Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 476, 2018 г.

В. В. Макеев, Н. Ю. Нецветаев

СЕЧЕНИЯ И ПРОЕКЦИИ ТРЁХМЕРНЫХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

В работе рассмотрен вопрос о том, насколько хорошо некоторая параллельная проекция трёхмерного выпуклого тела может быть приближена образом некоторого плоского сечения этого тела при той же проекции.

Всюду в дальнейшем под выпуклым телом (под фигурой в двумерном случае) понимаем компактное выпуклое подмножество евклидова пространства с непустой внутренностью, а $S(K)$ обозначает площадь фигуры K. Говорим, что многоугольник вписан в выпуклую фигуру, если все его вершины лежат на её границе.

Всюду в дальнейшем прамую l и плоскость P считаем трансверсальными. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть замкнутая пространственная кривая гомеоморфно параллельно проектируется на границу выпуклой фигуры K в плоскости P. Тогда на указанной кривой лежат вершины параллелограмма, который то же параллельное проектирование переводит во вписанный в K параллелограмм площади не менее $S(K)/2$.*

Доказательство. Хорошо известно, что для любой выпуклой фигуры K и направления l существует единственный (и потому от этого направления непрерывно зависящий) вписанный в эту фигуру параллелограмм максимальной площади, которая составляет по меньшей мере $S(K)/2$, одна из сторон которого параллельна l [1]. Выберем направление l так, чтобы соответствующий параллелограмм Q максимальной площади, вписанный в K и с параллельной l стороной, имел максимальную площадь среди вписанных в фигуру K параллелограммов.

Будем непрерывно поворачивать направление l до его совмещения с направлением другой стороны параллелограмма Q. Очевидно, что при этом параллелограмм Q самосовместится. Согласованно ориентируем стороны рассматриваемого параллелограмма против часовой стрелки, и соответствующим образом ориентируем стороны пространственного

Ключевые слова: выпуклое тело, сечение, проекция.

четырёхугольника Q_1 (то есть так, чтобы проектирование сохраняло ориентацию) с вершинами в точках рассматриваемой кривой, которые проектируются в вершины параллелограмма.

Обозначим через a, b, c, d направляющие векторы строн четырехугольника Q_1, расположенные против часовой стрелки. После вышеописанного поворота для нового положения Q_1 мы получим набор векторов b, c, d, a. Мы имеем $(b, c, d) = (d, b, c) = (-a-b-c, b, c) = -(a, b, c)$.

Таким образом, при рассмотренном выше повороте направления l стороны пространственного четырёхугольника циклически переставляются, и смешанное произведение трёх векторов, идущих подряд по его ориентированным сторонам, меняет знак, а значит в некоторый момент обращается в 0, и пространственный четырёхугольник становится параллелограммом, что и завершает доказательство леммы. $\square$

Замечание. Сходный результат используется в [2] для решения задачи о параллелепипеде максимального объема, вписанном в выпуклое тело.

Теорема 1. *Для любого трёхмерного выпуклого тела K, направления l и пересекающей его плоскости P найдётся плоское сечение рассматриваемого тела, параллельная проекция которого вдоль l на плоскость P имеет площадь не меньшую половины площади проекции самого тела на эту плоскость.*

Доказательство. Докажем теорему для строго выпуклого тела K (что и предполагаем в дальнейшем), в остальных случаях теорема доказывается предельным переходом. Рассмотрим множество общих точек тела K с опорными параллельными l прямыми. Для строго выпуклого тела K это множество есть пространственная кривая γ, гомеоморфно параллельно проектирующаяся вдоль l на границу проекции тела K в плоскость P. В качестве искомого плоского сечения тела K можно взять сечение, в котором лежит построенный для кривой γ в силу доказанной леммы параллелограмм. Нетрудно проверить, что если тело K – тетраэдр, а направление проектирования l параллельно прямой, соединяющей середины скрещивающихся рёбер K, то данная в теореме оценка не может выть улучшена. $\square$

Меняя направление l, оценку в теореме 1 можно слегка улучшить.

Теорема 2. *Для любого трёхмерного выпуклого тела K найдётся направление l, такое что для пересекающей его плоскости P найдётся* *плоское сечение рассматриваемого тела, параллельная проекция которого вдоль l на плоскость P имеет площадь не меньшую $(5-2\sqrt{5})$ части площади проекции самого тела на эту плоскость.*

Доказательство. Как и выше, достаточно рассмотреть случай строго выпуклого тела K. Как следует из теоремы 7 [3], направление l можно выбрать так, что в соответствующую кривую из общих точек тела K с опорными параллельными l прямыми вписан аффинно-правильный пятиугольник. Тогда в качестве направления можно выбрать l, так как если аффинно-правильный пятиугольник вписан в выпуклую фигуру K_1, то его площадь составляет по меньшей мере $(5-2\sqrt{5})\cdot S(K_1)$ (равенство достигается, если K_1 – треугольник, ограниченный продолжениями трёх сторон пятиугольника).

Полученная оценка $(5-2\sqrt{5}) > 0.527$, вероятно, очень грубая, но более точная авторам не известна. □

Список литературы

1. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* Наука, М., 1971.
2. A. Bielecki, K. Radziszewski, *Sur les parallélépipèdes inscrits dans les corps convexes.* — Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A. **8** (1954), 97–100.
3. В. В. Макеев, *Многоугольники, вписанные в замкнутую кривую и трехмерное выпуклое тело.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **353** (2008), 116–125.

Makeev V. V., Netsvetaev N. Yu. Planar sections and projections of three-dimensional convex bodies.

The paper discusses the following question: up to which precision, the parallel projection of a three-dimensional convex body can be approximated by the same projection of a plane section of the body.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: mvv57@inbox.ru
E-mail: netsvetaevnikita@gmail.com

Поступило 26 июля 2018 г.