Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 476, 2018 г.

С. Н. Бурьян

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ ФРЁЛИХЕРА НА КАСАЮЩИХСЯ КРИВЫХ

§1. Введение

Пусть M – топологическое пространство, S – конечный набор точек в M. Предположим, что на подпространстве $M \setminus S$ задана структура гладкого многообразия размерности 1. В этом случае будем называть пространство M (одномерным) *многообразием с особенностями*, а точки $s \in S$ — *особыми точками* или *точками ветвления* пространства M. Данные пространства изучаются в контексте таких проблем, как, например, (псевдо)дифференциальные операторы на многообразиях с углами.

Многообразия с особенностями также возникают как конфигурационные пространства некоторых механических систем. Интерес представляет движение таких механизмов через особые точки как по инерции, так и под действием приложенных сил. Далее мы будем рассматривать особенность типа касания первого порядка для двух гладких кривых. Вначале введем необходимые обозначения.

Пусть на декартовой плоскости заданы две гладкие регулярные простые кривые: $\gamma_1\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ и $\gamma_2\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$. Обозначим через $u_1, u_2 \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ параметры кривых γ_1 и γ_2 соответственно. Предположим, что кривые $\gamma_1(u_1)$ и $\gamma_2(u_2)$ имеют единственную общую точку s, отвечающую значениям $u_1 = u_2 = 0$: $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = s$. Пусть Γ_1 и Γ_2 – это образы кривых $\gamma_1(u_1)$ и $\gamma_2(u_2)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ соответственно. Будем исследовать следующее многообразие с особенностями: $M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, единственная особая точка которого – это s.

Рассмотрим случай, когда в общей точке касательные пространства к кривым совпадают, т. е. векторы скоростей кривых $\gamma_1(u_1)$ и $\gamma_2(u_2)$ при $u_1 = u_2 = 0$ коллинеарны: $\gamma_1'(0) = k\,\gamma_2'(0)$, где $k \in \mathbb{R}$ отлично от нуля.

Если рассматривать M как конфигурационное пространство механической системы (например, сингулярного маятника), то на Γ_1 и Γ_2

Ключевые слова: особая точка, многообразия с особенностями, пространства Фрёлихера.

заданы уравнения движения: $\ddot{u}_1 = f_1(u_1, \dot{u}_1)$ при движении на Γ_1 и $\ddot{u}_2 = f_2(u_2, \dot{u}_2)$ при движении на Γ_2 (например, как уравнения Лагранжа). Предполагается, что f_1 и f_2 являются гладкими функциями от координат и скоростей.

Пусть в начальный момент времени положению механической системы соответствует точка $\gamma_1(u_0) \in \Gamma_1$, $u_0 < 0$, конфигурационного пространства M. Движение до точки ветвления s определяется уравнением $\ddot{u}_1 = f_1(u_1, \dot{u}_1)$. Решим задачу Коши для этого движения при начальных данных $u_1(0) = u_0$, $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_0$. Обозначим решение как $u_1(t)$. Пусть существует момент времени t_*, такой что $u_1(t_*) = 0$ и $u_1(t) < 0$ при $0 < t < t_*$. Иначе говоря, t_* – первый момент времени, когда изображающая точка механической системы оказывается в точке ветвления s. Пусть в этой точке движение продолжилось не по кривой Γ_1, а по кривой Γ_2.

Теперь решим другую задачу Коши для движения уже по Γ_2:

$$\ddot{u}_2 = f_2(u_2, \dot{u}_2), \quad u_2(t_*) = s, \quad \dot{u}_2(t_*) = \dot{u}_1(t_*).$$

Полученная "сборная" кривая

$$c(t) = \{\gamma_1(u_1(t)) : t < t_*\} \cup \{\gamma_2(u_2(t)) : t \geqslant t_*\}$$

при $t \approx t_*$ переходит с Γ_1 на Γ_2 и теоретически тоже является возможной траекторией движения механической системы. Кривая $c(t)$ имеет класс гладкости C^1.

Может ли описанная траектория $c(t)$ быть действительной траекторией механической системы?

§2. Общая схема

Сформулируем общий подход, который можно применять к анализу движения механических систем с особенностями конфигурационного пространства.

Пусть имеется множество $X \subset \mathbb{R}^n$, которое может не являться гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим некоторую категорию $\mathcal{S}$ (singular spaces), объекты которой будем называть $\mathcal{S}$-пространствами, а морфизмы между объектами – гладкими отображениями. Предположим, что X можно наделить некоторой дифференциально-геометрической структурой $\mathcal{F}$, такой что пара $(X, \mathcal{F})$ является объектом категории $\mathcal{S}$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на многообразии N можно интерпретировать как векторное поле V на его касательном расслоении TN. Обобщая эту конструкцию на $\mathcal{S}$, будем требовать выполнения следующих условий:

1) Для любого $X \in Ob(\mathcal{S})$ определен класс векторных полей $\mathcal{V}_X$ и класс гладких (допустимых) кривых $\gamma\colon \mathbb{R} \to X$;
2) Для любого $X \in Ob(\mathcal{S})$ и любого векторного поля $V \in \mathcal{V}_X$ определены интегральные траектории c поля $V \in \mathcal{V}_X$ как параметризованные кривые $c\colon \mathbb{R} \to X$;
3) Для любого $X \in Ob(\mathcal{S})$ существует "касательное расслоение" TX, которое также является объектом категории $\mathcal{S}$, и отображение проекции $\pi\colon TX \to X$.

Тогда обобщенное движение механической системы с конфигурационным пространством X задается некоторым векторным полем V на касательном расслоении TX. Сделаем следующее замечание. Если интегральная траектория $c(t)$ поля $V \in \mathcal{V}_{TX}$ является гладкой кривой (в смысле теории $\mathcal{S}$) и проекция $\pi\colon TX \to X$ также есть гладкое отображение, то композиция $\pi \circ c$ есть гладкая кривая на пространстве X.

Итак, следуя указанной схеме, мы получаем некоторое препятствие. В теории $\mathcal{S}$ рассмотрим пример с двумя касающимися кривыми M. Пусть выполнены два условия:

1) Интегральная траектория $c(t)$ векторного поля V, которое задает динамику на TM, является $\mathcal{S}$-гладкой кривой; проекция кривой $c(t)$ на M переходит с Γ_1 на Γ_2 при прохождении точки s;
2) Проекция $\pi\colon TM \to M$ является $\mathcal{S}$-гладким отображением.

Тогда композиция $\pi \circ c(t)$ есть $\mathcal{S}$-гладкая кривая на пространстве M. Кривая $\pi\circ c(t)$ может не быть гладкой кривой как отображение $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$.

Особая точка накладывает ограничения на гладкие кривые на плоскости, образ которых лежит в многообразии с особенностями. Например, если X – подмножество плоскости Oxy, состоящее из объединения координатных осей, а "гладкие кривые" на X – это гладкие кривые на плоскости, образ которых лежит в X:

$$\Gamma = \{\gamma\colon \mathbb{R} \to X \mid \gamma = i_X \circ c,\ c \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)\},$$

то кривая $\gamma(t)$ может перейти с одной оси координат на другую в особой точке O только будучи ∞-плоской в точке O (т. е. только в случае, когда в точке O производные всех порядков у $\gamma(t)$ обращаются в 0). Значит, для возможного безостановочного движения через особую точку на X мы должны допускать негладкие кривые в X. Сформулируем общее эвристическое замечание.

Гипотеза. *Чтобы структура $\mathcal{S}$ для множества X допускала траектории движения в TX, проекции которых на конфигурационное пространство не являются кривыми на гладком подмногообразии в X, проекции кривых должны быть $\mathcal{S}$-гладкими кривыми на самом множестве X.*

Если в качестве $\mathcal{S}$ рассматривать категорию *дифференциальных пространств*, то необходимые построения касательного пространства, векторных полей и их траекторий можно найти в работах [1,2]. В этой теории множество X наделяется структурой множества функций $\mathcal{F}$ с некоторыми условиями, а касательное пространство в точке $x \in X$ – это множество дифференцирований функций из $\mathcal{F}$ в точке x. Проекция $\pi\colon TX \to X$ является гладким отображением. Если исходное многообразие с особенностью M наделить дифференциальной структурой, состоящей из функций $C^\infty(\mathbb{R}^2)|_M$ (структурой *субдекартова пространства*), то гладкая кривая, которая при прохождении точки s переходит с кривой Γ_1 на кривую Γ_2 (или с кривой Γ_2 на кривую Γ_1) тоже должна быть ∞-плоской в точке s. Подобные условия будут обсуждаться в следующем параграфе.

Есть вероятность, что подходы к особым многообразиям, явно учитывающие структуру допустимого класса кривых, могут описывать движение в кинематическом смысле. Например, в [3] построение дифференциальных форм основано на свойствах кривых. Также дифференциальные формы, определенные на объединении двух трансверсально пересекающихся многообразий, изучаются в работе [4].

В данной работе мы рассмотрим для примера с касанием кривых теорию, которая уже на этапе построения определяет класс допустимых, или “гладких”, кривых.

§3. Пространства Фрёлихера

Наиболее общее построение можно осуществить по схеме, описанной в [5]. Рассмотрим два множества A и B и подмножество $M \subset \mathrm{Map}(A,B)$ в множестве отображений из A в B. Для множества X изучим два множества: $C \subset \mathrm{Map}(A,X)$ (обобщенные кривые в X) и $F \subset \mathrm{Map}(X,B)$ (функции на X).

Определение. *M-структурой на множестве X называется пара (C, F), для которой выполнены следующие условия:*

$$\Phi C = \{f\colon X \to B \mid \forall c \in C : f \circ c \in M\} = F; \tag{1}$$

$$\Gamma F = \{c\colon A \to X \mid \forall f \in F : f \circ c \in M\} = C. \tag{2}$$

Определение. *Если в определении M-структуры положить $A = B = \mathbb{R}$, $M = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то структура (X, C, F) называется пространством Фрёлихера.*

Пространства Фрёлихера можно назвать “сбалансированными” пространствами, так как их свойства можно формулировать как в терминах функций, так и в терминах кривых. Заметим, что понятие допустимых (“гладких”) кривых изначально включено в понятие пространства. Кривые как траектории движения мы можем наблюдать в “слабом смысле”, через класс функций F: гладкие кривые есть в точности множество ΓF.

Определение. *Морфизм двух пространств Фрёлихера (X, C_X, F_X) и (Y, C_Y, F_Y) есть отображение $g\colon X \to Y$, такое что для любой кривой $c \in C_X$ ее образ $g \circ c$ лежит в C_Y.*

Далее морфизмы будем называть “гладкими отображениями”.

Пространство Фрёлихера можно построить по некоторому набору функций или кривых следующим образом. Для данного множества X рассмотрим некоторое подмножество $\widehat{F} \subset \mathrm{Map}(X, B)$. Приведем здесь (в сокращении) теорему из работы [6].

Утверждение. $(X, \Gamma\widehat{F}, \Phi\Gamma\widehat{F})$ *– пространство Фрёлихера.*

Доказательство. Во-первых, $\Phi(\Gamma\widehat{F}) = \Phi\Gamma\widehat{F}$, поэтому условие (1) из определения пространства Фрёлихера выполнено.

Покажем также, что $\Gamma\Phi\Gamma\widehat{F} = \Gamma\widehat{F}$. Для этого рассмотрим кривую $c \in \Gamma\widehat{F}$. Тогда для любой функции $f \in \Phi\Gamma\widehat{F}$ по свойству (1) определения пространств Фрёлихера должно быть выполнено условие $f \circ c \in M$. Другими словами, для любой функции $f \in \Phi\Gamma\widehat{F}$ и заданной кривой c композиция $f \circ c$ лежит в M. По свойству (2), кривая c лежит в $\Gamma(\Phi\Gamma\widehat{F}) = \Gamma\Phi\Gamma\widehat{F}$. Значит, если $c \in \Gamma\widehat{F}$, то $c \in \Gamma\Phi\Gamma\widehat{F}$, откуда следует включение множеств $\Gamma\widehat{F} \subset \Gamma\Phi\Gamma\widehat{F}$.

Аналогично получаем: если функция f лежит в множестве $\widehat{F}$, то она также лежит и в множестве $\Phi\Gamma\widehat{F}$. Поэтому выполняется включение множеств: $\widehat{F} \subset \Phi\Gamma\widehat{F}$. Влючение множеств $\Gamma\Phi\Gamma\widehat{F} \subset \Gamma\widehat{F}$ следует из того факта, что при расширении класса функций с $\widehat{F}$ на $\Phi\Gamma\widehat{F}$ (на фиксированном множестве X) класс гладких кривых может только уменьшиться.

В итоге получаем, что $\Gamma\Phi\Gamma\widehat{F} = \Gamma\widehat{F}$. Условие (2) в определении пространств Фрёлихера выполнено. $\square$

Аналогично можно провести рассуждение и для кривых, начиная построение с множества кривых $\widehat{C}$. Тройка $(X, \Gamma\Phi\widehat{C}, \Phi\widehat{C})$ также является пространством Фрёлихера согласно предыдущему утверждению.

Запишем далее основные понятия дифференциального исчисления в терминах пространств Фрёлихера.

Определение. *Касательные векторы в точке $x \in X$ есть классы эквивалентности кривых $c \in C$, $c(0) = x$, по следующему отношению эквивалентности:*

$$c_1 \sim c_2 \iff \forall f \in F : (f \circ c_1)'(0) = (f \circ c_2)'(0).$$

Определение. *Касательное расслоение TX есть обьединение $\bigcup\limits_{x \in X} T_x X$.*

Структуру пространства Фрёлихера на TX можно задать с помощью конструкции дифференциала отображения.

Определение. *Пусть X и Y – пространства Фрёлихера, $g\colon X \to Y$ – гладкое отображение. Дифференциал отображения g есть отображение $Tg\colon TX \to TY$, действующее на TX следующим образом:*

$$Tg(x, [c_x(t)]) = (g(x), [g \circ c_x(t)]).$$

Структура пространства Фрёлихера на TX индуцируется набором функций Tf, $f \in F$: порождающее семейство функций $\widehat{F}_{TX}$ состоит из отображений вида

$$TX \xrightarrow{Tg} T\mathbb{R} \xrightarrow{w} \mathbb{R},$$

где последее отображение есть некоторая функция $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Для множества $X \subset \mathbb{R}^2$ естественно рассмотреть следующее порождающее множество функций:

$$\widehat{F} = \{f \circ i_X,\ f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)\},$$

которые совпадают с сужениями функций из объемлющего пространства на X. При этом в полученной структуре Фрёлихера множества

$\Phi\Gamma\widehat{F}$ и $\widehat{F}$ могут не совпадать – не каждая функция из $\Phi\Gamma\widehat{F}$ может быть продолжена до гладкой функции на объемлющем пространстве.

§4. Касание кривых. Плоские кривые

В качестве примера механической системы с особенностью конфигурационного пространства рассмотрим плоский двойной математический маятник, незакрепленный конец которого движется по заданной кривой. Конфигурационное пространство механизма лежит на двумерном торе (см. [7]). Можно подобрать параметры кривой так, что конфигурационное пространство будет состоять из двух кривых Γ_1 и Γ_2, имеющих касание порядка 1 в общей точке s. При этом Γ_1 и Γ_2 касаются в точке s некоторой прямой L и расположены в разных полуплоскостях относительно нее. Кривизны кривых Γ_1 и Γ_2 в точке s отличны от нуля. Существует ли для такой системы общая теория движения $\mathcal{S}$, в которой бы при прохождении особой точки s был *возможен* переход с одной гладкой кривой на другую? Например, если есть дополнительная управляющая сила, то можно ли контролировать смену типа движения?

Пусть касательные к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке $s = (0, y_s)$ не вертикальны. Тогда в окрестности точки s каждая кривая может быть задана как график функции: $\gamma_1 = (x, \psi_1(x))$, $\gamma_2 = (x, \psi_2(x))$. Рассмотрим многообразие с особенностями $M = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Немного упростим геометрию M. Для этого рассмотрим отображение плоскости $\tau\colon (x, y) \to (x, y - \psi_1(x))$. Это диффеоморфизм плоскости, поэтому он сохраняет условие касания кривых $\tau \circ \gamma_1$ и $\tau \circ \gamma_2$ в точке $\tau(s) = (0, 0)$. Вместо объединения кривых γ_1 и γ_2 будем рассматривать объединение кривых $\tau \circ \gamma_1$ и $\tau \circ \gamma_2$ в качестве модельного пространства X.

Пространство $X = \tau(M)$ в окрестности точки $\tau(s)$ состоит из объединения горизонтальной кривой $y = 0$ (обозначим ее X_1) и графика функции $y = \psi_1(x) - \psi_2(x) = \psi(x)$ (обозначим как X_2). Множества X_1 и X_2 есть гладкие подмногообразия в X. Условие касания только первого порядка означает, что $\psi'(0) = 0$ и $\psi''(0) \neq 0$.

Рассмотрим сужения гладких функций $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ на множество X. С каждой функцией из этого множества свяжем следующие две функции:

$$f_1(x) = f(x, 0), \quad f_2(x) = f(x, \psi(x)). \tag{3}$$

Если параметризовать кривые X_1 и X_2 абсциссой x, то функции f_1 и f_2 дают значение функции f на множествах X_1 и X_2 соответственно.

Функции f_1 и f_2 являются гладкими функциями переменной x и (в силу того, что $\psi'(0) = 0$) для них выполняются следующие соотношения:

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_1'(0) = f_2'(0).$$

Также заметим, что для двух функций $f_1\colon X_1 \to \mathbb{R}$ и $f_2\colon X_2 \to \mathbb{R}$ вида (3) при выполнении условий $f_1(0) = f_2(0)$ и $f_1'(0) = f_2'(0)$ возможно построить функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, такую что $f|_{X_1} = f_1$ и $f|_{X_2} = f_2$. Например,

$$f(x,y) = f_1(x) + y\left(\frac{f_2(x) - f_1(x)}{\psi(x)}\right).$$

Функция, стоящая в скобках в последнем выражении, является гладкой, поскольку $\psi''(0) \neq 0$, а разность $f_2(x) - f_1(x)$ при разложении в ряд Тейлора начинается со второго порядка по x.

Итак, функции $\widehat{F}$ могут быть представлены в следующем виде:

$$\widehat{F} = \{\, (f_1, f_2) \mid f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\,,\ f_1(0) = f_2(0),\ f_1'(0) = f_2'(0)\,\}. \qquad (4)$$

Изучим гладкие кривые, лежащие в множестве $\Gamma\widehat{F}$. Для этого рассмотрим в X кривую $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, которую будем проверять на принадлежность множеству $\Gamma\widehat{F}$. По условию (1) для любой функции $f \in \widehat{F}$ композиция $f \circ c$ должна быть гладкой функцией $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Покажем сначала, что проекция кривой γ на ось Ox, функция $x(t)$, является гладкой. Для этого рассмотрим следующую функцию из множества $\widehat{F}$:

$$f_{pr} = (f_1(x), f_2(x)) = (x, x),$$

которая ставит в соответствие точке $w \in X$ ее абсциссу. Для кривой $\gamma = (x(t), y(t))$ согласно условию (1) композиция $f \circ c = x(t)$ есть функция класса $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Здесь важен тот факт, что проекция $f_{pr}\colon (x,y) \to x$ принадлежит $\widehat{F}$. Проекция на ось Oy уже не будет функцией из $\widehat{F}$.

Возможны два случая.

1) Если кривая $c(t)$ целиком содержится только в X_1 или только в X_2, то ее y-координаты находятся однозначно. В первом случае мы получаем кривую $c_{v1} = (x(t), 0)$, а во втором случае – кривую $c_{v2} = (x(t), \psi(x(t)))$.

2) Пусть теперь $c(t)$ не содержится целиком ни в X_1, ни в X_2. Например, пусть при $t < 0$ кривая $c(t)$ содержится в X_1, а при $t \geqslant 0$

она содержится в множестве X_2. Абсцисса $x(t)$ кривой $c(t)$ является гладкой функцией. Для функций $f \in \widehat{F}$ композиция

$$f \circ c(t) = \{f_1(x(t)), t < 0\} \cup \{f_2(x(t)), t \geqslant 0\} \tag{5}$$

есть функция класса $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ согласно условию (1). Значит, все производные функций $f_1(x(t))$ и $f_2(x(t))$ должны совпадать при $t = 0$. Для первых и вторых производных получаем соотношения:

$$\begin{gathered} f_1'(0)x'(0) = f_2'(0)x'(0); \\ f_1''(0)(x'(0))^2 + f_1'(0)x''(0) = f_2''(0)(x'(0))^2 + f_2'(0)x''(0). \end{gathered} \tag{6}$$

Подставив в последние выражения специальную функцию $f \in \widehat{F}$, например, $f = (f_1, f_2) = (x^2, -x^2)$, получаем условие $x'(0) = 0$. Следовательно, гладкая кривая $c(t)$ не может иметь ненулевой вектор скорости в особой точке.

Для изучения старших производных функции $x(t)$ нам понадобится формула для n-ой производной композиции функции $h(x)$ и кривой $x(t)$. Для *неупорядоченного* набора $\mathbf{i}_m = (i_1, \ldots, i_m)$ из m положительных целых чисел положим $|\mathbf{i}_m| = i_1 + \ldots + i_m$.

Утверждение. *Пусть* $h(x), x(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Тогда*

$$\begin{aligned} &(h(x(t)))^{(n)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} h^{(k)}(x(t)) \left(\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_k) \\ i_1+\ldots+i_k=n}} c_{k,(i_1,\ldots,i_k)}\, x^{(i_1)}(t)\, x^{(i_2)}(t) \ldots x^{(i_k)}(t) \right), \end{aligned} \tag{7}$$

где константы $c_{k,(i_1,\ldots,i_k)}$ *– положительные целые числа.*

Доказательство. Запись $c_{k,(i_1,\ldots,i_k)}$ упростим до $c_{k,\mathbf{i}_k}$, а вместо двух строчек под знаком суммы в (7) будем писать $|\mathbf{i}_k| = n$. Доказывать утверждение будем методом индукции. При $n = 1$ получаем равенство

$$h(x(t))' = h'(x(t))x'(t),$$

которое может быть получено в (7) при $k = 1$, $c_{1,(i_1)} = 1$. База индукции доказана.

Перейдем теперь к шагу индукции. Для второй производной композиции $h(x(t))$ получаем выражение

$$\begin{aligned} h(x(t))^{(2)} &= h''(x(t))(x'(t))^2 + h'(x(t))x''(t) = \\ &= h^{(2)}(x(t)) \cdot (x'(t)\, x'(t)) + h^{(1)}(x(t)) \cdot x''(t), \end{aligned} \tag{8}$$

которое соответствует равенству (7) при $k = 2$. Числа $c_{2,(1,1)} = 1$ и $c_{1,(2)} = 1$ получаются в результате дифференцирования соответствующих слагаемых в формуле для первой производной $h(x(t))$. Будем действовать аналогично и при $n > 2$.

Пусть уже доказано, что формула (7) верна при $n \leqslant N$ и для всех наборов $\mathbf{i}_n = (i_1, \dots, i_n)$ константы $c_{k,\mathbf{i}_n}$ положительны при $n \leqslant N$. Продифференцируем равенство (7) для получения производной порядка $N + 1$:

$$\begin{aligned} &(h(x(t)))^{(N+1)} \\ &\quad = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} h^{(k)}(x(t)) \left(\sum_{|\mathbf{i}_k|=N} c_{k,\mathbf{i}_k}\, x^{(i_1)}(t)\, x^{(i_2)}(t)\, \dots\, x^{(i_k)}(t)\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} h^{(k+1)}(x(t)) \left(\sum_{|\mathbf{i}_k|=N} c_{k+1,(1,\mathbf{i}_k)}\, (x'(t))\, x^{(i_1)}(t)\, x^{(i_2)}(t)\, \dots\, x^{(i_k)}(t)\right) \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{N} h^{(k)}(x(t)) \left(\sum_{|\mathbf{i}'_k|=N+1} c_{k,\mathbf{i}'_k}\, x^{(i'_1)}(t)\, x^{(i'_2)}(t) \dots x^{(i'_k)}(t)\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим некоторый набор $\mathbf{i}_m = (i_i, \dots, i_m)$, такой что $|\mathbf{i}_m| = N + 1$. Вначале заметим, что в формуле (9) есть слагаемые вида

$$C h^{(m)}(x(t))\, x^{(i_1)}(t)\, x^{(i_2)}(t)\, \dots\, x^{(i_m)}(t),$$

где C – некоторые константы. По формуле (7), сумма этих констант есть коэффициент $c_{m,(i_i,\dots,i_m)}$.

Покажем, что $c_{m,(i_i,\dots,i_m)}$ – целое положительное число. Действительно, для набора $\mathbf{i}_m$ все коэффициенты перед слагаемым

$$h^{(m)}(x(t))\, x^{(i_1)}(t)\, x^{(i_2)}(t)\, \dots\, x^{(i_m)}(t)$$

входят в формулу (9) со знаком “+”. В частности, из предположения индукции о положительности и целочисленности коэффициентов $c_{k,\mathbf{i}_n}$

при $n \leqslant N$ следует, что коэффициенты при

$$h^{(m)}(x(t))\, x^{(i_1)}(t)\, x^{(i_2)}(t)\, \ldots\, x^{(i_m)}(t)$$

также положительны и целочисленны. Значит, сумма этих коэффициентов, $c_{m,(i_i,\ldots,i_m)}$ – положительное целое число. □

Теперь мы можем изучить необходимые условия на производные функций f_1 и f_2 в точке 0:

$$(f_1(x(t)))^{(n)}|_{t=0} = (f_2(x(t)))^{(n)}|_{t=0}\,.$$

Подставим в эту формулу функцию $f = (f_1, f_2) = (x^2, -x^2)$ из множества $\widehat{F}$. Для этой функции в формуле (7) при значении $t = 0$ ненулевыми останутся только слагаемые, соответствующие $k = 2$. При $n = 2$ получаем условие $x'(0) = 0$. При $n = 4$ получаем условие

$$\sum_{i_1+i_2=4} c_{2,(i_1,i_2)}\, x^{(i_1)}(0)\, x^{(i_2)}(0) = 0.$$

Учитывая, что $x'(0) = 0$, заключаем, что в последней формуле остается только одно слагаемое

$$c_{2,(i_1,i_2)}\, x^{(2)}(0)\, x^{(2)}(0) = 0.$$

Значит, $x^{(2)}(0) = 0$. Продолжая это рассуждение, последовательно получаем при $n = 6, 8, 10\ldots$ условия на производные функции $x(t)$ в нуле: $(x^{(k)})^2(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Итак, кривая $c \in \Gamma\widehat{F}$, которая переходит с одной ветви на другую, должна быть ∞-плоской при $t = 0$. Этим свойством обладают кривые, образ которых лежит в несколько другом подмножестве плоскости. Пусть $Q = \{(x, y) \,|\, xy = 0\}$ – объединение координатных осей на плоскости. Тогда

$$C \approx \{c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \,|\, c(t) \in Q\}. \tag{10}$$

Теперь изучим, какие функции лежат в $\Phi\Gamma\widehat{F}$. Вначале рассмотрим две специальные кривые: $c_1(t) = (t, 0)$ и $c_2(t) = (t, \psi(t))$, каждая из которых содержится целиком в X_1 и X_2 соответственно. Если $f \in \Phi\Gamma\widehat{F}$, то композиции

$$f \circ c_1 = f_1, \quad f \circ c_2 = f_2$$

являются функциями класса $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Теперь рассмотрим кривые, которые переходят с X_1 на X_2. Для них достаточно условия $f_1(0) =$

$f_2(0)$, условия на производные выполняются в силу ∞-плоскости кривых $\Gamma\widehat{F}$. В итоге мы получаем следующее описание множества F:

$$F = \{(f_1, f_2) \,:\, f_1(0) = f_2(0)\}. \tag{11}$$

Это – структура функций для трансверсального пересечения X_1 и X_2 (для множества Q) (см. [4]). Получаем следующее

Утверждение. *Индуцированные структуры пространств Фрёлихера для особенности типа касания 1-го порядка и трансверсального пересечения двух гладких кривых совпадают.*

Заметим, что аналогичное рассуждение можно провести для касания старших порядков.

§5. Касание кривых. Плоские функции

Рассмотрим конструкцию, которая даст другую структуру пространства Фрёлихера на том же множестве X. Чтобы избежать плоскости гладких кривых в особой точке, начнем построение структуры на X не с функций, а с кривых. Сначала определим это множество "гладких" кривых.

Пусть $c = (x(t), y(t))$ – кривая на плоскости, образ которой содержится в X. Особая точка X – это начало координат. Кривая рассматривается в малой окрестности особой точки. Тогда

$$\begin{aligned}\widehat{C} = \{(x(t), y(t)) \in X_1,\ x, y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\} \\ \cup \{(x(t), y(t)) \in X_2,\ x, y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\} \\ \cup \{(x(t), y(t)) \in X,\ x(0) = y(0) = 0, x'(0+) = x'(0-),\ y'(0+) = y'(0-)\}.\end{aligned}$$

В третьем случае имеется ввиду, что кривая $c \in \widehat{C}$ гладкая вне особой точки и ее вектор скорости в особой точке меняется непрерывно. Будем обозначать абсциссу кривой $c(t)$ для тех значений t, при которых ее образ содержится в X_1, как $x_1(t)$, иначе – как $x_2(t)$. Эта запись позволит различать значения $x^{(n)}(0+)$ и $x^{(n)}(0-)$, поскольку $x(t)$ теперь лишь C^1-непрерывна в особой точке, и ее производные порядка старше первого могут иметь разрывы при $t = 0$.

Проанализируем, какие функции лежат в множестве $\Phi\widehat{C}$. Для кривых $c_1(t) = (t, 0)$ и $c_2(t) = (t, \psi(t))$, образы которых лежат в подмногообразиях X, получаем необходимое условие: композиции

$$f \circ c_1 = f_1, \quad f \circ c_2 = f_2$$

есть функции класса $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Поскольку мы допускаем не только ∞-плоские кривые в точке касания (как в прошлом параграфе), то из вычисления производных функций $f_1(x(t))$ и $f_2(x(t))$ следует, что

$$f_1'(0)=0, \quad f_2'(0)=0.$$

Это значит, что для кривых на базе X, которые переходят с одного гладкого подмногообразия на другое и имеют лишь непрерывный вектор скорости, вектор скорости – нулевой (в смысле этой структуры пространства Фрёлихера). Верно более общее

Утверждение. *Множество функций* $\Phi\widehat{C}$ *состоит из функций* (f_1,f_2)*, где* $f_1\colon X_1\to\mathbb{R}$ *и* $f_2\colon X_2\to\mathbb{R}$*, таких что* $f_1(0)=f_2(0)$ *и их производные в особой точке равны нулю:*

$$f_1^{(i)}(0)=0, \quad f_2^{(i)}(0)=0, \quad i=1,2,3\ldots$$

Доказательство. Рассмотрим те кривые, которые переходят с X_1 на X_2 (или наоборот). Из равенства $f_1'(0)x_1'(0)=f_2'(0)x_2'(0)$ получаем, что $f_1'(0)=f_2'(0)$. Из равенства вторых производных композиций $f_1(x_1(t))$ и $f_2(x_2(t))$ при $t=0$ и гладкой $x(t)$ получаем:

$$f_1''(0)(x_1'(0))^2+f_1'(0)x_1''(0)=f_2''(0)(x_2'(0))^2+f_2'(0)x_2''(0). \tag{12}$$

Значит, $f_1''(0)=f_2''(0)$. Продолжая рассуждение по индукции для гладкой $x(t)$, у которой все производные в нуле ненулевые, получаем, что

$$f_1^{(n)}(0)=f_2^{(n)}(0), \quad n\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

Теперь рассмотрим в множестве $\widehat{C}$ кривую $c=(x(t),y(t))$, такую что $x_1'(0)=x_2'(0)=0$, $x_1''(0)=1$, $x_2''(0)=-1$. Из формул (12) и (13) получаем, что $f_1'(0)=f_2'(0)=0$. Пусть доказано, что при $n\leqslant N$ выполняется условие $f_1^{(n)}(0)=f_2^{(n)}(0)=0$. Покажем, что оно верно и при $n=N+1$.

Для этого рассмотрим формулу (7) при $n=N+2$, в которой сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned}(h(x(t)))^{(N+2)}=h^{(n)}(x')^{N+2}+c_{N+1}\cdot h^{(N+1)}((x')^N x'')\\ +\Sigma_N(h^{(N)},h^{(N-1)},\ldots,h'),\end{aligned} \tag{14}$$

где каждое из оставшихся слагаемых во второй строчке (14) содержит в качестве сомножителя одну из функций $h^{(N)}, h^{(N-1)}, \ldots, h'$. Действительно, сумма при $h^{(N+1)}$ в формуле (7) определяется множеством индексов $\{i_1, \ldots, i_{N+1}\}$, таким что $i_1 + \ldots + i_{N+1} = N + 2$. Ясно, что подходящим набором может быть только $\{1, \ldots, 1, 2\}$, в котором ровно N единиц. Остальные слагаемые в (7) содержат в качестве сомножителя $h^{(N)}, h^{(N-1)}, \ldots, h'$.

Применим формулу (14) к функциям f_1 и f_2 для вычисления производных порядка $N+2$. По предположению индукции имеем

$$f_{1,2}^{(N)}(0) = 0,\ f_{1,2}^{(N-1)}(0) = 0, \ldots, f'_{1,2}(0) = 0,$$

откуда следует, что

$$\Sigma_N(f_{1,2}^{(N)}(0), f_{1,2}^{(N-1)}(0), \ldots, f'_{1,2}(0)) = 0. \tag{15}$$

Теперь рассмотрим кривую $c \in \widehat{C}$, для которой $x'_1(0) = x'_2(0) = 1$, $x''_1(0) = 1$, $x''_2(0) = -1$. При подстановке этой кривой в формулу (14) с учетом равенства (15) получаем, что

$$f_1^{(N+2)}(0) + c_{N+1} f_1^{(N+1)}(0) = f_2^{(N+2)}(0) - c_{N+1} f_2^{(N+1)}(0).$$

Учитывая равенство производных (13), получаем условие

$$f_1^{(N+1)}(0) = 0.$$

Это доказывает индукционный переход. □

Теперь исследуем кривые, лежащие в $\Gamma\Phi\widehat{C}$. Эти кривые могут содержать особенности, такие как $x(t) = t^{-k}$ для $k \in \mathbb{N}$. Класс кривых $\Gamma\Phi\widehat{C}$ достаточно широк. При изучении динамики на многообразиях с особенностями можно ограничиться *кинематическими* кривыми – гладкими кривыми, у которых в особой точке может быть скачок производных порядка больше 1 как кривых на плоскости. Кинематические кривые имеют нулевой вектор скорости в особой точке в том смысле, что для любой $f \in \Phi\widehat{C}$ выполняется условие $(f \circ c)'(0) = 0$. Это значит, что гладкая кривая на TX, проекция которой есть кинематическая, проходит через начало координат.

Геометрическая информация об исходном многообразии X также теряется, как и в предыдущем пункте. С точки зрения функций единственное, что говорит об особенности – это условие совпадения значений $f_1(0) = f_2(0)$.

Для кривой $c \in \widehat{C} \subset C$ рассмотрим формулу

$$Tf \circ c(s) = ((f \circ \pi \circ c)(s), (f \circ c_s(t))'(0)). \tag{16}$$

Если вне особой точки траектория движения – гладкая траектория на касательном расслоении к кривым X_1 и X_2 (как решение уравнений Лагранжа второго рода), то при переходе с TX_1 на TX_2 при $t = 0$ в нашем смысле такая траектория будет гладкой, поскольку $(f \circ c_s(t))^{(n)}(0) = 0$.

§6. Заключение

Приведенные вычисления для двух структур пространства Фрёлихера теряют геометрическую информацию о самом множестве X.

Для первой структуры, индуцированной сужениями гладких функций, класс допустимых кривых на X таков, что они должны быть ∞-плоскими в точке ветвления, что не выполняется для примеров механических систем [8]. Когда же построение структуры начинается с более широкого множества кривых, функции на X должны быть ∞-плоскими. Маловероятно, что эти структуры позволят описать содержательное дифференциальное исчисление.

Тем не менее, поиски дифференциально-геометрической структуры на X, которая может стать основой для лагранжева формализма, представляют интерес для дальнейших исследований.

Список литературы

1. J. Śniatycki, *Orbits of families of vector fields on subcartesian spaces.* `arXiv:math/0211212` (2002).
2. T. Lusala, J. Śniatycki, J. Watts, *Regular points of a subcartesian space.* `arXiv:0803.1147` (2008).
3. R. Maka, P. Urbanski, *Differential forms on differential spaces.* — Demonstratio mathematica **27**, No. 1 (1994), 99–108.
4. T. A. Batubenge, W. Sasin, *An approach to Hamiltonian mechanics on glued symplectic pseudomanifolds.* — Demonstratio mathematica **41**, No. 4 (2008), 941–960.
5. M. Laubinger, *Differential Geometry in Cartesian Closed Categories of Smooth Spaces.* Ph.D. thesis (2008).
6. J. Watts, *Diffeologies, Differential Spaces, and Symplectic Geometry.* Ph.D. thesis (2012).
7. S. N. Burian, V. S. Kalnitsky, *On the Motion of One-Dimensional Double Pendulum.* — AIP Conference Proceedings **1959**, 030004 (2018).

8. С. Н. Бурьян, *Особенности движения маятника с сингулярным конфигурационным пространством.* — Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия **4**(62), No. 4 (2017), 541–551.

Burian S. N. Differential structures of Frölicher spaces on tangent curves.

We consider the differential-geometric structures of the Frölicher spaces for a singular manifold, which consists of two tangent curves. Calculations for two types of structures lead either to the ∞-flatness of the curves, which at a singular point pass from one branch to another, or to the ∞-flatness of functions. In the second case, smooth curves can change the branch of motion, their velocity vector at a singular point is zero.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский просп. 28, Петродворец,
198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: `burianserg@yandex.ru`

Поступило 22 ноября 2018 г.