Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 476, 2018 г.

Ю. А. Волков

СУЩЕСТВОВАНИЕ МНОГОГРАННИКА С ДАННОЙ РАЗВЕРТКОЙ

Предисловие

Настоящая статья представляет собой текст диссертации Юрия Александровича Волкова (02.09.1930–23.03.1981) на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Диссертация была выполнена в Ленинградском государственном университете под руководством А. Д. Александрова и успешно защищена в 1955 году. В диссертации Ю. А. вариационным методом доказал знаменитую теорему А. Д. Александрова о существовании выпуклого многогранника с наперед заданной разверткой (см. [1, 2]). К сожалению, тогда при защите диссертации не действовало правило, согласно которому результаты диссертации должны быть предварительно опубликованы, поэтому доказательство Ю. А. было известно только участникам геометрического семинара А. Д. Александрова. В 1956 году Ю. А. доложил свои исследования на Третьем Всесоюзном математическом съезде, в трудах съезда была опубликована краткая заметка (см. [5]). После защиты Ю. А. сосредоточился на проблеме устойчивости в теореме Минковского, которую решил в 1959 году (см. [4], с. 218). Только в 1960 году появилась статья [6], в которой излагалось доказательство существования выпуклой шапочки с наперед заданной разверткой. Ю. А. писал, что общему случаю теоремы о выпуклом многограннике будет посвящена следующая статья. Таким образом, Ю. А. изменил подход по сравнению с кандидатской диссертацией. (В диссертации сначала доказывается теорема для многогранника, а потом намечается доказательство для шапочки.) В начале 60-х годов Ю. А. обнаружил, что его метод абстрактных многогранников позволяет получить результаты в трудной проблеме Вейля–Кон-Фоссена об оценке изменения пространственных расстояний выпуклых поверхностей в зависимости от изменения внутренних расстояний. В 1962 году результаты по проблеме Кон-Фоссена были доложены на геометрическом семинаре (см. [4, с. 223]). Доказательство Ю. А. оценок изменения расстояний

Ключевые слова: выпуклые многогранники, полиэдральные метрики.

не опиралось на доказательства знаменитой теоремы А. В. Погорелова о том, что две замкнутые изометричные поверхности равны, поэтому Ю. А. доказал и эту теорему. Таким образом, к 1962 году Ю. А. получил новые доказательства основных теорем теории выпуклых поверхностей. Результаты исследований при этом не были опубликованы и нужно было решить, что публиковать в первую очередь. Вероятно поэтому результаты кандидатской диссертации отошли для Ю. А. на второй план. В 1963 году Ю. А. опубликовал результаты по проблеме Минковского [7], а в 1968 – результаты по проблеме Кон-Фоссена (см. [8, 9]) и блестяще защитил докторскую диссертацию. Только в 1968 году Ю. А. предложил аспирантке Елене Гавриловне Подгорновой (1945–1993) доказать теорему С. П. Оловянишникова о существовании бесконечного многогранника [11] методом абстрактных многогранников. Е. Г. Подгорнова в 1972 году защитила диссертацию, в которой она подробно изложила свое доказательство теоремы С. П. Оловянишникова. По результатам исследований Ю. А. и Е. Г. Подгорновой была написана статья [10], в которой дано полное доказательство и теорем А. Д. Александрова и С. П. Оловянишникова. Эту статью предполагали опубликовать в Вестнике ЛГУ, но из-за длительного срока ожидания публикации решили печатать в Трудах Ташкентского педагогического института, в котором Е. Г. Подгорнова работала после окончания аспирантуры. К сожалению, работа [10] была практически недоступной для исследователей [12, с. 37]. Больше при жизни Ю. А. не появлялось изложение его работ по теории многогранников. Таким образом, при жизни Ю. А. его результаты были известны только узкому кругу геометров в СССР. Ситуация стала меняться только с выходом перевода книги А. Д. Александрова на английский язык [3]. В. А. Залгаллер, который организовал всю работу по переводу, включил работы [6, 9] в книгу в качестве дополнения, а работа [10] только указана в списке литературы. При этом, к сожалению, в примечаниях в книге было указано [3, с. 492], что вторая статья по вопросу о существовании многогранника никогда не была издана, но такой статьей конечно является [10]. Практически одновременно с выходом перевода книги А. Д. Александрова появились интересные статьи [13, 14], в которых также развивается вариационный подход Ю. А. к доказательству теоремы А. Д. Александрова [15, p. 334]. Отметим, что в работе [13] разработан алгоритм построения выпуклого многогранника по развертке. Появление этого алгоритма вызвало немедленный интерес специалистов по компьютерной графике [16]. Мы надеемся, что публикация основополагающей работы по вариационному доказательству теоремы о существовании многогранника будет интересна не только чистым математикам, но и специалистам по дискретной геометрии и компьютерной графике.

Публикацию подготовил Волков Д. Ю.

Список литературы к предисловию

1. А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники.* Гостехиздат, М.–Л., 1950.
2. А. Д. Александров, *Избранные труды. Том 2. Выпуклые многогранники.* Наука, Новосибирск, 2007.
3. A. D. Alexandrov, *Convex polyhedra.* Springer, Berlin, 2005.
4. *Академик Александр Данилович Александров. Воспоминания. Публикации. Материалы.* Сост. Г. М. Идлис, Наука, М., 2002.
5. Ю. А. Волков, *О существовании выпуклой поверхности с данной метрикой.* — Труды 3-его Всесоюзного матем. съезда, т. 1, с. 146.
6. Ю. А. Волков, *Существование выпуклого многогранника с данной разверткой.* I. — Вестник ЛГУ. Серия 1: Математика, механика, астрономия **19**, No. 4 (1960), 75–86. (Перевод в [3] Section 12.2.)
7. Ю. А. Волков, *Устойчивость решения проблемы Минковского.* — Вестник ЛГУ. Серия 1: Математика, механика, астрономия **1**, No. 1 (1963), 33–43.
8. Ю. А. Волков, *Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее внутренней метрики.* — Докл. АН СССР **178**, No. 6 (1968), 1238–1240.
9. Ю. А. Волков, *Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения внутренней метрики.* — Украинский геом. сборник **5-6** (1966), 44–69. (Перевод в [3] Section 12.1.)
10. Ю. А. Волков, Е. Г. Подгорнова, *Существование многогранника с данной разверткой.* — Ученые записки Ташкентского государственного педагогического института им. Низами **85** (1972), 3–54.
11. С. П. Оловянишников, *Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей.* — Матем. сб. **18(60)**, No. 3 (1946), 429–440.
12. В. А. Александров, *Теоремы об обратной функции и их приложения в теории многогранников.* `math.nsc.ru/~vaalex/papers/IFTP.pdf` (2005).
13. A. I. Bobenko, I. Izmestiev, *Alexandrov's theorem, weighted Delaunay triangulations, and mixed volumes.* — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58**, No. 2 (2008), 447–505.
14. I. Izmestiev, *A variational proof of Alexandrov's convex cap theorem.* — Discrete Comput. Geom. **40**, No. 4 (2008), 561–585.
15. I. Pak, *Lectures on discrete and polyhedral geometry.* `math.ucla.edu/~pak/geompol8.pdf` (2010).
16. D. Kane, G. N. Price, E. D. Demaine, *A pseudopolynomial algorithm for Alexandrov's theorem.* In: Algorithms and data structures, Lecture Notes in Comput. Sci. **5664**, Springer, Berlin, 2009, pp. 435–446.

§1. Введение

Одна из центральных проблем дифференциальной геометрии в целом – проблема построения замкнутой выпуклой поверхности, на которой реализуется абстрактно заданная метрика положительной кривизны.

История ее решения хорошо известна (см. [2] и [3]). Работы Вейля, которому принадлежит постановка проблемы, Леви, Ниренберга и др. основаны на решении соответствующего уравнения в частных производных – уравнения Дарбу.

А. Д. Александровым был развит новый подход к решению задач геометрии поверхностей, который, в общих чертах, состоит в предварительном решении соответствующих задач для многогранников и в последующем предельном переходе. Данное им решение проблемы Вейля для произвольных выпуклых поверхностей опирается на теорему о существовании замкнутого выпуклого многогранника с наперед заданной разверткой поверхности (см. [1] и [2]), подчиненной, разумеется, некоторым условиям.

Другой подход к решению проблемы Вейля указали Бляшке и Герглотц (см. [4]), связав ее с некоторой вариационной задачей.

Целью настоящей работы было применение указанного подхода к решению задачи для многогранников и выяснение на данном примере возможностей вариационного метода как общего метода доказательства теорем существования в теории выпуклых многогранников (см. [1, с. 295]).

Нам пришлось, однако, заметно уклониться от намеченного ими пути.

Бляшке и Герглотц обратили внимание на то, что для реализации абстрактно заданной, для определенности на сфере, метрики достаточно было бы продолжать ее внутрь так, чтобы тензор кривизны полученной римановой метрики был везде равен нулю, а затем шар с определенной в нем таким образом метрикой изометрично вложить в евклидово пространство.

Далее они заметили, что, как хорошо известно, в связи с работами по теории относительности, условие экстремальности интеграла

$$\int R(x)dv,$$

где R – скалярная риманова кривизна, а dv – элемент объема риманова пространства, состоит в обращении в нуль тензора Риччи $R_{ik} = 0$, а в трехмерном пространстве, следовательно, и тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Поэтому интересующую нас метрику можно искать среди доставляющих экстремум этому интегралу.

Путь этот оказывается мало пригодным потому, что, как легко видеть на простейших примерах, соответствующих евклидовой метрике, значение интеграла может не быть ни максимумом его, ни минимумом.

Связь с упомянутой идеей доказательства, приведенного в работе, мы поясним в терминах дифференциальной (римановой) геометрии, как более известных, а аналогичные понятия для многогранников будем вводить в ходе доказательства.

Мы ограничиваемся продолжениями заданной на сфере метрики внутрь ее, зависящими только от одной неизвестной функции параметров u, v на сфере – $\rho(u, v)$, от расстояния (в метрике шара) между некоторой точкой шара и различными точками сферы. Далее мы рассматриваем только такие функции $\rho(u, v)$, для которых

$$R(u, v, \rho, \rho_u, \ldots, \rho_{uu}, \ldots, \rho_{vv}) \leqslant 0.$$

Оказывается, для того, чтобы увеличивать значение интеграла $\int R(x)dv$, которое, очевидно, не превосходит нуля, нужно $\rho(u, v)$ уменьшать вблизи той точки, где еще остается $R < 0$, и этот процесс не останавливается, пока не станет везде $R = 0$.

При этом обращается в нуль и тензор кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, так как он имеет в метриках рассматриваемого вида всего одну компоненту, не обращающуюся тождественно в нуль и сводящуюся к той же R. В результате упоминание об $\int R(x)dv$ становится излишним, а так как уравнение

$$R(u, v, \rho, \ldots, \rho_{vu}) = 0$$

оказывается, по существу, известным уравнением Дарбу, то набросанное выше рассуждение есть не что иное, как способ (пока неосуществленный) решения уравнения Дарбу, аналогичный решению задачи Дирихле с помощью супергармонических функций.

В настоящей работе способом, соответствующим только что обрисованному, подробно проведено доказательство существования для замкнутого выпуклого многогранника в евклидовом пространстве (§§2–8) и намечены доказательства для выпуклых шапочек и многогранников в пространствах сферическом и Лобачевского (§8).

Необходимо еще отметить, что на той же идее (одностороннего приближения к решению) основано доказательство существования выпуклого многогранника с границей, однозначно проектирующегося на данную плоскость, с заданными проекциями вершин и их кривизнами, данное А. В. Погореловым [5].

§2. Идея доказательства

Всякий выпуклый многогранник можно, очевидно, представлять склеенным из пирамид с общей вершиной в одной из вершин многогранника.

Обратно, если такого рода набор пирамид, или, как мы будем говорить, телесную развертку (точные определения см. в §3), подчинить некоторым условиям, то из нее склеивается выпуклый многогранник.

По наперед заданной развертке поверхности мы построим телесную развертку, удовлетворяющую всем этим требованиям, кроме, может быть, одного: углы при внутренних ребрах этой развертки, т. е. суммы подходящих к ребру двугранных углов пирамид, будут все не меньше π, т. е. величины, необходимой для осуществимости склеивания. Выяснится, однако, что если хоть при одном внутреннем ребре такой развертки угол превышает 2π, то, укоротив это ребро, можно получить развертку того же вида. Это существенно основано на том, что в развертках такого вида при укорочении некоторого внутреннего ребра углы при всех других внутренних ребрах могут только возрасти и потому остаются не меньшими 2π.

Естественно ожидать, что у развертки с наименьшей суммой длин внутренних ребер все эти углы равны 2π и из нее склеивается искомый многогранник. В следующих параграфах это и будет доказано.

В §§3–4 вводятся понятия и формулируются результаты, необходимые для доказательства основной теоремы, данного в §5, а в §§6–8 доказываются утверждения, высказанные в §4.

§3. Телесные развертки

Телесной разверткой назовем совокупность конечного числа многогранников с указанным правилом склеивания их по граням (все понятия и результаты, относящиеся к разверткам и склеиванию, мы заимствуем из [1, гл. 1, §§6–8]; многогранником называется конечный телесный многогранник). Правило склеивания подчиняется обычным требованиям:

(1) грани склеиваются так, что длины любых лежащих на них и отождествляемых отрезков равны;
(2) от каждого многогранника можно перейти к любому другому, проходя лишь многогранники, склеенные по граням;
(3) каждая грань либо не склеивается ни с какой другой, либо склеивается только с одной.

Грани, не склеиваемые с другими, образуют поверхность телесной развертки (в дальнейшем мы будем часто опускать слово "телесная" там, где это не вызовет недоразумений).

Грани, ребра и вершины многогранников развертки будем называть гранями, ребрами и вершинами развертки, граничными, если они принадлежат ее поверхности, и внутренними – в противном случае.

Углом при ребре развертки назовем сумму сходящихся при нем двугранных углов, а кривизной при внутреннем ребре – разность $\omega = 2\pi - \theta$, где θ – угол при этом ребре.

Чтобы при деформации многогранников развертки не выходить из рассматриваемого множества разверток, нам придется причислить к нему и развертки, у которых некоторые многогранники выродились в плоские многоугольники.

Можно ограничиться такими вырождениями, при которых грани не вырождаются в отрезки.

Невырожденные многогранники, а также вырожденные, но с гранями, не вырождающимися в отрезки (тем более – точки), назовем допустимыми. Двугранные углы таких многогранников естественно определяются по непрерывности. Полученный плоский многоугольник считается неоднократно покрытым гомеоморфным поверхности невырожденного многогранника, как это определено в [2, с. 23].

На развертки, склеенные из допустимых многогранников, очевидным образом распространяются все предыдущие определения. Окрестность любой вершины A телесной развертки склеена из некоторых окрестностей вершин подходящих к A телесных углов (под окрестностью точки мы будем всегда понимать совокупность точек, удаленных от нее не более чем на некоторое $r > 0$, обычно – достаточно малое). Пересекая эти углы единичной сферой с центром в A и склеивая естественным образом полученные сферические многоугольники, мы получим сферическую развертку S_A, которую назовем сферическим сечением при точке A.

Подходящим к A ребрам телесной развертки соответствуют вершины развертки S_A, с углами при них, равными углам при ребрах, граням соответствуют дуги с длинами, равными углам граней при точке A.

Сферическими сечениями мы будем широко пользоваться при изучении строения разверток.

Дуги сферических сечений, соответствующие разным "сторонам" вырожденных многогранников, мы будем склеивать целиком, если речь пойдет о метрике сечения, или – только концами, если нужно будет сохранить соответствие телесных углов и многоугольников сечения, их элементов и схему склеивания. Из контекста будет ясно, как понимается сечение в каждом конкретном случае.

§4. Специальные развертки и их свойства

Назовем телесную развертку M конической, если:

(1) она склеена из допустимых выпуклых пирамид ρ_k, вершины которых лежат вне оснований;
(2) вершины A_k всех пирамид склеиваются в одну точку (вершину развертки), а основания – в развертку R_1, гомеоморфную кругу. Вся поверхность R развертки M тогда, очевидно, гомеоморфна сфере.

Будем говорить, что коническая развертка M – развертка с поверхностью положительной кривизны, если:

(1) R – развертка положительной кривизны;
(2) кривизна (на поверхности) точки A_0 положительна, а
(3) через (возможные) вершины $A_i \in R$ с нулевой кривизной не проходит ни одна кратчайшая на поверхности, исходящая из точки A_0.

Для вершин A_k с положительной кривизной последнее заведомо справедливо.

Коническую развертку назовем выпуклой, если:

(1) угол при любом граничном ребре не превышает π и
(2) диаметр сферического сечения при вершине A_0 меньше π.

Будем говорить, что M – развертка неположительной кривизны, если при каждом внутреннем ребре кривизна ω_i не превышает нуля, и – отрицательной кривизны, если хоть одна ω_i меньше нуля.

Конические выпуклые развертки неположительной кривизны с поверхностью положительной кривизны назовем специальными развертками.

(Налагая на развертки столь больше число требований, иногда несколько неестественных, мы стремились к возможному упрощению доказательств. Не меняя идеи доказательства, можно было бы, например, снять требования допустимости пирамид, 2 и 3 условия на поверхность. Однако, некоторый эквивалент 2-го условия выпуклости необходим.)

Интересующие нас свойства специальных разверток мы сейчас сформулируем в виде лемм, доказательства их см. в §§6–8.

Склеивая (фактически) некоторые пирамиды развертки в одну, мы получаем развертку, изометричную исходной. Новых вершин при этом, конечно, не появляется. Оказывается, таким путем можно удалить "лишние" граничные ребра, т. е. ребра с углами, равными π.

Лемма 4.1. *Для всякой специальной развертки можно построить изометричную ей специальную развертку, у которой*:

(1) *вершины могут быть только в вершинах исходной*;
(2) *углы при ребрах, разделяющих грани различных пирамид, меньше* π;
(3) *все вершины любой пирамиды – различные точки развертки.*

Такую развертку назовем нормальной.

Лемма 4.2. *Из специальной развертки нулевой кривизны* [*все* ω_i *равны* 0] *можно* [*действительно*] *склеить выпуклый многогранник.*

Используя результаты леммы 4.1, упоминающуюся в §2 закономерность изменения кривизны и некоторые свойства сферических сечений, можно установить, что:

Лемма 4.3. *Если в специальной развертке кривизна хотя бы при одном ребре меньше нуля, то, после того, как развертка заменена изометричной ей нормальной, его можно укоротить, не меняя длины других ребер, так, что развертка останется специальной, метрика ее поверхности неизменной и новых вершин не появится.*

Рассмотрим специальные развертки с равными поверхностями, т. е. развертки одинакового строения, у которых соответствующие грани поверхности равны. Каждая из них вполне определяется длинами внутренних ребер. По сходимости этих длин и определим сходимость таких разверток.

Так как нам потребуется развертка, на которой достигает минимума некая непрерывная функция (сумма) длин ребер, то полезно установить замкнутость рассматриваемого множества.

Лемма 4.4. *Предел последовательности специальных разверток с равными поверхностями – специальная развертка (и, конечно, с той же поверхностью).*

Если R – гомеоморфная сфере развертка положительной кривизны, то справедливы

Лемма 4.5. *Существует специальная развертка M, поверхность которой изометрична R, и*

Лемма 4.6. *Существует лишь конечное число таких разверток R_i, изометричных R и с вершинами в фиксированных точках $A_k \in R$, которые могут быть поверхностями специальных разверток M_K.*

§5. Основная теорема

Докажем теперь, что существует выпуклый многогранник M, поверхность которого изометрична наперед заданной гомеоморфной сфере развертке положительной кривизны R.

Действительно, пусть M_0 – какая-нибудь (лемма 4.5) специальная развертка с поверхностью, изометричной R, и $A_0, A_1, \ldots, A_n$ – ее вершины. Пусть, далее, $R_1, \ldots, R_m$ – все (лемма 4.6) развертки, изометричные R, у которых каждая из вершин – одна из точек A_i ($i = 0, \ldots, n$), являющиеся поверхностями некоторых специальных разверток. Множество специальных разверток с поверхностью R_K обозначим $\{M_k\}$. В каждом из них возьмем одну из разверток M_K с наименьшей суммой длин внутренних ребер (лемма 4.4). Достаточно заметить, что минимум достигается на ограниченной части соответствующего $\{M_K\}$ замкнутого множества ε_K в пространстве $l_1, \ldots, l_p$, где l_i – длины внутренних ребер. Можно, например, считать, что

$$l_i \leqslant \inf \sum_{i=1}^{n} l_i.$$

Среди M_K снова выберем ту (или одну из тех), у которой эта сумма – наименьшая. Кривизна этой развертки M равна нулю, так как иначе, укорачивая ребро с отрицательной кривизной, мы получили бы (лемма 4.3) принадлежащую одному из $\{M_K\}$ развертку с меньшей суммой длин внутренних ребер, а это противоречит выбору M. Но тогда (лемма 4.2) из M действительно склеивается выпуклый многогранник.

§6. Специальные развертки и их свойства (доказательства)

Доказательства лемм 4.1–4.4 будут сведены к установлению некоторых свойств сферических сечений при вершинах развертки. Свойства эти мы сформулируем, а доказывать их будем в §8.

Для выяснения строения этих сечений нужны некоторые предварительные рассмотрения. Тут же будут введены необходимые понятия и исследовано строение части развертки, состоящей из вырожденных пирамид. Рассуждения эти мы проведем не предполагая, что развертка удовлетворяет условию о невырожденности таковых граней и о диаметре сечения при вершине A_0 (углы при граничных ребрах предполагаются там, где определены), так как именно в таких условиях будут в дальнейшем использоваться их результаты.

Боковой поверхностью развертки M назовем ту часть поверхности, что состоит из боковых граней всех пирамид и из оснований вырожденных. Склеивание оставляем по ребрам, углы при которых равны π, и по ребрам, проходящим к вершине M (точка A_0). Вместе с основаниями мы подклеим вырожденные пирамиды и назовем полученное вырожденной частью развертки M.

Будет доказано, что боковая поверхность – гомеоморфный кругу многоугольник с единственной вершиной внутри (точка A_0), звездный относительно этой вершины, а граничные (в M) ребра A_0A_i разбивают его на части, каждая из которых есть либо боковая грань невырожденной пирамиды, либо одна из "сторон" вырожденной. Отсюда следует, что соответствующая часть сферического сечения при вершине A_0 склеивается в ломаную, гомеоморфную границе боковой поверхности. Попутно обнаружится, что боковые грани в рассматриваемых развертках заведомо не вырождены.

Возьмем сначала развертку, состоящую только из боковых граней. Если на ее границе есть ребро BC с углом, равным π, то приклеиваем к ней подходящее к BC основание Q, а с ним – и ту пирамиду P, гранями которой являются Q и A_0BC.

Q лежит внутри угла, ограниченного лучами A_0B и A_0C, так как иначе мы имели бы на поверхности M кратчайшую, выходящую из A_0 и проходящую через другую вершину (продолжение одного из отрезков A_0B или A_0C, лежащее в P – кратчайшая в развертке M и тем более на ее поверхности; для доказательства достаточно провести на поверхности любую ломанную A_0B (A_0C) и развернуть на плоскость многогранник, склеенный из треугольников $A_0A_iA_k$, где A_iA_k – звенья этой ломаной).

Поэтому двугранные углы пирамиды P при всех ребрах, кроме BC, равны нулю и ни одна из ее боковых граней не вырождается в отрезок.

Если на границе полученной развертки все еще есть ребра с углами величины π, то склеивание продолжаем и для новой пирамиды P_1; приходим к тем же результатам. Так как подклеивается любое основание по ребру, при котором двугранный угол подклеиваемой пирамиды имеет величину π, а двугранные углы при всех других ее ребрах равны нулю, то каждая пирамида будет подклеиваться лишь однажды и процесс идет беспрепятственно.

В результате получится развертка, обладающая всеми требуемыми свойствами и содержащаяся в боковой поверхности. Убедимся, что ей принадлежат все многоугольники боковой поверхности. Если Q – один из них, то достаточно, очевидно, показать, что, переходя от него к другим через ребра с углами величины π, мы непременно дойдем до одной из боковых граней.

Действительно, пусть Q_1 – одно из тех достижимых этим путем оснований, исходя из многоугольника Q, которые ближе всего подходят к точке A_0, а P_1 – содержащая его пирамида. Если ближайшая к A_0 точка Q_1 лежит внутри стороны B_1C_1, то $A_0B_1C_1$ и есть боковая грань, лежащая на поверхности, так как иначе к Q_1 по B_1C_1 приклеивалось достижимое же [развертка M выпукла, а угол при B_1C_1 в P_1 уже равен π] основание Q_2 и на нем нашлись бы более близкие к A_0 точки.

Если же ближайшая точка – вершина, например B_1, то двугранный угол в P_1 хотя бы при одном из подходящих к ребер (пусть это – B_1C_1) имел бы величину π, иначе B_1 не была бы ближайшей к A_0.

Если грань $A_0B_1C_1$ не лежит на поверхности, то подклеиваем по ней пирамиду P_2 и т. д. Этот процесс остановится, так как ребро B_1C_1 с углом величины π, по которому происходит подклеивание, на каждом шагу поворачивается в сторону A_0B_1, на один из углов при вершине B_1 на поверхности, и, если бы к нему все время подходило новое основание, на одном из них появились бы точки, более близкие (чем B_1) к A_0.

Основанием развертки M назовем часть ее поверхности, состоящую из основания невырожденных пирамид и границы боковой поверхности всех внутренних точек боковой поверхности.

Окрестность внутренней точки основания совпадает с некоторой ее окрестностью на поверхности, а окрестность граничной получается из таковой выбрасыванием внутренних точек некоторых секторов.

Невырожденными частями основания назовем развертки, получающиеся из оснований невырожденных пирамид при сохранении ими всех склеиваний по ребрам. Их границы и все прочие точки основания принадлежат одновременно и границе боковой поверхности.

Мы установим, что основание односвязно, понимая под этим следующее: любая простая замкнутая ломаная основания ограничивает на одной из его невырожденных частей область, гомеоморфную кругу.

В самом деле, эта ломаная разбивает поверхность на две такие области. Покажем, что все внутренние точки той на них, что не содержит вершины A_0, принадлежат одной и той же невырожденной части основания.

Действительно, если бы там были точки, не принадлежащие ни одной или принадлежащие двум разным частям, то нашлись бы и точки боковой поверхности (во втором случае такая непременно найдется на ломаной, соединяющей внутри области точки разных частей).

Отрезок AA_0 боковой поверхности, соединяющей одну из найденных точек с вершиной, пересекал бы тогда данную ломаную, но это невозможно, так как все его точки, кроме, быть может, A, лежат внутри боковой поверхности. (Утверждение, очевидно, осталось бы справедливым, если бы боковая поверхность была только связной, а не звездной.)

Сферическое сечение S_{A_0} при вершине A_0 гомеоморфно основанию развертки M. Так как соответствие оснований и сечений невырожденных пирамид не нуждается в пояснении, то достаточно вспомнить, что сечение остальной части развертки гомеоморфно границе боковой поверхности.

Невырожденным частям основания соответствуют невырожденные части сечения – сферические развертки с полными углами при внутренних вершинах, не меньшими 2π.

Из односвязности основания следует аналогичное свойство сечения S_{A_0}.

Границей сечения мы называем замкнутую ломаную, соответствующую боковой поверхности, тем самым при подсчете ее длины отрезки, по которым она склеивается сама с собой, считаются дважды и длина всегда оказывается равной углу на поверхности при точке A_0.

Назовем такое сечение – сечением 1-го рода. Диаметр сечения S_{A_0} в специальной развертке меньше π.

Исследование разверток основывается на следующих свойствах таких сечений, вполне аналогичных свойствам сферических многоугольников диаметра, меньшего π.

Свойство 1: Если диаметр сечения 1-го рода меньше π, то в нем всякая геодезическая – кратчайшая и притом единственная между ее концами. Вследствие этого нет геодезических с совпадающими началом и концом.

Чтобы проверить, что при деформациях развертки (леммы 4.3 и 4.4) диаметр сечения остается меньшим π, мы воспользуемся тем, что при этом не меняется метрика поверхности, следовательно, длина границы сечения, равная углу при точке A_0, и тем, что

Свойство 2: в сечении с диаметром $d < \pi$ длина границы r и диаметр d связаны соотношением $d \leqslant \frac{r}{2}$.

Отсюда получаем, что

$$d \leqslant \frac{r}{2} = \frac{2\pi - \Omega_0}{2} = \pi - \frac{\Omega_0}{2},$$

где Ω_0 – кривизна точки A_0 на поверхности.

Сферическое сечение S_{A_0} при вершине A основания развертки M состоит из треугольников, склеенных в том же порядке, как склеены при вершине A углы оснований пирамид. Граничные ребра сечения соответствуют граням, лежащим на поверхности, углы при граничных вершинах равны углам при соответствующих граничных ребрах и потому не превышают π, если же общая вершина O треугольников сечения [центр сечения] лежит внутри, то полный угол при ней составляет по меньшей мере 2π, так как он равен углу при ребре A_0A.

Такое сечение назовем сечением 2-го рода.

Подобно тому, как длина стороны выпуклого сферического многоугольника не превосходит π, если он не есть полусфера, так и в сечении 2-го рода

Свойство 3: граница не содержит дуги с нулевым поворотом и длиной более π, если поворот границы не равен нулю, а длина не превосходит 2π; если же поворот границы равен нулю, то ее длина дуги составляет по меньшей мере 2π.

Отметим еще одно предложение о сферическом четырехугольнике.

Свойство 4: Если в сферическом четырехугольнике $ADCD$ угол C меньше π, то, при неизменных длинах сторон, диагональ AC и угол A меняются в противоположные стороны.

Переходим теперь к доказательству леммы 4.1.

Разобьем поверхности развертки M на грани, относя к одной грани все многоугольники, от каждого из которых к любому другому можно перейти по поверхности, пересекая лишь ребра с углами величины π, и склеивая эти многоугольники по таким ребрам.

Докажем, что всякая грань изометрична плоскому выпуклому многоугольнику и, попутно, что различные точки границы грани – различные точки развертки M. На боковой поверхности есть хотя бы два ребра A_0A_1 и A_0A_2 с углами, меньшими π, и тем самым хотя бы две грани, так как иначе соответствующая ей граница сечения S_{A_0} была бы геодезической (более подробное рассуждение смотри далее) с совпадающими началом и концом, а это исключено свойством 1.

По тому же свойству 1, углы этих граней при точке A_0, равные длинам соответствующих геодезических на границе S_{A_0}, меньше π.

Угол на границе всякой грани при любой из остальных вершин A не превышает π, так как принадлежащий грани сектор окрестности A соответствует дуге границы сечения S_A с нулевым поворотом (свойство 3), а поворот всей границы S_A не равен нулю, так как A лежит на границе грани. Если же A – внутренняя вершина грани, то поворот границы S_A равен нулю, и по тому же свойству 3 длина границы, а с ней и угол при точке A_0 на поверхности, равны 2π.

Окрестность любой точки грани можно, следовательно, развернуть на плоскость и вместе с тем подклеить к ней пирамиды, куски оснований которых ее составляют. Кратчайшая в грани склеивается при этом в отрезок прямой. Проекция этого отрезка из точки A_0 на сечение S_{A_0} – дуга, поворот которой со стороны проекции грани (если грань лежит на основании и проекция невырождена), очевидно, равен нулю.

Если и с другой стороны к ней подходит только невырожденная часть S_A, то и там поворот не превышает нуля, так как полные углы при всех точках внутри S_{A_0} составляют по меньшей мере 2π.

Кратчайшая в грани боковой поверхности проектируется в части дуги S_{A_0}, соответствующей всей грани. Поворот ее со стороны невырожденной части, т. е. в тех точках, вблизи которых нет других дуг вырожденной части S_{A_0}, не превышает нуля, так как углы при лежащих там вершинах либо равны π (если вершина A_k соответствует граничному ребру A_0A_i), либо не меньше π, если A_i отвечает внутреннему ребру A_0A_i, ибо угол при нем составляет по меньшей мере 2π, а на долю вырожденной пирамиды приходится π, тем самым поворот проекции со стороны невырожденной части S_{A_0} всегда не превышает нуля и проекция есть геодезическая в S_{A_0}.

Отсюда немедленно следует, что различные точки границы грани – различные точки развертки M, так как иначе, соединив кратчайшей точки грани, склеивающейся в одну точку M, и спроектировав ее на S_{A_0}, мы получили бы там геодезическую, начинающуюся и кончающуюся в одной точке, что невозможно (свойство 1).

Наконец, если бы граница грани состояла хотя бы на двух замкнутых ломаных, то, соединяя кратчайшей некоторые точки разных ломаных и разрезая грань по этой кратчайшей, мы получили бы развертку того же вида (без истинных вершин внутри и с не большими π углами на границе), у которой некоторые граничные точки (берега разреза) склеиваются, но невозможность этого уже доказана.

Развернем каждую грань основания на плоскость и склеим в одну все соответствующие ей пирамиды.

Каждую грань боковой поверхности превратим в вырожденную пирамиду, приклеиванием к ней второго экземпляра, и заменим такими пирамидами все прежние вырожденные. Полученная развертка и есть, очевидно, искомая.

Лемма 4.2 (доказательство)

Прежде всего докажем, что основание специальной развертки M нулевой кривизны, а с ним и сферическое сечение S_{A_0}, либо гомеоморфно отрезку, либо состоит из одной гомеоморфной кругу невырожденной части.

Представим, что боковая поверхность и вырожденная часть развертки M уже склеены. Все граничные вершины основания лежат и на границе боковой поверхности.

Рассмотрим строение основания в окрестности такой точки. Если эта точка A_i – конец внутреннего (в M) ребра A_0A_i, то из секторов, составляющих ее окрестность на поверхности, либо только один принадлежит боковой поверхности, либо таких два и они составляют всю окрестность. Это видно из того, что вместе с каждым таким сектором A_0A_i подходит и двугранный угол вырожденной части, равный π. По той же причине, если A_k – конец граничного (в M) ребра A_0A_k, то из подходящих к ней секторов оснований либо ни один не принадлежит боковой поверхности, либо есть всего один такой сектор, принадлежащий боковой поверхности.

Кроме того, к A_k подходят граничащие по A_0A_k секторы боковой поверхности. Вспоминая, что окрестность точки на основании получается выбрасыванием на ее окрестности на всей поверхности внутренних точек боковой поверхности, мы видим, что во всех случаях окрестность точки границы основания гомеоморфна либо отрезку, либо сектору.

Отсюда следует, что основание имеет упомянутое строение.

Обращаясь к углам на границе невырожденной части, легко находим, что они все не превышают π, либо вследствие выпуклости, либо потому, что из полного угла 2π на вырожденную часть приходится π.

Теперь ясно, что если невырожденной части нет, то S_{A_0} разворачивается в дугу большого круга, в противном случае S_{A_0} – гомеоморфная кругу сферическая развертка диаметром меньше π с нулевой кривизной в вершинах и углами на границе, не превышающими π, и следовательно, разворачивается в выпуклый сферический многоугольник (доказательство для случая плоской развертки есть в [1, с. 78], оно буквально переносится и на наш случай).

После этого по каждому сечению строим соответствующую ему пирамиду с вершиной в центре сферы, и многогранник готов.

Лемма 4.3 (доказательство)

Пусть развертка уже заменена изометричной ей нормальной и кривизна при ребре A_0A_i меньше нуля. Если укорачивать это ребро, не меняя других и метрики поверхности (это возможно и в вырожденной пирамиде, так как A_0A_i – внутреннее ребро и A_i – не соседняя с A_0 вершина), то в каждой из подходящих к нему пирамид основание переломится по диагонали, соединяющей соседние с A_i вершины A_k и A_l.

Будут деформироваться только треугольные пирамиды вида $A_0A_iA_kA_l$ и при достаточно малом укорочении никаких вырождений не наступит и развертка останется конической.

Углы при диагоналях A_kA_l убывают от начального значения π, а углы при всех других граничных ребрах, входящих в деформируемые пирамиды, будучи поначалу меньшими π и меняясь непрерывно, такими и останутся при малом изменении A_0A_i.

В сечениях S_{A_0} при соседних с A_i вершинах будет укорачиваться дуга $OA_i{}'$, соответствующая грани $A_0A_kA_i$, так как вместе с A_0A_i убывает угол $A_0A_kA_i$.

В сферическом четырехугольнике, образованном склеенными по $OA_i{}'$ треугольниками сечения S_{A_k}, угол при точке $A_i{}'$ меньше π, так как он равен углу при ребре A_iA_k, а потому угол при точке O растет с уменьшением $A_i{}'$ (свойство 4), кривизна же при A_0A_k тем самым убывает. Поэтому, если вначале при всех ребрах кривизна неположительна, а при A_0A_i – отрицательна, то она не выйдет из этих границ и при малой деформации (при A_0A_i по непрерывности).

Остается еще распорядиться величиной деформации так, чтобы и диаметр S_{A_0} остался меньшим π.

Лемма 4.4 (доказательство)

Чтобы установить, что ни для одной из пирамид вершина не сходится к основанию, мы покажем, что расстояние от вершины A_0 до любой точки какого-либо из оснований не менее положительной постоянной, зависящей лишь от угла при точке A_0 на поверхности и расстояния по поверхности $\rho(A_0, R_1)$ от A_0 до ближайшего из оснований пирамид. Это очевидно, если точка принадлежит боковой поверхности. Пусть теперь A – точка основания развертки, отличная от всех его вершин.

Через проекцию A' точки A на сечение S_{A_0} проведем в нем геодезическую и продолжим ее в обе стороны до первой встречи с границей S_{A_0} в точках $A_1{}'$ и $A_2{}'$.

Можно считать, что геодезическая $A_1{}'A_2{}'$ не проходит ни через одну из вершин S_{A_0}, так как их конечное число и каждая соединима с A' единственной геодезической (свойство 1).

В каждой пирамиде, по сферическому сечению которой проходит дуга $A_1{}'A_2{}'$, проведем плоское сечение через точку A_0 и эту дугу. Полученные в сечениях треугольники склеятся, вследствие склеивания пирамид, в плоский выпуклый многоугольник. В самом деле, угол этого многоугольника при точке A_0 равен длине геодезической и потому (свойство 2) не превышает

$$\pi - \frac{\Omega_0}{2} < \pi.$$

Все остальные его вершины A_i лежат на ребрах основания. Если склеить пирамиды, содержащие ребро, на котором лежит вершина A_i, то по выпуклости развертки двугранный угол при ребре в полученном многограннике не будет превышать π, а плоские сечения пирамид сольются в плоское сечение этого многогранника.

Очевидно, что величина интересующего нас угла этого сечения при точке A_i не превышает π.

Так как длины сторон A_0A_1 и A_0A_2, очевидно, составляют по меньшей мере $\rho(A_0, R_1)$, угол при точке A_0 отличается от π не менее чем на $\frac{\Omega_0}{2}$, где Ω_0 – кривизна точки A_0 на поверхности, а точка A не лежит на сторонах A_0A_1 и A_0A_2, то длина A_0A составляет по меньшей мере $C(\Omega_0, \rho) > 0$; годится, например,

$$C = \rho \cos\left(\frac{\pi - \frac{\Omega_0}{2}}{2}\right) = \rho \sin\left(\frac{\Omega_0}{4}\right).$$

По непрерывности та же оценка остается справедливой для всех точек основания.

Поскольку условия, относящиеся к поверхности, кривизне, углам при граничных ребрах, при предельном переходе, очевидно, сохраняются, а невырождаемость боковых граней установлена при рассмотрении боковой поверхности, то осталось только заметить, что диаметр сечения S_{A_0} любой развертки последовательности не превышает $\pi\frac{\Omega_0}{2}$, а потому и диаметр сечения предельной развертки не превосходит той же величины.

§7. Специальные развертки с заданной поверхностью

Здесь мы докажем леммы 4.5 и 4.6 §4.

Для доказательства первой придется разрезать данную развертку R геодезическими на плоские выпуклые многоугольники и, объявив их вырожденными пирамидами, склеить из них специальную развертку.

Сделаем прежде всего несколько замечаний о кратчайших в развертках положительной кривизны.

Известно, что кратчайшую можно развернуть в отрезок прямой на плоскости так, что одновременно развернется на плоскость и некоторая ее окрестность (вблизи концов кратчайшей окрестность, может быть, придется разрезать, см. [1, с. 73], чего мы в дальнейшем оговаривать не будем).

Пусть A и B – две точки развертки. Все точки, достаточно близкие к B, соединяются с A кратчайшими, каждая из которых лежит в некоторой наперед заданной окрестности одной из кратчайших AB. Действительно, в противном случае можно было бы выбрать сходящуюся последовательность кратчайших AB_n (B_n сходится к B), предел которой не совпадает ни с одной из кратчайших AB, а это противоречит тому, что предел кратчайших – кратчайшая.

Если AB – естественная кратчайшая между A и B, а B не есть истинная (т. е. с положительной кривизной) вершина развертки, то AB можно продолжить за точку B так, что и полученный отрезок AB_1 – кратчайшая. Это становится очевидным, если развернуть некоторую окрестность AB на плоскость и заметить, что для достаточно близких к B точек B_n кратчайшая AB_n проходит в этой окрестности.

Пусть теперь B – истинная вершина или точка, соединимая с точкой A более чем одной кратчайшей. Сколькими кратчайшими соединяются с A различные точки, близкие к B?

Кратчайшие AB делят окрестность точки B на секторы. Проведем биссектрисы, т. е. кратчайшие, делящие пополам углы этих секторов. Если B – истинная вершина и AB – единственная кратчайшая, то сама AB и единственная биссектриса BB_1 делят окрестность B на секторы с углами, равными половине угла при точке B, во всех других случаях угол сектора между соседними биссектрисами, очевидно, тоже не превосходит половины угла при точке B.

Все внутренние точки C сектора, ограниченного соседними биссектрисами, соединимы с A единственной кратчайшей AC, идущей в окрестности той из дуг AB, что подходит к B в этом секторе: точки биссектрис (кроме B) соединяются с A двумя кратчайшими (считается фиксированным некоторое направление обхода вокруг точки B, после этого ясно, как понимать: “соседние” и “между”).

Для доказательства достаточно развернуть на плоскость все кратчайшие AB с некоторыми их окрестностями, начав с разворачивания окрестности точки B.

Кратчайшие развернутся в отрезки, исходящие из точки B, биссектрисы – в биссектрисы углов между ними, и, так как для близких к B точек C любая кратчайшая AC проходит в одной из развернутых окрестностей, все сводится к известным фактам планиметрии.

Заметим, наконец, что внутри любого двуугольника с вершинами A и B есть истинная вершина развертки, соединимая с A единственной кратчайшей.

Действительно, иначе, соединив заведомо имеющуюся там вершину C с A двумя кратчайшими, мы получили бы двуугольник, вложенный в исходный, а продолжая этот процесс далее – последовательность таких двуугольников и различных истинных вершин внутри них, но это невозможно, так как число вершин конечно.

(Предполагалось, разумеется, что развертка односвязна.)

Переходя к доказательству леммы 4.5, возьмем некоторую истинную вершину A_0 развертки R и, проведя из нее кратчайшие во всех направлениях, продолжим каждую из них до конца, т. е. до точки, соединимой с A_0 более чем одной кратчайшей, или до истинной вершины.

Накрывая каждую из этих кратчайших достаточно малой открытой окрестностью и выбирая известным образом конечное покрытие, убеждаемся, что точек, соединимых с A_0 более чем двумя кратчайшими – конечное число, а точки, соединимые двумя, лежат на конечном числе кратчайших.

Установим направление обхода вокруг точки A_0 и пронумеруем секторы между последовательными кратчайшими, идущими в истинные вершины и в точки, соединимые с тремя и более кратчайшими. Сами эти кратчайшие назовем отмеченными. Концы кратчайших, идущих в одном из этих секторов, все различны, так как иначе внутрь получающегося двуугольника, и тем более сектора, шла бы одна из отмеченных кратчайших, и потому заполняют некоторую геодезическую BC без кратных точек. Вместе с границами A_0B и A_0C она вырезает из развертки плоский треугольник. При движении точки D внутри BC кратчайшая A_0D, не лежащая в упомянутом треугольнике, тоже зачеркивает некоторый сектор. Действительно, ее направление в точке A_0 меняется непрерывно, иначе получился бы двуугольник и некоторая точка дуги BC оказалась бы соединенной с A_0 более чем двумя кратчайшими: тем самым A_0D зачеркивает сектор между своими предельными положениями $\overset{\frown}{A_0B}$ и $\overset{\frown}{A_0C}$. Внутрь него не может идти отмеченная кратчайшая, так как тогда ее конец D лежал бы на BC, а там таких точек нет.

Из всего этого видно, что границы секторов и геодезические, состоящие из концов кратчайших, выходящих из точки A_0, разбивают развертку на пары равных плоских треугольников.

Разрежем развертку по всем противолежащим A_0 сторонам этих треугольников и по тем из отмеченных кратчайших A_0A_i, которые являются единственными кратчайшими между истинными вершинами A_0 и A_i.

Треугольники, подходящие к A_0 между соседними разрезами A_0A_i и A_0A_{i+1}, составят плоский выпуклый многоугольник P_i. Выпуклый он потому, что углы при всех его вершинах не превосходят половин углов при тех же точках в развертке: для всех вершин, отличных от A_0, это уже установлено в предварительных замечаниях, при точке A_0 это верно потому, что в P_i может входить лишь один из каждой пары треугольников (с равными углами при точке A_0), на которые разбита развертка. Доказывается это неоднократно приводившимися рассуждением с двуугольниками. Если хоть один из полученных многоугольников – треугольник, то парой таких треугольников и исчерпывается вся развертка. В самом деле, этот треугольник A_0BC и склеенный с ним по BC треугольник $A'_0B'C'$ непременно склеятся и по A_0B, A'_0B', и по A_0C, A'_0C', иначе либо A_0B, либо A_0C не была бы единственной кратчайшей.

Отрезая теперь от каждого из P_i диагональю A_iA_{i+1} треугольник $A_0A_iA_{i+1}$ и объявляя его частью боковой поверхности, а все остальное – основанием, мы превратим P_i в вырожденную допустимую пирамиду.

При склеивании оснований и вершин эти пирамиды склеятся в развертку с поверхностью R.

Развертка же эта специальная. Не очевидно здесь, быть может, то, что диаметр сферического сечения S_{A_0} меньше π. Но это следует из того, что S_{A_0} состоит в данном случае только из отрезков больших кругов, кратчайшая не может проходить по одному отрезку дважды, поэтому длина ее не более суммы длин всех отрезков, но удвоенная сумма длин всех отрезков равна углу при точке A_0 на поверхности и, следовательно, меньше 2π.

Доказательство леммы 4.6 совсем просто:

Любое ребро поверхности специальной развертки – кратчайшая. Для ребер, подходящих к вершине A_0, это очевидно. Если же A_1A_2 – одно из остальных ребер, а $A_1\frown A_2$ – какая-либо ломаная с теми же концами, не проходящая через точку A_0, то развернем на плоскость и склеим треугольники $A_0A_\alpha A_\beta$, где $A_\alpha A_\beta$ – звенья ломаной $A_1\frown A_2$.

Длина $A_1\frown A_2$ очевидно не менее длины диагонали $\overline{A_1A_2}$ полученного плоского многоугольника, если же угол многоугольника при вершине A_0 составляет по меньшей мере π, то она не меньше чем $A_0A_1 + A_0A_2$. Но так как угол при вершине A_0 в треугольнике $A_0A_1A_2$ не более чем в многоугольнике (проекция A_1A_2 на S_{A_0} – кратчайшая) и, кроме того,

$$A_1A_2 \leqslant A_0A_1 + A_0A_2,$$

то всегда выполнено либо

$$A_1A_2 \leqslant \overline{A_1A_2} \leqslant A_1\frown A_2,$$

либо

$$A_1A_2 \leqslant A_0A_1 + A_0A_2 \leqslant A_1\frown A_2.$$

Наконец, если $A_1\frown A_2$ проходит через A_0, то, как уже упоминалось, ее отрезки $A_1\frown A_0$ и $A_0\frown A_2$, уже не содержащие A_0 внутри, составляют по меньшей мере A_1A_0 и A_2A_0 соответственно и, следовательно, опять $A_1A_2 \leqslant A_1\frown A_2$.

Так как фиксированные точки некоторой развертки можно соединить лишь конечными числом кратчайших, то тем самым конечно и число ее разбиений на многоугольники с такими сторонами.

§8. Сферические сечения

Теперь мы установим свойства сферических сечений, использованные в §6.

Сечение 2-го рода устроено столь просто, а уточнения на случай, когда в нем есть вырожденные треугольники, столь очевидны, что мы ими полностью пренебрежем.

Кратчайшую OC, соединяющую центр O сечения с некоторой точкой C его границы, а также длину этой кратчайшей, будем называть радиусом точки C.

Разность радиусов любых точек C_1 и C_2 не превышает длины любой из частей, на которые разбита этими точками граница S.

Действительно, если OA_i – радиусы граничных вершин в той последовательности, как они встречаются при переходе от C_1 к C_2, то, складывая очевидные неравенства

$$OA_1 \leqslant OC_1 + C_1A_1, \ldots,$$
$$OA_{i+1} \leqslant OA_i + A_iA_{i+1}, \ldots,$$
$$OC_2 \leqslant OA_n + A_nO,$$

мы и получим требуемое:

$$OC_2 \leqslant OC_1 + (C_1A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_nC_2).$$

Свойство 3. Если точка O – на границе сечения S, то S – выпуклый сферический многоугольник и справедливость утверждения общеизвестна.

Треугольники сечения S с центром O внутри будем укладывать на сферу и склеивать их так, как они прилегают в S, располагая следующий вне предыдущих, пока угол при точке O не станет равным 2π (от последнего, быть может, придется отрезать радиусом и уложить только часть).

Если поворот границы равен нулю, то уложенная ее часть покроет при этом большой круг, а потому длина границы составит по меньшей мере 2π. В противном случае соединим начало C_1 и конец C_2 лежащей на сфере части границы S отрезком C_1C_2 большего из радиусов OC_1 и OC_2. Так как длина C_1C_2 не превышает длины остальной части границы, то полученная на сфере замкнутая ломанная не длиннее всей границы и потому длина ее не превышает 2π.

Если бы она (ломаная) содержала отрезок большого круга, больший π, то длина ее могла бы остаться не превышающей 2π только если вся она – большой круг, но тогда это и была бы вся граница, ибо уже выложена длина 2π, а поворот границы оказался бы равен нулю.

Остается отметить, что если на границе S был такой отрезок, то с содержащих его треугольников и следовало начинать укладывание на сферу.

При исследовании сечений 1-го рода нам понадобятся свойства кратчайших в сферических развертках диаметра меньше π с неположительной кривизной в вершинах. Они аналогичны общеизвестным свойствам, упоминавшимся в начале §7, и устанавливаются сходным образом.

Обратим лишь внимание на следующие особенности: кратчайшая может проходить и через вершину, разбивая ее окрестность на секторы с углами не меньше π: кратчайшие с общими концами могут иметь и другие изолированные общие точки и даже целые отрезки (те и другие – в конечном числе); если все кратчайшие AB совпадают хотя бы в некоторой окрестности точки B, то AB можно продолжить за точку B, оставляя ее кратчайшей.

Проводя из некоторой точки A кратчайшую и считая ее геодезически продолженной достаточно далеко, назовем первую ее точку C, соединимую с A еще хотя бы одной кратчайшей $\overset{\frown}{AC}$, точкой, сопряженной с A. Очевидно, AC и $\overset{\frown}{AC}$ не совпадают вблизи C, а вплоть до C AC остается кратчайшей.

При доказательстве этих предложений способом, приведенным в §7, единственное отличие будет в том, что для разворачивания некоторой окрестности кратчайшей на сферу придется, быть может, из окрестностей вершин, на ней лежащих, вырезать такие секторы, чтобы полный угол при этих точках стал равным 2π.

Если при этом выбрасываемые дуги кривых заменять отрезками берегов разреза, то длины этих кривых лишь уменьшатся (см. замечание в начале §8) и дальнейшие рассуждения §7 сохраняют силу.

Двуугольником назовем гомеоморфную кругу фигуру, ограниченную кратчайшими с общими концами (на его сторонах могут быть точки с углами, не равными π).

Свойство 1.

Если в сечении 1-го рода с диаметром, меньшим π, есть геодезическая, не являющаяся кратчайшей, то найдутся различные кратчайшие с общими концами, так что достаточно опровергнуть эту последнюю возможность. Действительно, если AB – такая геодезическая, то на ней есть точка C, сопряженная с A, а различные кратчайшие AC и $\overset{\frown}{AC}$ и дают то, что нужно.

Ограничиваясь, если нужно, некоторыми их отрезками, можно считать, что у них нет общих точек, кроме концов A и C: по односвязности сечения эти кратчайшие ограничивают двуугольник на невырожденной части сечения. Если внутри двуугольника есть вершина развертки B, то соединим ее кратчайшей с одной из вершин двуугольника A, кратчайшую AB продолжим, пока не дойдем до границы двуугольника или до сопряженной с A точки. Полученную точку C_1 соединим с A отличной от AC_1 кратчайшей $\widehat{AC_1}$.

Кратчайшую AB (AC_1 и подобные им в дальнейшем) можно считать лежащей в рассматриваемом двуугольнике, заменяя, если нужно, некоторые ее отрезки отрезками границы двуугольника. AC_1 и $\widehat{AC_1}$ остаются при этом различными. Они сами или некоторые их отрезки ограничивают двуугольник, содержащий внутри хотя бы одной вершиной меньше исходного. В конечное число шагов мы избавимся таким образом от всех вершин внутри двуугольника.

Полученный двуугольник (пусть его вершины – A_n и C_n) можно развернуть на сферу. Из его вершины A_n проведем внутрь него любую кратчайшую – лишь бы она разбивала угол сектора при точке A_n на части, не равные целым кратным 2π. При продолжении она останется кратчайшей, так как длина ее не может превзойти диаметра двуугольника, а тем более π, и если бы нашлась более короткая линия, то она и при развертывании на сферу дала бы более короткую кривую, что невозможно.

Так мы дойдем до некоторой точки B_n границы. Отрезок границы A_nB_n – тоже кратчайшая, поэтому он должен развернуться на ту же дугу большого круга, что и построенная кратчайшая, но это невозможно, так как угол сектора между ними не есть целое кратное 2π.

Свойство 2.

При тех же условиях оба конца самой длинной кратчайшей лежат на границе, так как кратчайшую, кончающуюся внутри, всегда можно геодезически продолжить и по предыдущему она останется кратчайшей. Но тогда длина этой кратчайшей, т. е. диаметр развертки, не более длины каждой из частей границы, соединяющих концы кратчайшей, и те самым половины длины всей границы.

Свойство 4.

Пусть в сферическом треугольнике ABC c – длина стороны AB, r – AC и угол при вершине $A - \alpha_1$. Если при неизменной c менять r или α_1, сдвигая точку C вдоль AC или в перпендикулярном направлении, то, как хорошо известно, длина $BC \equiv a$ будет меняться так, что

$$\frac{\partial a}{\partial r} = \cos\gamma_1 a, \quad \frac{1}{\sin r}\frac{\partial a}{\partial \alpha_1} = \cos\left|\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right| = \sin\gamma_1,$$

где γ_1 – угол треугольника при вершине C.

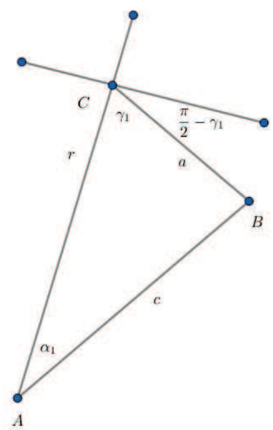

Рис. 1

Отсюда, если α_1 и r меняются так, что $a = const$, то

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial r} = -\frac{\frac{\partial a}{\partial r}}{\frac{\partial a}{\partial \alpha_1}} = -\frac{1}{\sin r}\operatorname{ctg}\gamma_1.$$

Четырехугольник $ABCD$ состоит из двух таких треугольников ABC и ADC, и каждый из них деформируется, как указано выше. Если соответствующие величины в $\Delta ADC - r$, α_2 и γ_2, то

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial r} = -\frac{1}{\sin r}\operatorname{ctg}\gamma_2,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = -\frac{1}{\sin r}(\operatorname{ctg}\gamma_1 + \operatorname{ctg}\gamma_2) = \frac{\sin(\gamma_1+\gamma_2)}{\sin r \sin\gamma_1 \sin\gamma_2} < 0,$$

так как $\gamma_1 + \gamma_2 < \pi$, ибо это есть угол четырехугольника при вершине C.

§9. Некоторые добавления и обобщения

Существование выпуклой шапочки с данной разверткой может быть выведено, как известно [1, с. 215], из теоремы существования и единственности замкнутого выпуклого многогранника с заданной разверткой.

Можно дать и независимое доказательство, аналогичное приведенному выше и несколько более простое. Перечислим лишь те места, которые нуждаются в изменении.

Вместо пирамид нужно рассматривать многогранники, мы будем называть их призмами, ограниченные поверхностью некоторой бесконечной призмы (в обычном смысле) и двумя ее плоскими сечениями.

Предполагается, что плоскости сечения не пересекаются внутри призмы и одна из них (плоскость нижнего основания) перпендикулярна ее образующим.

Нижним основаниям следует разрешить вырождаться в отрезки, углы при их ребрах интересовать нас не будут.

Телесную развертку, склеенную из выпуклых призм упомянутого вида, естественно назвать цилиндрической. Предполагается, что верхние основания склеиваются в развертку, гомеоморфную кругу.

На поверхности развертки, как в определениях, так и во всех дальнейших рассмотрениях, вместо кратчайших, идущих из вершины A_0, следует брать кратчайшие между каким-либо точками и нижним основанием, т. е. частью поверхности, склеенной из нижних оснований.

Под основаниями (основанием) надо везде понимать верхние основания (верхнее основание). Роль сферического сечения при вершине A_0 (1-го рода) переходит к нижнему основанию, и свойство 1 (без упоминания о диаметре) становится очевидным, так как основание состоит из плоских треугольников, кривизны его вершин неположительны и потому двуугольников в нем быть не может.

Свойства 2 не нужно. Далее, в доказательствах лемм 4.1–4.3 ничего не меняется, а в лемме 4.4 остается лишь тривиальная часть, так как рассуждения о вершинах и о диаметре S_{A_0} не нужны.

Разбиение наперед заданной развертки положительной кривизны, с углами на границе не превышающими π и гомеоморфной кругу, производится кратчайшими ортогональными ее границе и геодезическими, состоящими из их концов.

Рассуждения повторяются почти дословно. Доказательство леммы 4.6 очевидным образом упрощается.

Доказанные теоремы могут быть перенесены и в пространства постоянной кривизны: сферическое и Лобачевского. При этом, конечно, и заданная развертка составляется из “плоских” многоугольников соответствующего пространства. При переходе в пространство Лобачевского в доказательствах не нужно менять ничего, в сферическом же пространстве несколько сложнее осуществить нужное нам разбиение данной развертки (лемма 5).

Трудность эта встречается и в других известных нам доказательствах [1, с. 244] и возникает при появлении кратчайших длин π (радиус сферы равен единице).

Легко, однако, заметить, что если в сферической развертке положительной кривизны есть хотя бы одна кратчайшая длины π, то в ней всего две истинные вершины (концы кратчайшей) и для нее теорема верна очевидным образом.

Действительно, в окрестности кратчайшей длины π можно провести другую кратчайшую с теми же концами. Расширяя полученный двуугольник до тех пор, пока на его стороне не появится вершина, мы и придем к противоречию, так как в силу положительности кривизны кратчайшая не может идти через вершину.

Для развертки диаметра, меньшего π, проходят наши прежние рассуждения.

Список литературы

1. А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники.* Гостехиздат, М.–Л., 1950.
2. А. Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.* Гостехиздат, М.–Л., 1948.
3. Н. В. Ефимов, *Качественные вопросы теории деформации поверхностей.* — УМН **3**, No. 2(24) (1948), 47–158.
4. W. Blaschke, G. Herglotz, *Über die Verwirklichung einer geschlossenen Fläche mit vorgeschriebenem Bogenelement im Euklidischen Raum.* — Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. **2** (1937), 229–230.
5. А. В. Погорелов, *Изгибание выпуклых поверхностей.* Гостехиздат, М.–Л., 1951.

Volkov Yu. A. Existence of convex polyhedra with prescribed development.

This article is the publication of the Ph.D. thesis of Yurii Aleksandrovich Volkov (1930–1981), in which the famous theorem of A. D. Aleksandrov on the existence of a convex polyhedron with a given development is proved using a variational method.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: dmitrivolkov@mail.ru

Поступило 11 ноября 2018 г.