Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 476, 2018 г.

В. В. Макеев, Н. Ю. Нецветаев

ДЕЛЕНИЕ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА СИСТЕМОЙ КОНУСОВ И ВПИСАННЫЕ В НЕГО МНОГОГРАННИКИ

В литературе имеется немало теорем о делении объёма выпуклого тела некоторой системой конусов и о возможности вписать в него многогранник того или иного типа. Обзор подобных результатов имеется в [1]. Ниже также доказаны теоремы о делении выпуклого тела системой конусов, предельным случаем которых являются некоторые известные теоремы о вписанных многогранниках.

Всюду в дальнейшем под выпуклым телом K в $\mathbb{R}^n$ понимаем компактное выпуклое множество с непустой внутренностью, а $V(K)$ означает его объём. Ниже мы используем известную метрику Хаусдорфа ([2, с. 8]) на множестве выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$. Ниже через F обозначаем неотрицательный непрерывный относительно метрики Хаусдорфа функционал на компактных выпуклых подмножествах в $\mathbb{R}^n$, причём $F(K) = 0$ только если $\dim(K) < n$. Имеется много естественных с геометрической точки зрения функционалов F (кроме вышеуказанного объёма): наименьшая ширина, наибольший объём шара или эллипсоида, содержащегося в выпуклом компакте, разность площади поверхности и удвоенной максимальной площади гиперплоской ортогональной проекции и т.д.

Теорема 1. *Пусть F – функционал вышеуказанного типа, а система $n + 1$ непересекающихся выпуклых конусов с непустыми внутренностями и общей вершиной такова, что в каждом замкнутом полупространстве относительно проходящей через их общую вершину гиперплоскости целиком содержится один из конусов. Тогда для гладкого выпуклого тела, параллельно сдвигая систему конусов, совмещая их общее начало с точками тела, можно добиться того, что отношение значений функционала F на частях тела, попавших в конусы, будет наперед заданным.*

Ключевые слова: выпуклое тело, деление, вписанные многогранники.

Доказательство. Обозначим рассматриваемое тело и систему конусов через K и $C_1, \ldots, C_{n+1}$ соответственно. Определим следующее непрерывное отображение $f\colon K \to \Delta$, где

$$\Delta = \bigl\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1 + \ldots + x_{n+1} = 1 \\ \text{и} \;\; x_i \geqslant 0 \;\; \text{для} \;\; 1 \leqslant i \leqslant n+1\bigr\}.$$

Сдвинем систему конусов $C_1, \ldots, C_{n+1}$, совместив их общее начало с точкой $x \in K$. Значение $F(C_i \cap K)$ обозначим через v_i и положим

$$v = v_1 + \ldots + v_{n+1}, \\ f(x) = (v_1/v, \ldots, v_{n+1}/v).$$

Покажем, что f сюръективно.

Заметим, что $f(\partial K) \subset \partial\Delta$, так как в силу сделанного предположения о конусах в каждой точке $x \in \partial K$ одна из координат у $f(x)$ равна 0, а некоторая – обязательно положительна. Следовательно, возникает отображение пар $(K, \partial K) \to (\Delta, \partial\Delta)$. Покажем, что степень этого отображения равна 1 по модулю 2.

Любые два функционала F и G рассматриваемого вида линейно гомотопны: $(1-t)F + tG$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Эта гомотопия индуцирует гомотопию отображений пар, поэтому степень отображения пар $(K, \partial K) \to (\Delta, \partial\Delta)$ не зависит от выбора функционала. Далее мы считаем, что функционал F есть функционал объёма V.

Непрерывно деформируем тело K в классе гладких выпуклых тел в шар, что также индуцирует гомотопию отображения $(K, \partial K) \to (\Delta, \partial\Delta)$.

Докажем, что для выбранных выпуклых конусов C_i и шара K сужение отображения f инъективно на внутренности K.

Предположим противное: $f(x) = f(y)$ для внутренних точек x и y шара K. Обозначим через C_x и C_y соответствующие системы конусов с общей вершиной в точках x и y соответственно. Сдвинем C_x вместе с шаром K, совместив ее с C_y, а сдвинутый шар K обозначим через K_1. В силу сделанного предположения для некоторого $a > 0$ шары K и aK_1 (гомотетичный K_1 шар с тем же центром и коэффициентом гомотетии a) высекают на конусах из C_y тела равного объёма. Тогда на некоторых образующих, находящихся внутри каждого из конусов C_y, шары K и aK_1 высекают равные отрезки. В силу сделанного предположения о системе конусов отличные от y концы этих отрезков являются вершинами n-мерного симплекса, чего не может быть, так как $\partial K \cap \partial(aK_1)$ лежит в гиперплоскости.

Образ $f(K)$ замкнут в Δ. Из инъективности f на внутренности K следует, что образ внутренности K открыт во внутренности Δ (теорема об инвариантности области). Следовательно, $f(K)$ содержит внутренность Δ, а значит, сужение f на внутренность K является гомеоморфизмом на внутренность Δ, откуда следует,что степень отображения пар $(K, \partial K) \to (\Delta, \partial\Delta)$ равна 1 по модулю 2. Следовательно, $f(K) = \Delta$ для любого гладкого выпуклого тела K и вышеуказанного функционала F. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Хорошо известно доказанное различными авторами (и обобщенное Громовым в [3]) утверждение о том, что во всякое гладкое выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ можно вписать положительно гомотетичный образ любого симплекса. Это легко следует из доказанной теоремы. Действительно, рассмотрим систему лучей, исходящих из некоторой внутренней точки симплекса и проходящих через его вершины. Мы должны доказать, что систему лучей можно так сдвинуть, поместив их общее начало во внутреннюю точку заданного гладкого выпуклого тела, что тело будет высекать на лучах отрезки, имеющие заданное отношение $(x_1, \dots, x_{n+1})$. Рассмотрим равные конусы вращения с выбранными лучами в качестве осей. Если углы при их вершине достаточно малы, система конусов удовлетворяет условию теоремы. По доказанной теореме мы можем так сдвинуть систему конусов, что объемы их пересечений с телом имеют отношение $(x_1^n, \dots, x_{n+1}^n)$. Совершая предельный переход, устремив угол при вершине конусов к 0, мы построим искомый вписанный симплекс.

Пусть $C_1, \dots, C_{2n}$ – система попарно непересекающихся выпуклых конусов с общей вершиной в начале декартовой системы координат в $\mathbb{R}^n$. При этом конусы C_i и C_{n+i} для $1 \leqslant i \leqslant n$ симметричны относительно координатной гиперплоскости $x_i = 0$, и их образующие составляют с i-й координатной осью углы, не превышающие $\arcsin(1/\sqrt{n})$.

Теорема 2. *Пусть функционал F и система конусов $C_1, \dots, C_{2n}$ имеют вышеописанный тип. Тогда для гладкого выпуклого тела можно так параллельно сдвинуть систему конусов, совместив их общее начало с некоторой внутренней точкой тела, что отношения значений* *функционала F на частях тела, попавших в симметричные конусы, будут наперед заданными.*

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *В каждом замкнутом полупространстве относительно проходящей через общую вершину вышеописанной системы конусов гиперплоскости целиком содержится один из конусов.*

Доказательство. Достаточно доказать, что с любой гиперплоскостью одна из координатных осей составляет угол не менее

$$\arcsin(1/\sqrt{n}),$$

или, что то же самое, составляет угол не более $\arccos(1/\sqrt{n})$ с нормалью к этой гиперплоскости. Пусть x_i – максимальная по модулю координата единичной нормали $(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда очевидно, что нормаль составляет угол не более $\arccos(1/\sqrt{n})$ с i-й координатной осью. Ясно, что или конус C_i, или конус C_{n+i} удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана. $\square$

Докажем теорему 2. Зафиксируем набор положительных чисел $y_1, \ldots, y_n$. Мы должны доказать, что вышеописанную систему конусов можно так параллельно перенести, что будут выполняться равенства

$$F(K \cap C_i) = y_i F(K \cap C_{n+i})$$

для $1 \leqslant i \leqslant n$, где K – рассматриваемое гладкое выпуклое тело.

Рассмотрим непрерывное отображение $f \colon K \to \mathbb{R}^{2n}$, определяемое следующим образом. Сдвинем параллельно рассматриваемую систему конусов, поместив их вершину в точку $x \in K$, и положим

$$f(x) = (F(C_1 \cap K), \ldots, F(C_{2n} \cap K)).$$

Мы должны доказать, что образ внутренности тела K пресекает n-мерную плоскость P, заданную уравнениями $x_i = y_i x_{n+i}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$.

Заметим, что $f(\partial K)$ не пересекает вышеуказанную n-плоскость P, так как в силу доказанной леммы у любой точки из $f(K)$ одна из координат равна 0, при этом парная ей координата не равна 0. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что сужение f на ∂K реализует образующую $(n-1)$-й гомотопической группы дополнения к P.

Как и при доказательстве теоремы 1, непрерывно деформируем тело K в классе гладких выпуклых тел в шар, а функционал F – в функционал объёма V. Так как $f(\partial K)$ не пересекает никакую из плоскостей указанного вида, то можно считать (поворачивая одну из плоскостей в другую), что $y_i = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, – это мы и предполагаем в дальнейшем.

Докажем, что в этом случае образ у f трансверсален к P, а прообраз $f^{-1}(P)$ состоит из одной точки. Это докажет требуемое утверждение.

Очевидно, условие равенства объёмов частей шара, попавших в симметричные конусы, выполняется, лишь если вершина конусов находится в центре шара. Трансверсальность отображения f к P в точке n-мерной плоскости $x_i = x_{n+i}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ следует из того, что, сдвигая вершину конусов вдоль i-й оси, мы с ненулевой скоростью нарушаем i-е условие равенства объёмов, сохранив остальные. Теорема 2 доказана. $\square$

Замечание. Рассмотрим в качестве C_i равные конусы вращения вокруг координатных осей. Если углы при их вершине достаточно малы, система конусов удовлетворяет условию теоремы. По доказанной теореме мы можем так сдвинуть систему конусов, что объёмы их пересечений с телом имеют отношение $(y_1^n, \dots, y_n^n)$. Совершая предельный переход, устремив угол при вершине конусов к 0, мы получим известное утверждение, гласящее, что можно сдвинуть начало координат во внутреннюю точку заданного гладкого выпуклого тела так, что отношение длин отрезков, высеченных телом на координатных осях, будет заранее заданным $(y_1, \dots, y_n)$. Для набора $(1, \dots, 1)$ это доказывали разные авторы, например, [4].

Список литературы

1. Р. Н. Карасев, *Топологические методы в комбинаторной геометрии.* — УМН **63**, No. 6(384) (2008), 39–90.
2. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* Наука, М., 1971.
3. М. Л. Громов, *О симплексах, вписанных в гиперповерхности.* — Матем. заметки **5**, No. 1 (1969), 81–89.
4. H. Kramer, *Hyperparallelograms inscribed to convex bodies.* — Mathematica (Cluj) **22(45)**, No. 1 (1980), 67–70.

Makeev V. V., Netsvetaev N. Yu. Equipartitioning of a convex body by a system of cones and inscribed polytopes.

Two new theorems are proved about equipartitionings of a convex body by a system of cones with common vertex. Limit cases of these theorems yield some previously known theorems about polytopes inscribed in a convex body.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия

E-mail: mvv57@inbox.ru

E-mail: netsvetaevnikita@gmail.com

Поступило 18 июня 2018 г.