множество Ω. Любые два соседние треугольника множества Ω имеют только одну общую вершину, которая является также и вершиной грани F. Ни через один из этих n треугольников не будет проходить ось вращения многогранника M.

Произведём это с каждой ромбической вершиной многогранника M. Получим многогранник M', у которого через каждую грань, исключая треугольные, проходят оси вращения. Рассмотрим один из треугольников T множества Ω. Продолжим три грани, имеющие общие ребра с T, до их пересечения в одной точке. Проделаем это с каждым треугольником каждого множества Ω. Получим новый многогранник M''.

Через центр каждой грани многогранника M'' будет проходить ось вращения многогранника. Таким образом, M'' является сильно симметричным относительно вращения граней.

Проведём теперь все построения в обратном порядке. Получим из многогранника M'' многогранник M с изолированными симметричными ромбическими вершинами. Лемма доказана. □

Замечания

1. Из проведённого рассуждения видно, что для каждой ромбической вершины V достаточно считать ось вращения, проходящую через V, *локальной* осью вращения фигуры, состоящей из ромбической шапочки с вершиной V и всех граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с ромбами этой шапочки.

2. Далее *преобразование удлинения* (вдоль оси вращения) многогранника означает такой сдвиг его двух равных симметричных ромбических шапочек вдоль оси вращения этих шапочек, что расстояние между вершинами шапочек увеличивается. При этом раздвигаемые

общие вершины ромбов шапочек, отличные от вершин шапочек, будут концами новых равных и параллельных оси сдвига рёбер.

3. *Удлиненный ромбический додекаэдр* – многогранник, полученный из ромбододекаэдра преобразованием удлинения вдоль оси AB 4-го порядка (рис. 2, e). *Удлиненный ромбоэдр* получается преобразованием удлинения вдоль оси AB ромбоэдра – многогранника, составленного из шести равных ромбов (рис. 2, f).

Доказательство. Так как все многогранники, сильно симметричные относительно вращения граней, перечислены, то достаточно выбрать из них те, которые допускают TE-преобразование.

Усеченный ромбический триаконтаэдр получен отсечением вершин степени 3 и степени 5 в ромбическом триаконтаэдре. Поэтому, применяя TE-преобразование к каждой трехгранной вершине каждой пятиугольной грани усеченного ромбического триаконтаэдра, получим многогранник пункта a). Если треугольные грани достаточно большие, то есть будут иметь общие вершины с ромбами, то получим многогранник b).

Второй полуусеченный ромбический триаконтаэдр получен из ромбического триаконтаэдра отсечением только вершин степени 5. Поэтому применяем TE-преобразование к вершинам 5-угольных граней 2-го полуусеченного ромбического триаконтаэдра. Получим многогранник пункта c).

Применяя TE-преобразование к достаточно большим 5-угольным граням 2-го полуусеченного ромбического триаконтаэдра, получим многогранник пункта g) с неизолированными ромбическими вершинами.

Напомним, что *усеченный икосаэдр* – один из полуправильных (архимедовых) многогранников, полученный отсечением вершин икосаэдра. Применяя аналогично TE-преобразование к 5-угольным граням усеченного икосаэдра, получим многогранник d). Для достаточно больших 5-угольных граней усечённого икосаэдра TE-преобразование даст 80-гранник пункта h) с неизолированными ромбическими вершинами.

Многогранник e) получается применением TE-преобразования к трехгранным углам верхнего и нижнего квадратных оснований прямоугольного параллелепипеда.

Так как отсечение 3-гранных вершин оснований прямоугольного параллелепипеда можно провести так, чтобы верхняя и нижняя ромбические шапочки имели общие граничные вершины, то получаем 12-гранник пункта k) с неизолированными ромбическими вершинами.

Многогранник f) получается применением TE-преобразования к трехгранным углам оснований правильной 6-угольной призмы; причём в этом случае отсечение вершин трёхгранных углов является полным, т. е. отсекающая плоскость проходит через концы соседних сторон 6-угольника. Теорема доказана. □

§4. RR-многогранники

Здесь мы докажем существование двух многогранников, которые принадлежат классу RR.

Две равные симметричные n-ромбические шапочки, расположенные друг к другу своими вогнутыми сторонами, будем называть *зеркально расположенными*, если они либо симметричны относительно плоскости, либо могут быть совмещены при помощи зеркального поворота вокруг оси, проходящей через их вершины.

Зеркальный поворот вокруг оси L – это композиция поворота вокруг оси L и отражения в плоскости, перпендикулярной этой оси.

Определение 4. *RR-многогранником называется такой многогранник, у которого существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани, которые не принадлежат ни одной звезде этих вершин. Причём каждая грань, не входящая в звезду ромбической вершины, является правильной.*

В данной статье мы ограничимся рассмотрением таких RR-многогранников, когда у них имеются две равные симметричные n-ромбические шапочки, которые зеркально расположены и могут быть совмещены при помощи зеркального поворота многогранника вокруг оси порядка $2n$, проходящей через их вершины. Вершины шапочек при этом изолированы, т. е. ромбы шапочек не имеют общих точек, шапочки отделены друг от друга одним замкнутым поясом правильных многоугольников одного типа. *Пояс*, или замкнутая последовательность граней, – это множество граней $F_1, F_2, \ldots, F_n$ такое, что любые две грани F_i, F_{i+1} и также F_1, F_n имеют только одно общее ребро, а любые две другие грани множества не имеют общих рёбер.

В этой части статьи мы докажем существование двух RR-многогранников, удовлетворяющих вышеперечисленным условиям.

1. Сначала докажем существование 20-гранника класса RR с зеркально-поворотной осью 10-го порядка, замкнутый пояс которого состоит из квадратов.

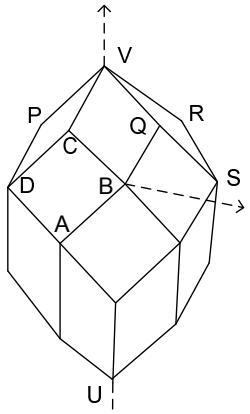

Рис. 3. RR-многогранник с зеркально-поворотной осью 10-го порядка.

Рассмотрим две равные 5-ромбические шапочки, расположенные симметрично так, что они обращены друг к другу вогнутыми сторонами и острые вершины ромбов шапочек, не лежащие на оси UV, совпадают.

Тогда указанный многогранник может быть получен путём поворота нижней шапочки на угол 36°, сдвига вниз по оси Oz на некоторое расстояние (так, что вершина A занимала до поворота положение B) и соединения отрезками прямых соответствующих вершин ромбов шапочек (рис. 3).

Для доказательства существования многогранника достаточно, в силу симметрии, доказать, что какой-нибудь из пространственных 4-угольников, например $ABCD$ – квадрат. Рассмотрим малую правильную пятиугольную пирамиду $VPCQR\ldots$ верхней 5-ромбической вершины. Обозначим половину острого угла ромба через α. Элементарными вычислениями получим, что

$$\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}\sin 54^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{5}-1),$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}+1}.$$

Ребра многогранника будем считать единичными. Тогда длина проекции бокового ребра ρ_m пирамиды $VPCQR...$ на основание равна:

$$\text{пр}\rho_m = \frac{\sin\alpha}{\cos 54_\circ} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\sqrt{\sqrt{5}-1}.$$

Находим высоту пирамиды $VPCQR$: $H_m = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$.

Находим аналогично боковое ребро, проекцию бокового ребра на основание и высоту большой правильной 5-угольной пирамиды $VDBS\ldots$:

$$\rho_b = \sqrt{\sqrt{5}+1}, \quad \text{пр}\rho_b = \frac{2}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}, \quad H_b = \frac{2}{\sqrt[4]{5}}.$$

Введём правую декартову прямоугольную систему координат, выбрав зеркально-поворотную ось UV за ось Oz, а ось Oy – проходящей через вершину B.

Обозначив через ε сдвиг вниз по оси Oz, находим координаты точек A, B, C, D.

$$A(\text{пр}\rho_b\sin 36^\circ; \text{пр}\rho_b\cos 36^\circ; -\varepsilon) = A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}; -\varepsilon\right),$$

$$B(0; \text{пр}\rho_b; 0) = B\left(0; \frac{2}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}; 0\right),$$

$$C(\text{пр}\rho_m\sin 36^\circ; \text{пр}\rho_m\cos 36^\circ; H_b - Hm)$$
$$= C\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1); \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}; \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right),$$

$$D(\text{пр}\rho_b\sin 72^\circ; \text{пр}\rho_b\cos 72^\circ; 0) = D\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1); \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}; 0\right).$$

Найдём координаты векторов, скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ и квадрат длины вектора $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}}; \varepsilon\right),$$
$$\overrightarrow{AD} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1); -\frac{1}{5-\sqrt{5}}; \varepsilon\right),$$
$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{2}}; \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}}; \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right),$$
$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \varepsilon^2 = 0, \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\sqrt[4]{5}},$$
$$|\overrightarrow{AC}|^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right)^2 = 2.$$

Следовательно, пространственный 4-угольник $ABCD$ – квадрат, так как по условию углы A и C – прямые.

Таким образом, этот многогранник существует и является единственным с точностью до подобия.

2. Докажем теперь существование 24-гранника класса RR с зеркально-поворотной осью 8-го порядка. Для этого многогранника пояс граней, отделяющих 4-ромбические шапочки, состоит из шестнадцати равносторонних треугольников (рис. 4, а).

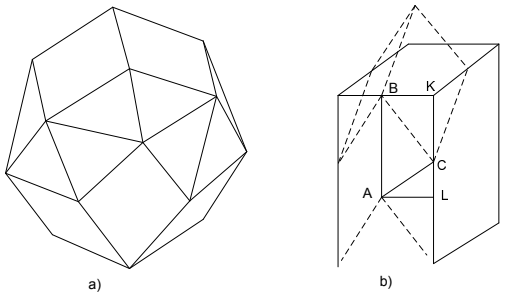

Рис. 4. RR-многогранник с зеркально-поворотной осью 8-го порядка.

Многогранник представим как полученный из правильной призмы с квадратным основанием при помощи TE-преобразования верхнего и нижнего оснований. При этом будем считать полученную нижнюю ромбическую шапочку повёрнутой вокруг оси вращения призмы на угол 45°. После поворота острая вершина одного из ромбов нижней шапочки займёт положение A (рис. 4, b).

Будем считать сторону основания призмы равной 2. Пространственное расстояние AB между вершинами многогранника обозначим m. Пусть отрезок BC – сторона ромба, лежащая на грани призмы – имеет длину $\sqrt{x^2+1}$. Очевидно, B – середина стороны основания призмы. Проекцию точки A на грань призмы обозначим A'. $A'L$ – перпендикуляр к боковому ребру призмы.

Так как должно выполняться условие $AB = BC = CA$ – условие равносторонности треугольной грани, то для доказательства существования многогранника достаточно показать, что существуют значения m и x, удовлетворяющие этим условиям. Так как до поворота точка A находилась на боковом ребре призмы, то расстояние AA' составляет $\sqrt{2}-1$. Условие равносторонности треугольной грани запишем в виде: $AB = BC, A'B = A'C$, или:

$$\begin{cases} m^2 = x^2 + 1, \\ 1 + \left(\sqrt{m^2 - (\sqrt{2}-1)^2} - x\right)^2 = m^2 - (\sqrt{2}-1)^2. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$x = \frac{m^2}{2\sqrt{m^2 - 3 + 2\sqrt{2}}},$$

$$3m^4 - 2(8 - 4\sqrt{2})m^2 + 12 - 8\sqrt{2} = 0.$$

Из последнего уравнения находим единственное значение

$$m = \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{2} + \sqrt{60 - 40\sqrt{2}}}{3}}.$$

Таким образом, и этот многогранник существует и является единственным с точностью до подобия.

Список литературы

1. H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*. Dover, N. Y., 1973.
2. P. R. Cromwell, *Polyhedra*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

3. В. А. Залгаллер, *Выпуклые многогранники с правильными гранями.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **2** (1967), 5–221.
4. В. И. Субботин, *Об одном классе сильно симметричных многогранников.* — Чебышевский сборник, **17**, No. 4 (2016), 132–140.
5. Г. М. Циглер, *Теория многогранников.* МЦНМО, М., 2014.

Subbotin V. I. On two classes of polyhedra with rhombic vertices.

Two classes of closed convex polyhedra in E^3 (RS- and RR-polyhedra) are introduced; the stars of some vertices of the polyhedra under consideration consist of equal rhombi. In addition to the complete enumeration of RS-polytopes, the proof of the existence of two polyhedra of the class RR is given.

Южно-Российский государственный
политехнический университет (НПИ)
им. М. И. Платова,
ул. Просвещения 132
Новочеркасск 346400, Россия
E-mail: geometry@mail.ru

Поступило 6 июля 2018 г.