Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 476, 2018 г.

В. С. Кальницкий, А. Н. Петров

ЛОКАЛЬНЫЕ ГЛАДКИЕ СОПРЯЖЕНИЯ ЭНДОМОРФИЗМОВ ФРОБЕНИУСА

§1. Введение

1.1. Отправной точкой данного исследования стал недавно обнаруженный авторами факт о том, что параметризованный интеграл Пуассона является решением обобщенного уравнения Бетхера [1]. Алгебраической интерпретацией этого факта является локальная топологическая сопряженность эндоморфизма Фробениуса кольца $\mathbb{R}$ и эндоморфизма Фробениуса некоторой двумерной неассоциативной $\mathbb{R}$-алгебры, которую авторы назвали алгеброй Пуассона A_P.

Определение. *Рассмотрим унитарное коммутативное кольцо* $\mathbb{K}$ *и произвольную* m*-мерную* $\mathbb{K}$*-алгебру* A. *Отображения*

$$\delta^n \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad \delta^n(k) = k^n,$$

и

$$\Delta^n \colon A \to A, \quad \Delta^n(a) = a^n,$$

называются эндоморфизмами Фробениуса.

Конечно, эндоморфизм Фробениуса определен как только есть мультипликативная структура, например, для полугрупп. Исследование различных свойств этого отображения для конечных групп можно найти у В. И. Арнольда [2].

Поставим задачу поиска отображений $f \colon A \to A$ и $\varphi \colon A \to \mathbb{K}$, делающих следующую диаграмму коммутативной

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbb{K} \arrow[r, "\delta^n"'] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Ключевые слова: эндоморфизм Фробениуса, сплетающий оператор, обобщенное уравнение Бетхера.

Определение. *Отображение f будем называть* m-мерным представлением *эндоморфизма Фробениуса в алгебре A, φ* – сплетающим отображением.

В случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, если отображение f определено на некоторой открытой в стандартной топологии области $\Omega \subset A$, то будем говорить о *локальном представлении*.

Сюрьективные сплетающие отображения в теории динамических систем называются *полусопрягающими*. В этих терминах теорема Бетхера ([3, 4]) может быть сформулирована следующим образом.

Теорема. *Всякое локальное аналитическое в окрестности точки a представление эндоморфизма Фробениуса δ^n кольца $\mathbb{C}$ в алгебре $\mathbb{C}$ имеет вид*

$$f(z) = a + b(z-a)^n + o((z-a)^n),$$

при этом существует аналитическое сплетающее отображение φ, вообще говоря, не единственное.

Таким образом, в теореме Бетхера речь идет об одномерных представлениях в $\mathbb{C}$-алгебре.

1.2. Как обычно, в теории функциональных уравнений, в соотношениях, связывающих несколько функций, любой их набор может быть искомым при заданных остальных функциях. Можно выделить тем самым несколько различных типов задач.

Например, рассмотрим задачу поиска отображения f при заданном типе сплетающего отображения. В двумерной $\mathbb{R}$-алгебре в некотором базисе зададим координатно тип сплетающего отображения $\varphi(a,b) = \xi(a)+\eta(b)$, где обе функции обратимы. Тогда можно предложить координатное выражение для представления отображения Фробениуса δ^2 в следующей форме:

$$f(a,b) = (\xi^{-1}(\xi^2(a) + \eta^2(b)), \eta^{-1}(2\xi(a)\eta(b))).$$

Этим способом мы можем порождать функциональные уравнения с уже известным одним решением и исследовать их на наличие иных решений. Например, пусть $\xi(a) = a$, $\eta(b) = b$, тогда возникает функциональное уравнение

$$\varphi^2(a,b) = \varphi(a^2+b^2, 2ab),$$

полное решение которого мы получим далее в некотором классе отображений. Однако, при такой постановке задачи не играет никакой роли структура алгебры.

Более содержательной представляется задача, когда задана размерность алгебры и тип представления, использующий алгебраическую структуру, и следует найти сплетающее отображение, если оно существует.

Например, может ли эндоморфизм Фробениуса поля $\mathbb{R}$ быть представлен линейным оператором в какой-нибудь алгебре? Положительный ответ дает решение соответствующего уравнения Шрёдера. Экспоненциальное отображение сплетает эндоморфизм Фробениуса с умножением на n в поле $\mathbb{R}$.

Определение. *Сплетающее отображение φ для эндоморфизмов Фробениуса Δ^n и δ^n будем называть* решением обобщенного уравнения Бетхера порядка *n:*

$$\delta^n(\varphi) = \varphi(\Delta^n).$$

Заметим, что в зависимости от кольца можно говорить о непрерывном, аналитическом, вещественно-аналитическом либо произвольном отображении.

1.3. В этой статье мы исследуем вопрос о представимости эндоморфизма Фробениуса δ^2 алгебры $\mathbb{R}$, который мы будем называть δ-оператором, эндоморфизмом Фробениуса $\Delta^2\colon A \to A$ (Δ-оператором) в произвольных двумерных $\mathbb{R}$-алгебрах A, коротко – Δ-представление. Такая постановка задачи наиболее близка к полученным ранее авторами результатам.

Заметим, что, решив поставленную задачу, мы автоматически получим решение для всех отображений, сопряженных Δ-оператору. Например, если ввести оператор сдвига T_{a_0} в алгебре, то отображение $\varphi \circ T_{a_0}$ будет сплетающим для оператора

$$f = T_{a_0} \circ \Delta^2 \circ T_{a_0}^{-1}, \quad f(a) = a_0 + (a - a_0)^2.$$

Рассмотрим многомерное Δ-представление. Если в алгебре есть подалгебра, то сужение Δ-оператора и сплетающего отображения на нее задает Δ-представление меньшей размерности. Поэтому интересно было бы начать решение задачи с малых размерностей. Например, известно описание локальных представлений δ-оператора в одномерных

$\mathbb{R}$-алгебрах [5]:

$$\varphi^2(x) = \varphi(x^2). \tag{1}$$

Отметим сразу, что $\varphi(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$.

Теорема. *Общее решение уравнения* (1) *описывается следующим образом*:

а) *Все аналитические в окрестности точки $x = 0$ решения уравнения* (1) *имеют вид $\varphi(x) = x^n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, или $\varphi(x) \equiv 0$.*

б) *Все определенные на интервале $(0, +\infty)$ и дифференцируемые на этом интервале решения уравнения* (1) *имеют вид $\varphi(x) = x^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, или $\varphi(x) \equiv 0$.*

в) *Общее решение уравнения* (1)*, определенное на интервале $(1, +\infty)$, имеет вид*

$$\varphi = \exp\left(\ln x \cdot \omega\left(\frac{\ln\ln x}{\ln 2}\right)\right),$$

где ω – произвольная 1-периодическая функция, или $\varphi(x) \equiv 0$.

Замечание. Непрерывные решения уравнения (1) могут быть построены по произвольной функции, заданной на определенном интервале внутри области определения (см. [6]).

§2. Δ-представление δ-оператора в двумерных алгебрах

2.1. Рассмотрим некоторую двумерную алгебру A над коммутативным унитарным кольцом $\mathbb{K}$ и Δ-оператор. Далее будем решать задачу о существовании (локального) сплетающего отображения для δ- и Δ-операторов.

Любое мультипликативное отображение алгебры в кольцо задает сплетающее отображение. Обратное утверждение, конечно, не верно. Для одномерных $\mathbb{R}$-алгебр мультипликативные отображения подчиняются уравнению Коши $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ и все непрерывные решения имеют вид

(a) $\varphi(x) \equiv 0; 1$, $\varphi(x) = x^\alpha$, $x > 0$;

(b) $\varphi(x) \equiv 0; 1$, $\varphi(x) = x|x|^\alpha$, $x \in (-\infty, \infty)$, или $x \neq 0$ при $\alpha < 0$.

Зафиксируем базис X_1, X_2 алгебры и запишем структурные константы

$$X_1 \cdot X_2 = c_{ij}^k X_k,$$

здесь и далее мы будем придерживаться соглашения Эйнштейна о суммировании. Пусть $\varphi\colon A \to \mathbb{K}$ – сплетающее отображение

$$\varphi^2(Y) = \varphi(Y^2).$$

Разложим произвольный элемент алгебры по базису $Y = aX_1 + bX_2$ и определим функцию

$$F(a,b) = \varphi(Y).$$

На области определения сплетающего отображения Ω выполнено соотношение

$$\begin{aligned} F^2(a,b) &= \varphi^2(aX_1 + bX_2) = \varphi((aX_1 + bX_2)^2) \\ &= F(a^2c^1_{11} + ab(c^1_{12} + c^1_{12}) + b^2c^1_{22}, a^2c^2_{11} + ab(c^2_{12} + c^2_{12}) + b^2c^2_{22}). \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, сплетающее отображение является решением уравнения (2), которое названо нами обобщенным уравнением Бетхера. Теперь можно обратить задачу. Рассмотрим уравнение (2) на неизвестную функцию F с фиксированными коэффициентами c^k_{ij}. Так как на структурные константы алгебр не накладывается никаких ограничивающих соотношений, то коэффициенты полиномов в (2) задают некоторую алгебру. Если найдено решение F уравнения (2), то, положив $\varphi(aX_1 + bX_2) = F(a,b)$, мы получим (локальное) сплетающее отображение для δ- и Δ-операторов.

2.2. На общей области определения два различных сплетающих отображения могут быть перемножены и зададут новое сплетающее отображение, т. е. множество локализованных отображений образует полугруппу. Если заметить, что постоянное, равное единице, отображение является сплетающим, то можно сделать вывод, что множество всех сплетающих отображений, определенных на фиксированной области Ω, является моноидом по умножению. На множестве неотрицательности сплетающего отображения φ (мы говорим о кольце $\mathbb{R}$) для любого вещественного числа α отображение φ^α также является сплетающим. Если же рассмотреть область Ω_+ общей строгой положительности сплетающих отображений, то на ней множество сплетающих отображений становится группой.

Можно следующим образом переформулировать решаемую нами задачу: *для данной алгебры описать группу локальных сплетающих отображений*. Для того, чтобы сделать эту задачу обозримой, мы ограничимся дифференцируемыми отображениями.

§3. Поиск общего решения

3.1. Для поиска общего решения используем подход теории инвариантов. Рассмотрим функциональное уравнение

$$x(f(t)) = G(t, x(t)), \tag{3}$$

где $x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ – неизвестная функция, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $G\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – заданные функции. Отображение

$$S\colon \begin{cases} t \mapsto f(t), \\ x \mapsto G(t, x), \end{cases} \tag{4}$$

действующее из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, называется *характеристическим* отображением функционального уравнения (3). Известно ([5]), что задача об отыскании решений функционального уравнения (3) сводится к задаче об отыскании инвариантных относительно характеристического отображения множеств, которая сама по себе не менее сложна. Однако при этом подходе в ряде случаев можно указать эффективные методы построения решений. Так, в [5] изложено полное исследование для линейных функциональных уравнений. В нашем случае задача квадратична, но, как мы сейчас увидим, разделяется по переменным, так как G не зависит от t.

Функция $\psi(t, x)\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *инвариантом* характеристического отображения S, если

$$\psi(S(t, x)) = \psi(t, x).$$

Если $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ – инварианты, то всякая функция $\Psi(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ также является инвариантом характеристического отображения.

Самым общим фактом о характеристическом отображении, доказанным в [5], является утверждение, что количество функционально независимых инвариантов не превосходит $n+1$, рассматриваются только невырожденные (непостоянные на открытых множествах) инварианты.

3.2. Запишем характеристическое отображение обобщенного уравнения Бетхера (2)

$$S\colon \begin{cases} t \mapsto t^2, \\ (a, b) \mapsto (p_1(a, b), p_2(a, b)), \end{cases}$$

где p_1, p_2 – однородные многочлены степени два. Первый инвариант, который связывает только одну переменную и не будет играть никакой роли в дальнейшем, имеет вид

$$\psi_1(t,a,b) = \gamma\left(\frac{\ln\ln t}{\ln 2}\right),$$

где $\gamma(t)$ – произвольная функция периода 1.

Опишем схему, по которой в некоторых случаях удается получить общее решение уравнения Бетхера. Пусть имеются еще два инварианта $\psi_2(t,a,b)$ и $\psi_3(t,a,b)$, тогда система вида

$$\begin{cases} \psi_2(t,a,b) = c_1, \\ \psi_3(t,a,b) = c_2 \end{cases}$$

может задать решение функционального уравнения как пару определенных при $t > 0$ функций

$$x(t) = (a(t), b(t)).$$

Выражая переменную t, иногда удается получить две функционально независимые функции $\varphi_1(a,b)$ и $\varphi_2(a,b)$, являющиеся сплетающими отображениями. При этом $\varphi_1(x(t)) = \varphi_2(x(t)) = t$ и, значит, их множество значений совпадает с $(0,\infty)$. Нас будут интересовать лишь дифференцируемые решения, определенные в некоторой конической области.

3.3. Пусть $\varphi(a,b)$ является сплетающим отображением. Рассмотрим какое-либо отображение вида $\Phi(\varphi)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Если оно является сплетающим, то

$$\delta(\Phi(\varphi)) = \Phi(\varphi(\Delta^2)) = \Phi(\varphi^2),$$

то есть на области значений $\varphi(\mathbb{R}^2) = (0,\infty)$ оно удовлетворяет уравнению Бетхера

$$\Phi^2(x) = \Phi(x^2).$$

Все определенные при $x > 0$ дифференцируемые решения имеют вид $\Phi(x) = x^\alpha$. Таким образом, на множестве положительности имеем

$$\Phi(\varphi) = \varphi^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Так как функционально независимых инвариантов, связывающих переменные a и b с t, не более двух, то все сплетающие отображения будут являться функциями от двух найденных функционально независимых сплетающих отображений. Аналогично, рассмотрим какое-либо отображение вида $\Phi(\varphi_1,\varphi_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Если оно является сплетающим, то

$$\delta(\Phi(\varphi_1,\varphi_2)) = \Phi(\varphi_1(\Delta^2), \varphi_2(\Delta^2)) = \Phi(\varphi_1^2, \varphi_2^2),$$

то есть на области значений $\varphi_i(\mathbb{R}^2) = (0, \infty)$ оно удовлетворяет уравнению Бетхера особого вида

$$\Phi^2(x, y) = \Phi(x^2, y^2). \tag{5}$$

Так как на множестве $\{x > 0, y > 0\}$ решение этого уравнения положительно, мы можем сделать замену $F(x, y) = \ln \Phi(e^x, e^y)$. Уравнение Бетхера перейдет в классическое однородное уравнение Эйлера степени однородности один ([5])

$$2F(x, y) = F(2x, 2y),$$

все определенные на всей плоскости дифференцируемые решения которого имеют вид $F(x, y) = \alpha x + \beta y$. Следовательно, общее решение уравнения (5), определенное в области $\{x > 0, y > 0\}$, имеет вид

$$\Phi(x, y) = x^\alpha y^\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, можно сформулировать следующий результат.

Теорема. *Если φ_1 и φ_2 – два дифференцируемых сплетающих отображения, такие что на их общей (не пустой) конической области положительности каждое из них принимает все положительные значения, то общее решение обобщенного уравнения Бетхера, определенное на этой области, имеет вид*

$$\varphi(a, b) = \varphi_1^\alpha(a, b)\varphi_2^\beta(a, b).$$

Замечание. Если требовать лишь, чтобы сплетающее отображение было определено в пересечении конической области и некоторой окрестности нуля (но необязательно на всей конической области), то множество решений существенно расширяется, так как все дифференцируемые решения уравнения Эйлера степени однородности 1 будут иметь вид

$$F(x, y) = xC(y/x),$$

где $x \neq 0$, C – произвольная дифференцируемая функция на $(0, \infty)$. Из этого вытекает, что общее решение уравнение Бетхера (5) запишется в виде

$$\Phi(x, y) = x^{C\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)}.$$

§4. Представления в матричных $\mathbb{R}$-алгебрах

4.1. Рассмотрим матричную алгебру $Mat_2(\mathbb{R})$. Пусть $A_X \subset Mat_2(\mathbb{R})$ – ее двумерная подалгебра, порожденная матрицей X и единичной матрицей E. По теореме Гамильтона–Кэли квадраты матриц принадлежат линейной оболочке и структурные константы имеют вид

$$c^1_{11} = Tr\,X; \quad c^2_{11} = -\det X; \quad c^1_{22} = c^2_{12} = c^2_{21} = 0; \quad c^2_{22} = c^1_{12} = c^1_{21} = 1.$$

Запишем квадрат произвольной матрицы Y в базисе X, E:

$$Y^2 = (aX + bE)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2E.$$

Построенная алгебра обладает унитарным мультипликативным отображением $\det\colon A_X \to \mathbb{R}$ и потому порождает сплетающее отображение. Введем функцию $F_X(a, b) = \det(aX + bE)$. Эта функция подчиняется функциональному уравнению

$$F^2_X(a, b) = F_X(\alpha a^2 + 2ab, b^2 - \beta a^2), \tag{6}$$

где $\alpha = \mathrm{Tr}X, \beta = \det X$. Для поиска иных решений уравнения (6) применим рассуждения предыдущего пункта.

4.2. Алгебра A_X является двумерной ассоциативной коммутативной унитарной $\mathbb{R}$-алгеброй. Известно, что таких алгебр всего три. А именно, у такой алгебры существует базис E, J, в котором $J^2 \in \{O, E, -E\}$.

Пусть $J^2 = -E$. В этом случае $A_J \cong \mathbb{C}$. Уравнение (6) перепишется в виде

$$F^2_J(a, b) = F_J(2ab, b^2 - a^2). \tag{7}$$

Одно из решений уравнения (7),

$$F_J(a, b) = a^2 + b^2 = \varphi(a + ib) = |a + ib|,$$

порождено сплетающим отображением, задаваемым модулем комплексного числа.

Запишем характеристическое отображение для уравнения (7):

$$S\colon \begin{cases} t \mapsto t^2, \\ (a, b) \mapsto (2ab, b^2 - a^2). \end{cases} \tag{8}$$

Очевидными инвариантами являются

$$\begin{cases} \psi_1(t,a,b) = \gamma\left(\dfrac{\ln\ln t}{\ln 2}\right), \\[2ex] \psi_2(t,a,b) = \dfrac{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}{\ln t}, \\[2ex] \psi_3(t,a,b) = \dfrac{\ln(a^2+b^2)}{\ln t}, \end{cases}$$

где $\gamma(t)$ – произвольная 1-периодическая функция. Система вида

$$\begin{cases} \psi_2(t,a,b) = c_1, \\ \psi_3(t,a,b) = c_2 \end{cases}$$

задает решение функционального уравнения (7) как пару функций

$$x(t) = \left(a(t) = \sqrt{\frac{t^{c_2}}{1+\operatorname{tg}^2\ln t^{c_1}}},\quad b(t) = \operatorname{tg}\ln t^{c_1}\sqrt{\frac{t^{c_2}}{1+\operatorname{tg}^2\ln t^{c_1}}}\right)$$

Однако нас интересуют сплетающие отображения, которые действуют в противоположном направлении. Выражения переменной t получаются автоматически ($c_1 = c_2 = 1$):

$$\begin{cases} \varphi_1(a,b) = \exp(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}), \\ \varphi_2(a,b) = a^2+b^2. \end{cases}$$

Теорема. *Группа локальных дифференцируемых сплетающих отображений алгебры A_J, $J^2 = -E$, в базисе $\{J,E\}$, определенных в конической области $\{ab>0\}$, состоит из функций вида*

$$(a^2+b^2)^\alpha\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)^\beta,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

4.3. Пусть $J^2 = E$. В этом случае алгебра A_J изоморфна алгебре $\mathbb{R}^2$ с покомпонентным умножением. Уравнение (6) перепишется в виде

$$F_J^2(a,b) = F_J(2ab, b^2+a^2).$$

В силу замечания пункта 2.1 о том, что любое мультипликативное отображение алгебры в кольцо является сплетающим, унитарные гомоморфизмы алгебры A_J в $\mathbb{R}$ (точки вещественного спектра) являются сплетающими отображениями. Вещественный спектр алгебры

A_J, $J^2 = E$, состоит из двух точек. В базисе $\{J, E\}$ отвечающие им гомоморфизмы имеют вид

$$\varphi_1(aJ + bE) = a + b \quad \text{и} \quad \varphi_2(aJ + bE) = b - a.$$

На множестве положительности обоих отображений

$$\Omega_+ = \{b > a; b > -a\}$$

возникает семейство сплетающих отображений для любых вещественных α, β: $(a + b)^\alpha (b - a)^\beta$. В частности, как легко убедиться прямыми вычислениями, отображение $b^2 - a^2$ порождается определителем, являющимся мультипликативным отображением, но не являющимся гомоморфизмом алгебр.

Теорема. *Группа локальных дифференцируемых сплетающих отображений алгебры A_J, $J^2 = E$, в базисе $\{J, E\}$, определенных в конической области $\{a + b > 0, b - a > 0\}$, состоит из функций вида*

$$(b + a)^\alpha (b - a)^\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

4.4. Случай $J^2 = O$. Уравнение (6) перепишется в виде

$$F_J^2(a, b) = F_J(2ab, b^2).$$

Проекция на второй аргумент $\varphi_1(aJ + bE) = b$ является единственной точкой спектра этой алгебры и порождает сплетающее отображение. Второе сплетающее отображение также легко угадывается: $\varphi_2(aJ + bE) = \exp(a/b)$.

Теорема. *Группа локальных дифференцируемых сплетающих отображений алгебры A_J, $J^2 = O$, в базисе $\{J, E\}$, определенных в конической области $\{b > 0\}$, состоит из функций вида*

$$\exp\left(\alpha \ln b + \beta \frac{a}{b}\right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

§5. Представления в алгебре A_P

5.1. Рассмотрим обобщенное уравнение Бетхера на вещественную функцию двух аргументов

$$F^2(a, b) = F(a^2 + 2ab, b^2/4). \qquad (9)$$

Структурные константы имеют вид

$$c_{11}^1 = c_{12}^1 = c_{21}^1 = 1,$$
$$c_{22}^1 = c_{11}^2 = c_{12}^2 = c_{21}^2 = 0,$$

$$c_{22}^2 = 1/4$$

и задают двумерную алгебру A_P, очевидно коммутативную, поскольку $c_{ij}^k = c_{ji}^k$, но неассоциативную, так как для базисных элементов выполняется соотношение

$$(X_1 \cdot X_2) \cdot X_2 = X_1 \cdot X_2 = X_1,$$

но

$$X_1 \cdot (X_2 \cdot X_2) = X_1 \cdot \frac{1}{4} X_2 = \frac{1}{4} X_1.$$

Можно показать, что эта алгебра не унитарна. Как показано в [1], функция

$$F(a,b) = \exp \int_0^{\pi/2} \ln(a + b\cos^2 x) dx = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a+b}}{2} \right)^{\pi}$$

удовлетворяет уравнению (9) и определена в области

$$\Omega = \{a > 0; a + b > 0\}.$$

Возникает локальное сплетающее отображение

$$\varphi(aX_1 + bX_2) = F(a,b).$$

Полученное сплетающее отображение не обладает свойством мультипликативности, так как

$$\varphi(X_1 \cdot X_2) = \varphi(X_1) = 1,$$

но

$$\varphi(X_1)\varphi(X_2) = 2^{-\pi} \neq 1.$$

Таким образом, в алгебре A_P δ-оператор имеет по крайней мере локальное представление. С другой стороны, функция $F(a,b) = b/4$ обладает свойством мультипликативности и линейности и определена на всем $\mathbb{R}^2$, т. е. является гомоморфизмом алгебр. Мультипликативные отображения автоматически порождают сплетающие отображения. Итак, δ-оператор также может быть глобально представлен Δ-оператором в этой алгебре. Этого достаточно, чтобы описать пространство локальных сплетающих отображений.

5.2. В алгебре A_P перейдем к новому базису аффинным преобразованием координат

$$x = a/4 + b/4, \quad y = a/4.$$

В новом базисе функциональное уравнение (9) запишется в более симметричном виде

$$F^2(x, y) = F(x^2 + 2xy + y^2, 4xy)$$

с двумя функционально независимыми локальными решениями

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{и} \quad \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

на соответствующих областях определения. Множество строгой положительности этой пары отображений

$$\Omega_+ = \{(x, y) | x > y > 0\}$$

представляет собой конус плоскости, с вершиной в начале координат. Группа, порожденная этими двумя отображениями, содержит в себе гомоморфизм алгебры $x - y$. Любое дифференцируемое сплетающее отображение, определенное на конической области $\{x > y > 0\}$, имеет вид

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^\alpha (\sqrt{x} + \sqrt{y})^\beta.$$

Вернувшись к исходному базису X_1, X_2, мы получаем следующую теорему.

Теорема. *Все дифференцируемые сплетающие отображения алгебры A_P, в базисе $\{X_1, X_2\}$, определенные на конической области $\{a > 0, b > 0\}$, имеют вид*

$$\left(\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a}}{2}\right)^\alpha \left(\frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a}}{2}\right)^\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Список литературы

1. В. С. Кальницкий, А. Н. Петров, *Связь уравнения Бетхера с параметризованным интегралом Пуассона.* — Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия **5**(63), вып. 4 (2018), 614–622.
2. В. И. Арнольд, *Топология алгебры: комбинаторика операции возведения в квадрат.* — Функц. анализ и его прил. **37**, вып. 3 (2003), 20–35.
3. Л. Э. Бетхер, *Главнейшие законы сходимости итераций и приложение их к Анализу.* — Изв. Физ.-мат. общ. при Импер. Казанском ун-те **14**, No. 3–4 (1903), 155–234.
4. J. Ritt, *On the iteration of rational functions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **21**, No. 3 (1920), 348–356.

5. М. И. Нечипуренко, *Итерации вещественных функций и функциональные уравнения*, ИВМиМГ (ВЦ) СО РАН, Новосибирск, 1997.
6. M. Kuczma, *Problems of uniqueness in the theory of functional equations in a single variable.* — Zesz. nauk. Uniw. jagiell. Pr. mat. **223**, No. 14 (1970), 41–48.

Kalnitsky V. S., Petrov A. N. Local smooth conjugations of the Frobenius endomorphisms.

In the paper, one of the generalizations of the Böttcher equation is considered. It turned out that the parametrized Poisson integral, as a function of its parameters, satisfies an equation of the type described. The structure theorem for splitting maps of the Frobenius endomorphism in a ring and in an algebra over it is proved. The real field case is considered. The generalized Böttcher equation is solved for classical two-dimensional algebras and for the Poisson algebra.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: skalnitsky@hotmail.com
E-mail: petrovap6139@mail.ru

Поступило 4 июня 2018 г.