Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 476, 2018 г.

В. М. Нежинский, В. В. Нестерёнок

ПРОИЗВЕДЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Для ориентированных одномерных узлов в трёхмерном евклидовом пространстве определена операция, аналогичная коммутаторному умножению петель, и изучены её простейшие свойства.

1. Предварительный материал. *Зацеплением* называется ориентированное гладкое компактное одномерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^3$, каждая компонента связности которого диффеоморфна окружности. Если зацепление состоит из одной компоненты, то оно называется также *узлом*. В частности, окружность с центром $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ радиуса единица, расположенная в плоскости

$$\mathbb{R}^2 \times 0 \ (= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times 0) \subset \mathbb{R}^3 \ (= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}),$$

стандартно ориентированная, является узлом; этот узел мы будем называть *стандартным тривиальным*.

Изотопией пространства $\mathbb{R}^3$ называется гладкое отображение

$$F\colon \mathbb{R}^3 \times I \to \mathbb{R}^3,$$

где $I = [0,1]$, сужение которого на $\mathbb{R}^3 \times t$ для любого $t \in I$ есть диффеоморфизм, и такое, что $F(x,0) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}^3$. Зацепления L_0 и L_1 называются *изотопными*, если существует изотопия F пространства $\mathbb{R}^3$, сужение которой на $\mathbb{R}^3 \times 1$ отображает с сохранением ориентации каждую компоненту подмногообразия $L_0 \times 1$ пространства $\mathbb{R}^3 \times 1$ на соответствующую компоненту зацепления L_1 и удовлетворяет условию $F(L_0 \times 1) = L_1$. Узел называется *тривиальным*, если он изотопен стандартному тривиальному узлу.

Хорошо известно и нетрудно доказать, что *изотопия зацеплений есть отношение эквивалентности*.

Ключевые слова: узел, связная сумма узлов, произведение узлов, тройка Конвея.

2. Множество $\mathcal{K}$ и отображение $[\ ,\ ]$. Рассмотрим множество узлов и разобъём его на изотопические классы. Полученное множество классов мы и обозначаем через $\mathcal{K}$.

Определим отображение

$$[\ ,\ ]\colon \mathcal{K}\times\mathcal{K}\to\mathcal{K}$$

следующим образом. Пусть $\alpha,\beta\in\mathcal{K}$. В классе α выберем какой-нибудь узел, содержащийся в полупространстве

$$\mathbb{R}^3_- = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x\leqslant 0\},$$

пересечение которого с плоскостью $0\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ($\subset\mathbb{R}^3$) есть отрезок $0\times[-1,1]\times 0$, стандартно ориентированный, и обозначим этот узел через K_1. В классе β выберем какой-нибудь узел, содержащийся в полупространстве

$$\mathbb{R}^3_+ = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x\geqslant 0\},$$

пересечение которого с плоскостью $0\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ есть отрезок $0\times 0\times[-1,1]$, стандартно ориентированный, и обозначим этот узел через K_2. (Что такие узлы в классах α и β найдутся – очевидно.) Нетрудно видеть, что:

(а) в полупространстве $\mathbb{R}^3_-$ существует гладкая ориентированная поверхность V_1, такая что пара (V_1,K_1) диффеоморфна паре

$$(S^1\times[-1,1], S^1\times 0),$$

что коэффициент зацепления какой-нибудь (а значит, и любой) компоненты связности её края с узлом K_1 равен нулю, что

$$V_1\cap(0\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = 0\times[-1,1]\times[-1,1],$$

$$(\partial V_1)\cap(0\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = 0\times[-1,1]\times(\{-1\}\cup\{1\})$$

и что ориентация поверхности V_1 задаёт стандартную ориентацию квадрата $0\times[-1,1]\times[-1,1]$;

(б) в полупространстве $\mathbb{R}^3_+$ существует гладкая ориентированная поверхность V_2, такая что пара (V_2,K_2) диффеоморфна паре

$$(S^1\times[-1,1], S^1\times 0),$$

что коэффициент зацепления какой-нибудь (а значит, и любой) компоненты связности её края с узлом K_2 равен нулю, что

$$V_2\cap(0\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = 0\times[-1,1]\times[-1,1],$$

$$(\partial V_2)\cap(0\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = 0\times(\{-1\}\cup\{1\})\times[-1,1]$$

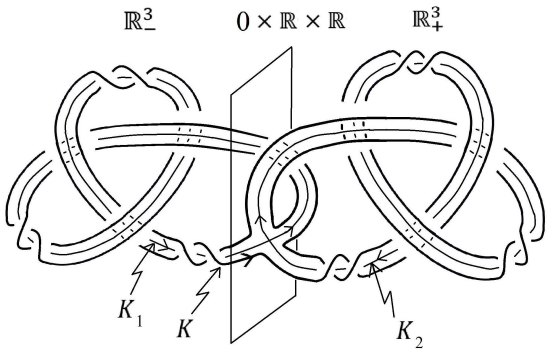


Рис. 1

и что ориентация поверхности V_2 задаёт стандартную ориентацию квадрата $0 \times [-1,1] \times [-1,1]$.

Ясно, что $V_1 \cup V_2$ есть ориентированная поверхность, край которой гомеоморфен окружности. Снабдим кривую $\partial(V_1 \cup V_2)$ ориентацией, определяемой ориентацией поверхности $V_1 \cup V_2$, и сгладим углы этой кривой. Получим узел; обозначим его через K. Класс узла K и есть $[\alpha, \beta]$.

Стандартная проверка показывает, что это определение корректно.

Изучению отображения $[\ ,\ ]$ и посвящена эта работа.

3. Замечание. Отображение $[\ ,\ ]$ из пункта 2 допускает прямое обобщение на случай *сферических зацеплений коразмерностей больших или равных двум.* Именно это более общее определение было дано и изучалось первым из авторов в середине 1970-х годов. Результаты докладывались тогда же в ЛГУ в семинаре по алгебраической и дифференциальной топологии, руководителем которого был В. А. Рохлин, но опубликованы не были.

4. Свойства отображения $[\ ,\ ]$**.**

4.1. Обозначим через ω изотопический класс стандартного тривиального узла. *Для любого элемента $\alpha \in \mathcal{K}$ имеет место равенство*

$$[\alpha, \omega] = \omega.$$

Мы воспользуемся обозначениями, введёнными в пункте 2. Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что перестройка поверхности $V_1 \cup V_2$ вдоль K_2 превращает её в диск и что, поскольку узел K_2 тривиален, эту перестройку можно осуществить в $\mathbb{R}^3 \backslash K$.

4.2. Для любого класса $\alpha \in \mathcal{K}$ через $-\alpha$ мы будем обозначать класс узла, полученного заменой ориентации какого-нибудь представителя класса α на противоположную.

Для любых классов $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ имеет место равенство

$$[\beta, \alpha] = -[\alpha, \beta].$$

Это следует из простых геометрических соображений.

4.3. Определим отображение

$$\nabla \colon \mathcal{K} \to \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$$

правилом: изотопическому классу узла мы поставим в соответствие его полином Александера–Конвея. (Определение полинома Александера–Конвея содержится, например, в [1, стр. 284]; в [1] этот полином назван *нормированным многочленом Александера.*) Что это определение корректно – хорошо известно.

Для любых элементов $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ имеет место равенство

$$\nabla([\alpha, \beta]) = 1.$$

Доказательство. Простые прямые рассуждения, использующие конструкцию из пункта 2, показывают, что матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

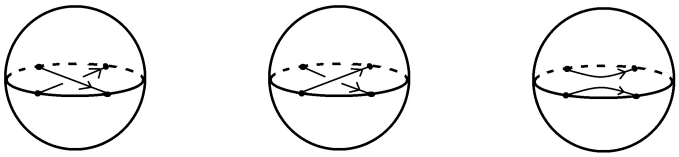
является матрицей Зейферта любого узла, изотопический класс которого принадлежит образу отображения $[\ ,\ ]$. (Определение матрицы Зейферта узла имеется, например, в [1, стр. 283].) Согласно упомянутому выше определению полинома Александера–Конвея имеем:

$$\nabla([\alpha, \beta])(t) = \det\left(t^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - t^{-1/2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Остаётся заметить, что

$$\det\left(t^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - t^{-1/2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

4.4. В этом пункте мы сначала определим два отображения, нужные для формулировки основного результата этого пункта, затем сформулируем этот результат и докажем его. Через $\mathcal{L}$ мы будем обозначать множество изотопических классов всех зацеплений. (Ясно, что $\mathcal{L} \supset \mathcal{K}$.)



$L_+ \cap D$ $L_- \cap D$ $L_0 \cap D$

Рис. 2

Последовательность зацеплений L_+, L_-, L_0 называется *тройкой Конвея*, если в пространстве $\mathbb{R}^3$ существует (метрический) шар D, такой что пересечения этих зацеплений с шаром D имеют вид, изображённый на рисунке 2, и что

$$L_+ \cap (\mathbb{R}^3 \backslash D) = L_- \cap (\mathbb{R}^3 \backslash D) = L_0 \cap (\mathbb{R}^3 \backslash D).$$

Наше первое отображение – это отображение

$$\mathcal{P} \colon \mathcal{L} \to \mathbb{Z}[l^{-1}, l, m^{-1}, m],$$

обладающее следующими свойствами:

(i) для любых классов α, β, $\gamma \in \mathcal{L}$, если существует тройка Конвея L_+, L_-, L_0, такая что $L_+ \in \alpha$, $L_- \in \beta$ и $L_0 \in \gamma$, то

$$l \cdot \mathcal{P}(\alpha) + l^{-1} \cdot \mathcal{P}(\beta) + m \cdot \mathcal{P}(\gamma) = 0;$$

(ii) справедливо равенство

$$\mathcal{P}(\omega) = 1,$$

где ω – изотопический класс стандартного тривиального узла. Что отображение $\mathcal{L} \to \mathbb{Z}[l^{-1}, l, m^{-1}, m]$, обладающее свойствами (i) и (ii), существует и что оно единственно – хорошо известно; ср., например, [2, §1, Theorem].

Наше второе отображение – это отображение

$$D \colon \mathcal{K} \to \mathcal{L},$$

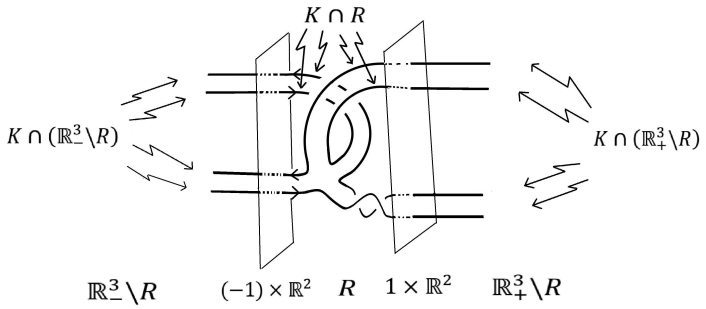


Рис. 3

задаваемое следующим правилом. Пусть $\alpha \in \mathcal{K}$ и K – какой-нибудь представитель класса α. Возьмём какую-нибудь (замкнутую) трубчатую окрестность узла K и обозначим через K_1 какой-нибудь узел, обладающий следующими свойствами: узел K_1 содержится в крае этой трубчатой окрестности; узел K_1 получен послойным сдвигом узла K в этой трубчатой окрестности с заменой ориентации на противоположную; коэффициент зацепления узла K с узлом K_1 равен нулю. Что такой узел существует – очевидно. Ясно, что $K_1 \cap K = \varnothing$, так что $K_1 \cup K$ – зацепление. Изотопический класс этого зацепления и есть $D(\alpha)$. Что это определение корректно – очевидно.

Основной результат этого пункта состоит в том, что *для любых классов $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ имеет место равенство*

$$\mathcal{P}\big([\alpha, \beta]\big) = \frac{m}{l^{-1} + l}\Big(\mathcal{P}(D(\alpha \# \beta)) - \mathcal{P}(D(\alpha)) - \mathcal{P}(D(\beta))\Big),$$

где через $\#$ обозначено связное суммирование.

Докажем эту формулу.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ и K – какой-нибудь узел, представляющий класс $[\ ,\ ]$ и построенный (по классам α и β) как в пункте 2.

Положим

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -1 \leqslant x \leqslant 1\};$$

см. рисунок 3; без умаления общности можно считать, что множество $K \cap R$ имеет вид, ясный из этого рисунка.

В дальнейшем на рисунках ни плоскостей $(-1) \times \mathbb{R}^2$ и $1 \times \mathbb{R}^2$, ни множеств $K \cap (\mathbb{R}^3_- \setminus R)$ и $K \cap (\mathbb{R}^3_+ \setminus R)$ мы изображать не будем.

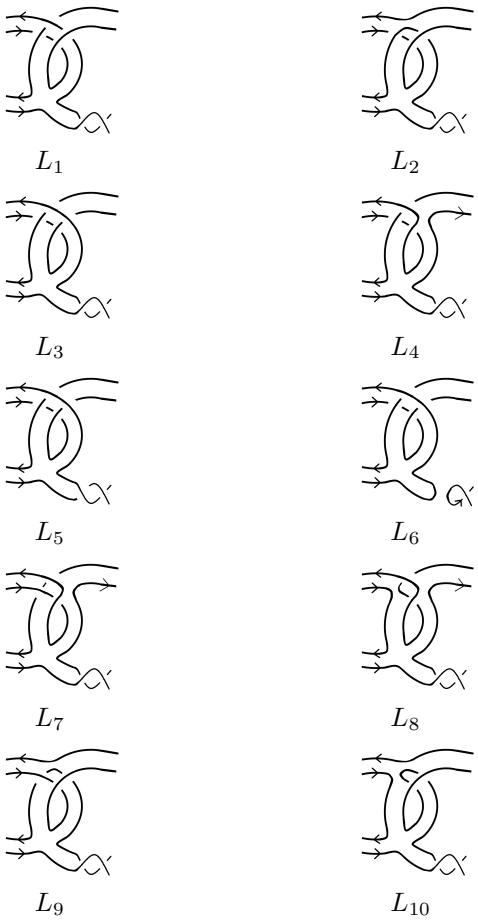


Рис. 4

Обозначим через $L_1, L_2, \ldots, L_{10}$ зацепления, пересечения которых со слоем R имеют вид, изображённый на рисунке 4, и такие что (для $i = 1, 2, \ldots, 10$)

$$L_i \cap (\mathbb{R}^3 \backslash R) = K \cap (\mathbb{R}^3 \backslash R).$$

Заметим, что *упорядоченные тройки зацеплений*

$$(L_1, K, L_2),\ \ (L_1, L_3, L_4),\ \ (L_3, L_5, L_6),\ \ (L_4, L_7, L_8)\ \ \textit{и}\ \ (L_2, L_9, L_{10})$$

являются тройками Конвея. Заметим также, что, как показывают простые очевидные рассуждения,

- узел L_5 изотопен узлу K, так что его изотопический класс есть $[\alpha, \beta]$;
- изотопические классы зацеплений L_6 и L_7 есть $D(\alpha)$ и $D(\beta)$ соответственно;
- изотопические классы зацеплений L_8 и L_{10} совпадают и каждый из них является связной суммой зацеплений $D(\alpha)$ и $D(\beta)$;
- изотопический класс зацепления L_9 есть $D(\alpha\#\beta)$.

Обозначим через γ_1, γ_2, γ_3 и γ_4 изотопические классы зацеплений L_1, L_2, L_3 и L_4 соответственно. Согласно свойству (i) отображения $\mathcal{P}$ и замечаниям предыдущего абзаца имеют место равенства

$$\begin{aligned}
l \cdot \mathcal{P}(\gamma_1) + l^{-1} \cdot \mathcal{P}\big([\alpha, \beta]\big) + m \cdot \mathcal{P}(\gamma_2) &= 0,\\
l \cdot \mathcal{P}(\gamma_1) + l^{-1} \cdot \mathcal{P}(\gamma_3) + m \cdot \mathcal{P}(\gamma_4) &= 0,\\
l \cdot \mathcal{P}(\gamma_3) + l^{-1} \cdot \mathcal{P}\big([\alpha, \beta]\big) + m \cdot \mathcal{P}(D(\alpha)) &= 0,\\
l \cdot \mathcal{P}(\gamma_4) + l^{-1} \cdot \mathcal{P}(D(\beta)) + m \cdot \mathcal{P}(D(\alpha)\#D(\beta)) &= 0,\\
l \cdot \mathcal{P}(\gamma_2) + l^{-1} \cdot \mathcal{P}(D(\alpha\#\beta)) + m \cdot \mathcal{P}(D(\alpha)\#D(\beta)) &= 0.
\end{aligned}$$

Из пятого равенства вычтем четвёртое и разрешим полученное равенство относительно $\mathcal{P}(\gamma_2) - \mathcal{P}(\gamma_4)$; получим

$$\mathcal{P}(\gamma_2) - \mathcal{P}(\gamma_4) = -l^{-2} \cdot \Big(\mathcal{P}(D(\alpha\#\beta)) - \mathcal{P}(D(\beta))\Big).$$

Далее, разрешим третье равенство относительно $\mathcal{P}(\gamma_3)$; получим

$$\mathcal{P}(\gamma_3) = -l^{-2} \cdot \Big(\mathcal{P}\big([\alpha, \beta]\big) + l \cdot m \cdot \mathcal{P}(D(\alpha))\Big).$$

Теперь вычтем из первого равенства второе и разрешим полученное равенство относительно $\mathcal{P}(\gamma_2) - \mathcal{P}(\gamma_4)$; получим

$$\mathcal{P}(\gamma_2) - \mathcal{P}(\gamma_4) = -l^{-1} \cdot m^{-1} \cdot \Big(\mathcal{P}\big([\alpha, \beta]\big) - \mathcal{P}(\gamma_3)\Big).$$

Подставим в правую часть этого равенства полученное выше выражение для $\mathcal{P}(\gamma_3)$ и упростим полученное равенство:

$$\mathcal{P}(\gamma_2) - \mathcal{P}(\gamma_4) = -l^{-2} \cdot \Big((l^{-1} + l) \cdot m^{-1} \cdot \mathcal{P}\big([\alpha, \beta]\big) + \mathcal{P}(D(\alpha))\Big).$$

Мы получили два выражения для вычисления многочлена $\mathcal{P}(\gamma_2) - \mathcal{P}(\gamma_4)$. Приравняем эти выражения; получим

$$-l^{-2}\cdot\Big(\mathcal{P}(D(\alpha\#\beta))-\mathcal{P}(D(\beta))\Big)=-l^{-2}\cdot\Big((l^{-1}+l)\cdot m^{-1}\cdot\mathcal{P}\big([\alpha,\beta]\big)+\mathcal{P}(D(\alpha))\Big).$$

Несложная проверка показывает, что эта формула равносильна искомой формуле.

Список литературы

1. *В поисках утраченной топологии*. Пер. с франц. и англ. / Под ред. Л. Гийу и А. Марена, Мир, М., 1989.
2. W. B. R. Lickorish, K. C. Millett, *A polynomial invariant of oriented links*. — Topology **26**, No. 1 (1987), 107–141.

Nezhinskij V. M., Nesterenok V. V. Multiplication of classical knots.

For oriented one-dimensional knots in three-dimensional Euclidean space, an operation similar to the commutator multiplication of loops is defined, and its simplest properties are studied.

Поступило 7 декабря 2018 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. д. 28,
198504 Петродворец, Россия; Российский
государственный педагогический университет
им. А. И. Герцена,
наб. р. Мойки д. 48,
191186 С.-Петербург, Россия
E-mail: nezhin@pdmi.ras.ru

Российский государственный
педагогический университет
им. А. И. Герцена,
наб. р. Мойки д. 48,
191186 С.-Петербург, Россия
E-mail: nesterenok@bk.ru