

М. Ю. Никанорова, Ю. Р. Романовский

О РАЗРЕЗАНИЯХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

§1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Под *разрезанием* многоугольника мы понимаем ортогональную сеть такую, что вершины многоугольника находятся в узлах этой сети, а ребра составлены из диагоналей или сторон ее прямоугольных ячеек. *Ортогональной сетью* мы называем два конечных семейства прямых линий на плоскости таких, что линии одного и того же семейства параллельны, а линии разных семейств ортогональны. *Узлом* сети называется точка пересечения прямых линий из ее различных семейств. *Ячейкой* сети называется пустой прямоугольник, вершинами которого являются ее узлы. Рассматривая разрезание многоугольника, мы считаем, что все линии разрезающей ортогональной сети пересекают многоугольник, и отождествляем сеть с наименьшим прямоугольником R , содержащим все узлы и ячейки сети. Этот прямоугольник мы называем *описанным*. Примеры разрезанных пятиугольников показаны на рисунке 1.

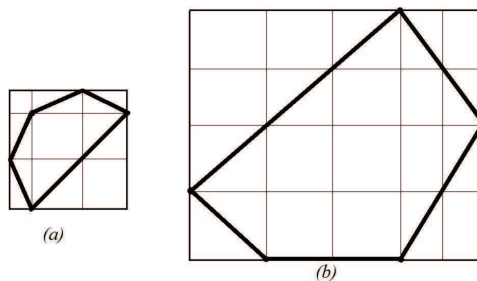


Рис. 1. Примеры разрезанных пятиугольников.

Ключевые слова: многоугольники, разрезания, ортогональные сети, триангуляции.

Дан выпуклый многоугольник, можно ли разрезать его в указанном смысле? Этот вопрос был поставлен Н. Ю. Додоновым в связи с циклом работ [1–3]. Пример неразрезаемого выпуклого многоугольника был построен В. С. Кальницким в [4].

1.2. В этой статье мы изучаем *диагональные* разрезания: все ребра выпуклого многоугольника имеют только диагональные направления как на рис. 1(а). *Траекториями* или *орбитами* в разрезанном многоугольнике мы называем вписанные в него ломаные, вершины которых совпадают с узлами сети, расположенными на границе многоугольника, а звенья расположены на прямых линиях той же сети.

Диагонально разрезанный многоугольник имеет четыре *опорные* вершины A, B, C, D , расположенные на четырех различных сторонах описанного прямоугольника R (см. рис. 2). Из каждой опорной вершины внутрь многоугольника выходит пара траекторий в направлениях ортогональной сети. После конечного числа отражений от границы (сумма углов падения и отражения равна 90°) эти две траектории могут либо остановиться в опорных вершинах, либо встретиться и образовать замкнутую траекторию. В §3 мы докажем, что опорная вершина разрезанного пятиугольника не может лежать на замкнутой орбите. Доказательство опирается на понятие портрета разрезанного многоугольника, которое было введено в работе [4]. В §2 мы напомним это понятие и применим его к анализу числа орбит и их поведению.

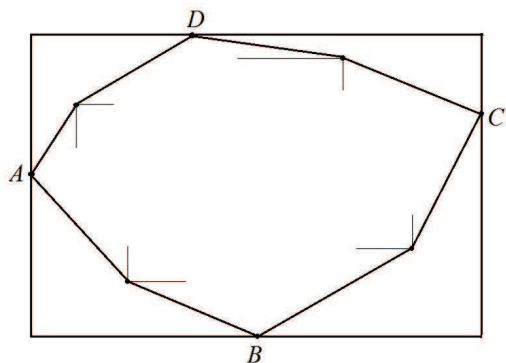


Рис. 2. Опорные вершины разрезанного многоугольника.

Авторы признательны В. С. Кальницкому и М. Ю. Звагельскому за чтение рукописи и полезные замечания. Мы благодарны В. С. Кальницкому за вовлечение в проблематику, а также за помощь в подготовке текста и чертежей.

§2. ПОРТРЕТЫ РАЗРЕЗАННЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

2.1. Ортогональная сеть называется *правильной*, если все ее ячейки являются квадратами. Очевидно, для любой ортогональной сети R существует кусочно-линейный гомеоморфизм $f: R \rightarrow R'$, который отображает ее на правильную сеть R' . Сужение гомеоморфизма f на каждую ячейку является аффинным отображением на ячейку правильной сети. *Портретом* разрезанного многоугольника называется его образ под действием гомеоморфизма f . На рисунке 3 изображен портрет разрезанного пятиугольника из рисунка 1(а).

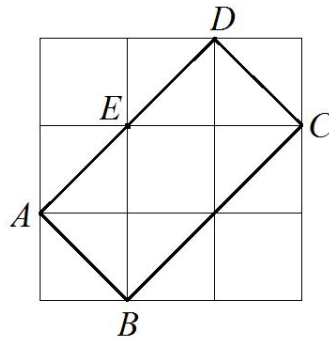


Рис. 3. Портрет разрезанного пятиугольника.

Портрет любого диагонально разрезанного многоугольника представляет собой прямоугольник $ABCD$ с отмеченными точками на его сторонах. Вершины A, B, C, D соответствуют опорным вершинам многоугольника, неопорные вершины переходят в точки на сторонах. Если диагональ квадратной ячейки рассматривать в качестве единицы измерения, то портрет можно отождествить со следующей *схемой*: прямоугольник целого размера $m \times n$ с отмеченными целыми точками на его сторонах (см. рис. 4).

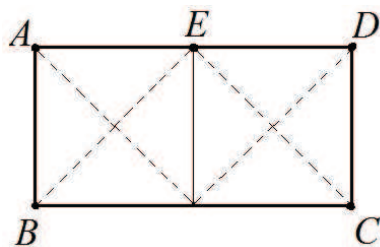


Рис. 4. Схема размера 2×1 , соответствующая портрету из рисунка 3.

2.2. Возникает следующий вопрос. Дана схема, соответствует ли она портрету диагонально разрезанного многоугольника? Ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицательный. Схема, показанная на рисунке 5, не соответствует портрету, так как ломаные, выходящие из отмеченной точки E , образуют замкнутую орбиту. В следующем параграфе мы докажем, что неопорная вершина разрезанного пятиугольника должна находиться на траектории, соединяющей пару опорных вершин. Доказательство использует некоторые простые свойства прямоугольников целого размера $m \times n$, которые мы обсудим ниже.

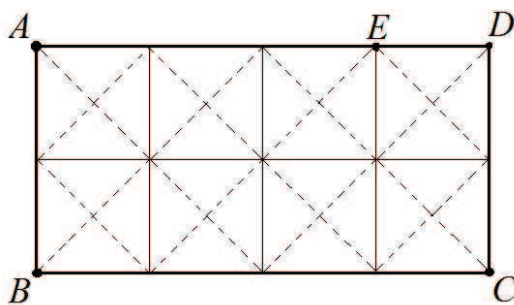


Рис. 5. Схема размера 4×2 с отмеченной нечетной точкой E на стороне AD длины 4.

Каждая орбита (траектория) в таком прямоугольнике состоит из конечного числа диагоналей его ячеек. Назовем это число *длиной орбиты* (траектории). Например, на рисунке 5 мы видим две незамкнутые траектории длины 4 и одну замкнутую орбиту длины 8. Каждая из двух незамкнутых траекторий соединяет пару вершин прямоугольника $ABCD$, а вместе они покрывают все четные граничные точки. Замкнутая орбита покрывает все нечетные граничные точки. В общем случае ясно, что числа $m = |AD| = |BC|$ и $n = |AB| = |DC|$ должны делить длину каждой из двух незамкнутых траекторий, а числа $2m$ и $2n$ должны делить длину каждой замкнутой орбиты. Пусть d обозначает наибольший общий делитель целых чисел m и n , т. е. $m = d \cdot p$, $n = d \cdot q$, $\text{НОД}(p, q) = 1$. Нетрудно понять, что количество орбит зависит от d , а их поведение около вершин прямоугольника $ABCD$ зависит от четности p и q .

2.3. Пусть $d = 1$. В этом случае прямоугольник не содержит замкнутых орбит. Если оба размера $m = p$ и $n = q$ – нечетные, то незамкнутые траектории соединяют противоположные вершины прямоугольника. Если же один из размеров является четным, то эти траектории соединяют вершины, инцидентные одной и той же стороне четного размера.

2.4. Пусть $d = 2$. В этом случае прямоугольник содержит ровно одну замкнутую орбиту. На рисунке 6 показаны четыре пары узлов A_i, B_i, C_i, D_i ($i = 1, 2$) этой орбиты, ближайшие к вершинам A, B, C, D соответственно. Варианты I, II и III отличаются друг от друга порядком следования узлов около вершин B, C и D при перемещении вдоль ориентированной замкнутой орбиты. Ориентация орбиты фиксирована порядком следования узлов около вершины A . Вариант I соответствует нечетному p и четному q . Вариант II соответствует четному p и нечетному q . Вариант III возникает, когда p и q – нечетные числа. Для доказательства рассмотрим две части ориентированной замкнутой орбиты. Первая начинается в узле A_1 и заканчивается в B_2 . Ее длина L_1 должна быть нечетным кратным размеру $n = 2q$, т. е. $L_1 = (2k + 1) \cdot 2q$. Другая часть той же орбиты начинается в узле A_2 и заканчивается в B_1 . Ее длина L_2 является четным кратным размеру $m = 2p$, т. е. $L_2 = 2l \cdot 2p$. В случае I имеем $L_1 = L_2$ или $(2k + 1) \cdot q = 2l \cdot p$, т. е. q является четным. В случаях II и III, очевидно, $L_1 = L_2 + 2$ или $(2k + 1) \cdot q = 2l \cdot p + 1$, т. е. q является нечетным. Четность или нечетность величины p следует из тех же соображений.

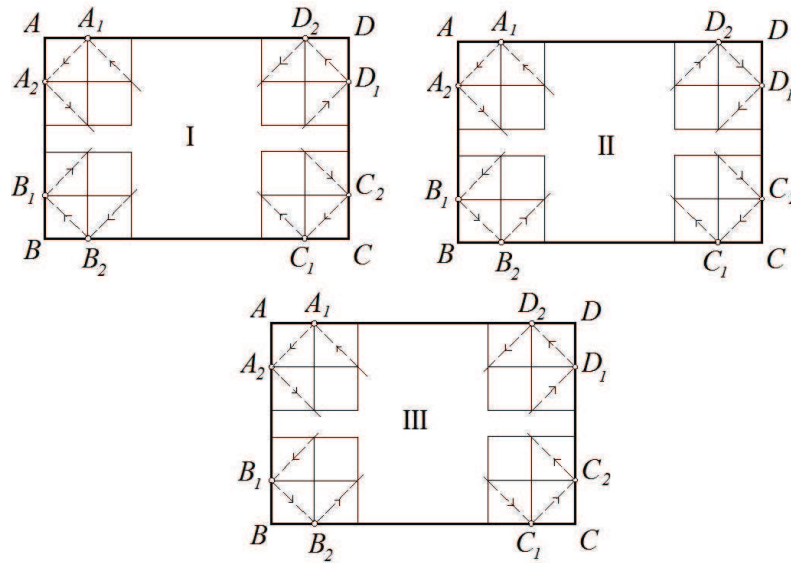


Рис. 6. Три различных порядка на узлах ориентированной замкнутой орбиты.

Каждая из двух незамкнутых траекторий совершает $p + q - 2$ отражений. Как и в случае $d = 1$, если обе величины p и q – нечетные, то эти траектории соединяют противоположные вершины прямоугольника. Если же одна из величин p или q является четной, они соединяют вершины, инцидентные одной и той же стороне четной величины. Можно сказать, что замкнутая орбита превращается в перекрученную окаймляющую ленту для каждой из двух траекторий, соединяющих пару вершин прямоугольника. Количество перекруток равно числу отражений $p + q - 2$. Его четность или нечетность определяется четностью p и q .

Легко видеть, что при $d \geq 3$ прямоугольник содержит $d - 1$ замкнутых орбит. Однако анализ этого случая не понадобится нам в дальнейшем.

§3. РАЗРЕЗАНИЯ ПЯТИУГОЛЬНИКОВ

3.1. Используя сведения из предыдущего параграфа, мы доказываем здесь следующую теорему.

Теорема. Пусть выпуклый пятиугольник $ABCDE$ диагонально разрезан ортогональной сетью так, что четыре его вершины A , B , C и D лежат на различных сторонах описанного прямоугольника. Тогда пятая вершина E расположена на траектории, которая соединяет две из четырех опорных вершин A , B , C и D .

Доказательство. Предположим противное: ломаные, выпущенные из вершины E , встречаются и образуют замкнутую орбиту. Обозначим через A_i , B_i , C_i и D_i ($i = 1, 2$) узлы этой орбиты, ближайшие к опорным вершинам A , B , C и D соответственно (см. рис. 7).

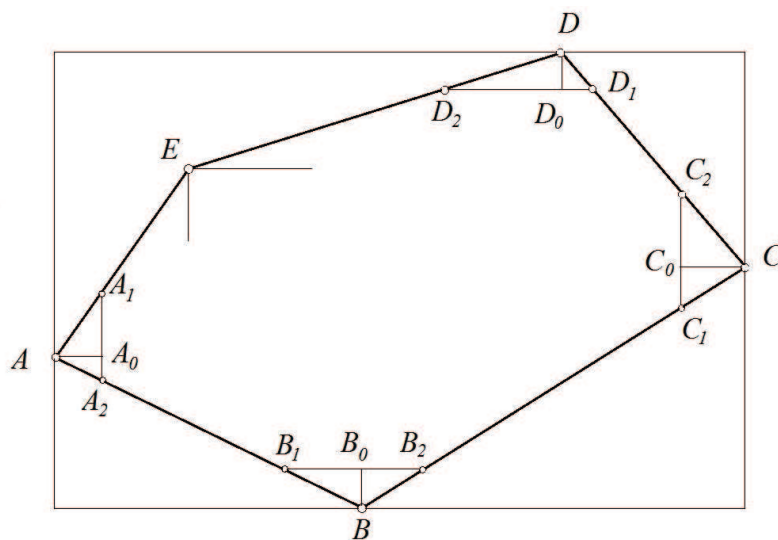


Рис. 7. Узлы предполагаемой замкнутой орбиты, ближайшие к опорным вершинам A , B , C и D .

Если количество замкнутых орбит больше единицы, упростим разрезание, удаляя все те замкнутые орбиты, которые не содержат вершины E . Схема такого разрезания (см. §2) должна иметь размер $m \times n$,

где $m = 2p$, $n = 2q$, $\text{НОД}(p, q) = 1$. Без потери общности допустим, что образ вершины E на схеме находится на нечетном месте стороны длины $m = 2p$. Согласно §2 мы имеем три случая:

- (I) p – нечетное, q – четное;
- (II) p – четное, q – нечетное;
- (III) p и q – нечетные.

Покажем, что ни в одном из этих случаев E не является вершиной пятиугольника.

I. В этом случае траектория, выпущенная из вершины A , после $p + q - 2$ отражений от границы пятиугольника должна остановиться в вершине B . После того же числа отражений вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ должен перейти в вектор $\overrightarrow{B_1B_2}$ (см. рис. 6(I)). Применяя последовательно теорему Фалеса, получаем

$$\frac{|A_0A_1|}{|A_0A_2|} = \frac{|B_0B_1|}{|B_0B_2|}.$$

Используя равенство углов $A_0AA_2 = B_0B_1B$, находим

$$\frac{|A_0A_2|}{|A_0A|} = \frac{|B_0B|}{|B_0B_1|}.$$

Из этих двух пропорций следует, что

$$\frac{|A_0A_1|}{|A_0A|} = \frac{|B_0B|}{|B_0B_2|},$$

т. е. сторона AE параллельна стороне BC .

Точно так же заметим, что траектория, выпущенная из вершины C , должна остановиться в вершине D , а вектор $\overrightarrow{C_1C_2}$ должен перейти в вектор $\overrightarrow{D_1D_2}$. Применяя снова теорему Фалеса и используя равенство углов $C_0CC_2 = D_0D_1D$, получаем

$$\frac{|C_0C_1|}{|C_0C_2|} = \frac{|D_0D_1|}{|D_0D_2|}, \quad \frac{|C_0C_2|}{|C_0C|} = \frac{|D_0D|}{|D_0D_1|}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{|C_0C_1|}{|C_0C|} = \frac{|D_0D|}{|D_0D_2|},$$

т. е. сторона DE (так же как и сторона AE) параллельна стороне BC .

Но это противоречит тому, что E является вершиной пятиугольника.

II. В этом случае траектория, выпущенная из вершины B , должна остановиться в вершине C , а вектор $\overrightarrow{B_1B_2}$ должен перейти в вектор

$\overrightarrow{C_1C_2}$ (см. рис. 6(II)). Теорема Фалеса и равенство углов $B_0BB_2 = C_0C_1C$ приводят к пропорциям

$$\frac{|B_0B_1|}{|B_0B_2|} = \frac{|C_0C_1|}{|C_0C_2|}, \quad \frac{|B_0B_2|}{|B_0B|} = \frac{|C_0C|}{|C_0C_1|},$$

из которых следует, что

$$\frac{|B_0B_1|}{|B_0B|} = \frac{|C_0C|}{|C_0C_2|},$$

т. е. стороны AB и CD параллельны, что эквивалентно равенству углов $A_0AA_2 = D_0D_1D$.

Траектория, выпущенная из вершины A , должна остановиться в вершине D , а вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ должен перейти в вектор $\overrightarrow{D_1D_2}$. Теорема Фалеса вместе с равенством углов $A_0AA_2 = D_0D_1D$ приводят к пропорциям

$$\frac{|A_0A_1|}{|A_0A_2|} = \frac{|D_0D_1|}{|D_0D_2|}, \quad \frac{|A_0A_2|}{|A_0A|} = \frac{|D_0D|}{|D_0D_1|},$$

из которых имеем

$$\frac{|A_0A_1|}{|A_0A|} = \frac{|D_0D|}{|D_0D_2|},$$

т. е. стороны AE и ED лежат на одной прямой. Это противоречит тому, что E является вершиной пятиугольника.

III. В этом случае траектория, выпущенная из вершины A , должна остановиться в вершине C , а вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ должен перейти в вектор $\overrightarrow{C_2C_1}$ (см. рис. 6(III)). Траектория, выпущенная из вершины B , должна остановиться в вершине D , а вектор $\overrightarrow{B_1B_2}$ должен перейти в вектор $\overrightarrow{D_2D_1}$. Теорема Фалеса дает две пропорции:

$$\frac{|A_0A_1|}{|A_0A_2|} = \frac{|C_0C_2|}{|C_0C_1|}, \quad \frac{|B_0B_1|}{|B_0B_2|} = \frac{|D_0D_2|}{|D_0D_1|}.$$

Равенства углов $A_0AA_2 = B_0B_1B$, $B_0B_2B = C_0CC_1$, $C_0CC_2 = D_0D_1D$ дают еще три пропорции:

$$\frac{|A_0A_2|}{|A_0A|} = \frac{|B_0B|}{|B_0B_1|}, \quad \frac{|B_0B_2|}{|B_0B|} = \frac{|C_0C|}{|C_0C_1|}, \quad \frac{|C_0C_2|}{|C_0C|} = \frac{|D_0D|}{|D_0D_1|}.$$

Из этих пяти пропорций находим

$$\frac{|A_0A_1|}{|A_0A|} = \frac{|D_0D|}{|D_0D_2|},$$

т. е. стороны AE и ED лежат на одной прямой. Это снова противоречит тому, что E является вершиной пятиугольника. Теорема доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Ю. Додонов, А. В. Масальских, *Реконструкция параметрических поверхностей, заданных таблично, посредством сдвигов и сжатий одной функции*. — Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 1. Ч. 1 (2014), 232–248.
2. Н. Ю. Додонов, А. В. Масальских, *Применение одного класса агрегатов приближения сумматорного типа для реконструкции параметрических поверхностей*. — Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 2 (2014), 59–75.
3. Н. Ю. Додонов, *О равномерном приближении на \mathbb{R}^2 непрерывных банаховозначных функций*. — Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. Вып. 2 (2005), 11–24.
4. В. С. Кальницкий, *Прямоугольная триангуляция многоугольников*. — Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия **3(61)**, вып. 4 (2016), 594–601.

Nikanorova M. Yu., Romanovski Yu. R. On subdivisions of polygons.

By a subdivision of a polygon, we mean an orthogonal net such that the vertices of the polygon are nodes of the net, and the edges are composed of diagonals and sides of its cells. We study the subdivisions of convex polygons in which all edges have only diagonal directions. Such a polygon has four supporting vertices disposed on the different sides of the described rectangular. From each nonsupporting vertex, toward the interior of the polygon, there emanates a pair of broken lines in the directions of the orthogonal net. After a finite number of reflections in the boundary (the sum of the incidence and reflection angles is equal to 90°), the broken lines of such a pair can either get stuck at the supporting vertices or meet each other and form a closed orbit. It is proved that in the case of the pentagon, the second variant is not possible.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: mshanikanorova@yandex.ru
E-mail: y.romanovsky@spbu.ru

Поступило 1 декабря 2018 г.