

Ю. С. Белоусов

ПОЛУМЕАНДРИЧЕСКОЕ ЧИСЛО ПЕРЕКРЕСТКОВ УЗЛА И РОДСТВЕННЫЕ ИНВАРИАНТЫ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена комбинаторным вопросам теории классических узлов и, конкретнее, изучению разбиений на простые дуги (т.е. дуги без самопересечений) диаграмм узлов (определения диаграмм и других относящихся к классической теории узлов понятий читатель найдет в разделе 1.1). Эта область исследований затрагивалась многими авторами: см., например, [1, 3, 4, 6, 9, 10, 15, 16]. Один из центральных результатов в данном направлении – существование у любого узла диаграммы, составленной из двух гладких простых дуг (или, иначе говоря, *полумеандрической* диаграммы) – несколько раз независимо переоткрывался с использованием различных методов: в частности, в работах [3, 4, 10, 15] (подробную историческую справку читатель может найти в [6]). Из этого результата, очевидно, следует, что у каждого узла найдется диаграмма, составленная из k гладких простых дуг, где k – любое натуральное число, большее единицы. Возникает естественный вопрос: насколько для фиксированного узла его диаграмма, составленная из k гладких простых дуг, отличается от минимальной диаграммы этого узла? Введем следующее определение:

Определение. *Минимальное число перекрестков среди всех диаграмм узла K , составленных из не более чем k гладких простых дуг, назовем k -дуговым числом перекрестков узла K (обозначение $sr_k(K)$). При этом 2-дуговое число перекрестков также называют полумеандрическим числом перекрестков.*

В настоящей работе исследуется связь между k -дуговыми числами перекрестков и классическим числом перекрестков узла. Для полумеандрического числа перекрестков первый результат в этом направлении был получен в работе [5], где доказано, что для каждого узла K

Ключевые слова: узел, диаграмма узла, число перекрестков, меандр, сложность.

Работа поддержана грантом No. 18-1-6-32-2 Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

выполняется неравенство $\text{cr}_2(K) \leq \sqrt{3}^{\text{cr}(K)}$. В настоящей работе доказывается более сильное утверждение, а именно

Теорема 1. *Для любого узла K справедливо неравенство*

$$\text{cr}_2(K) \leq \sqrt[4]{6}^{\text{cr}(K)}.$$

Доказательству этой теоремы посвящен раздел 2.

Насколько нам известно, связь между k -дуговыми числами перекрестков до настоящего момента в литературе не обсуждалась. В разделе 3 приводится доказательство следующего утверждения:

Теорема 2. *Для любого узла K и для любого натурального $k \geq 2$ справедливо неравенство*

$$\text{cr}_k(K) \leq \text{cr}_{k+1}(K) + \frac{(\text{cr}_{k+1}(K))^2}{2(k+1)^2}.$$

1.1. Предварительные сведения. За исключением введенных выше определений, а также ряда технических моментов в доказательстве теоремы 1, используемая в настоящей работе терминология стандартна (см. [8, 11, 17]).

В настоящей работе *узлом* называется гладкое вложение окружности S^1 в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 (или трехмерную сферу S^3) и его образ, рассматриваемый с точностью до (не обязательно сохраняющего ориентацию) автоморфизма объемлющего пространства.

Диаграммой узла называют гладкую кривую общего положения, являющуюся проекцией узла на плоскость или двумерную сферу и снабженную дополнительной информацией о *проходах* и *переходах* в двойных точках (их называют *перекрестками* диаграммы). Диаграмма узла называется *минимальной*, если ни одна другая диаграмма, представляющая тот же узел, не имеет меньшего числа перекрестков, чем данная.

Числом перекрестков узла (обозначение $\text{cr}(K)$) называется число перекрестков в его минимальной диаграмме.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство строится в два этапа. Сперва будут описаны преобразования, позволяющие из произвольной диаграммы получить полумеандрическую диаграмму того же узла. Используя эти преобразования, покажем, как из минимальной диаграммы получить полумеандрическую, количество перекрестков которой не превышает $\sqrt[4]{6}^{\text{cr}(K)}$.

2.1. Методы построения полумеандрической диаграммы.

Пусть дана диаграмма D некоторого узла K . Зафиксируем параметризацию этой диаграммы отрезком $- F: [0, 1] \rightarrow D$, такую что $F(0) = F(1)$ и $F(0)$ не является перекрестком диаграммы. Кроме того, выберем интервал $[a, b] \subset (0, 1)$, такой что $J = F([a, b])$ – это простая дуга, ни одна из концевых точек которой не является перекрестком диаграммы. Пусть n – число перекрестков диаграммы D , а m – количество перекрестков, лежащих на дуге J . Если $m = n$, то диаграмма уже полумеандрическая. В противном случае (если $m < n$) покажем, что найдется диаграмма D' узла K , содержащая дугу J и такая, что число перекрестков диаграммы D' , лежащих на $D' \setminus J$, не превышает $n - m - 1$ (при этом общее количество перекрестков диаграммы D' может превышать n). Далее приведено два различных метода построения D' , которые мы называем приемом I и приемом II. В сущности, для получения полумеандрической диаграммы достаточно приема I, однако для доказательства неравенства из теоремы 1 его уже недостаточно.

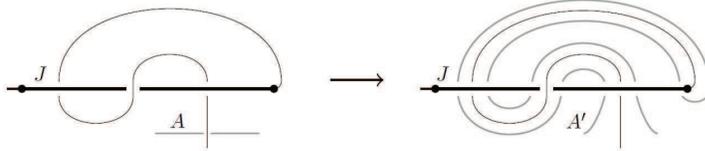


Рис. 1. Пример применения приема I.

Прием I. Итак, пусть $n > m$. Тогда существует $t \in (0, 1)$ такое, что либо $F(b + t)$ – перекресток, лежащий на $D \setminus J$, а дуга $F([a, b + t])$ не содержит перекрестков, лежащих на $D \setminus J$, либо $F(a - t)$ – перекресток, лежащий на $D \setminus J$, а дуга $F((a - t, b])$ не содержит перекрестков,

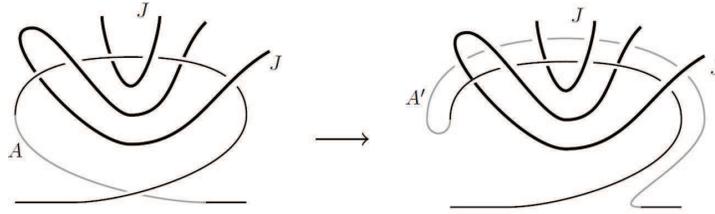


Рис. 2. Пример применения приема II.

лежащих на $D \setminus J$. Далее мы проводим рассуждения лишь для первого случая, но они практически дословно переносятся и на второй. Заметим, что в рассматриваемом случае дуга $F([b, b + t])$ проста. Пусть Λ – настолько малая регулярная окрестность этой дуги, что ее граница $\partial\Lambda$ – это простая замкнутая кривая, пересекающая диаграмму D рядом с перекрестком $F(b + t)$ ровно в трех точках (положим, что эти точки пересечения суть точки $F(b + t + \varepsilon)$, $F(p)$ и $F(q)$), а остальные точки пересечения кривой $\partial\Lambda$ с диаграммой D лежат на дуге J . Обозначим за A дугу на диаграмме D , соединяющую точки $F(p)$ и $F(q)$ и не содержащую J , а за A' – дугу на кривой $\partial\Lambda$, соединяющую точки $F(p)$ и $F(q)$ и не содержащую точку $F(b + t + \varepsilon)$. Пусть теперь D' – диаграмма, полученная из диаграммы D заменой дуги A дугой A' (со сглаживанием в точках $F(p)$ и $F(q)$) и расстановкой проходов/переходов в новых перекрестках по следующему правилу: если дуга A проходила “над” (соответственно “под”) в точке $F(b + t)$, то A' проходит “над” (соответственно “под”) во всех новых перекрестках (см. пример на рис. 1). Очевидно, что диаграмма D' представляет тот же узел K , содержит дугу J , а количество ее перекрестков, не лежащих на $D' \setminus J$, на единицу меньше, чем $n - m$. Заметим, что если дуга $F([b, b + t])$ содержала ровно r перекрестков диаграммы D , то количество перекрестков на диаграмме D' составляет в точности $n + 2r$.

Прием II. Пусть $n > m$ и пусть, кроме того, существуют $t_1, t_2 \in (0; 1)$, такие что $F(t_1) = F(t_2)$, а дуга $F((t_1, t_2))$ проста и не содержит перекрестков диаграммы D , лежащих на $D \setminus J$. Выберем настолько малое $\varepsilon > 0$, что множество перекрестков, лежащих на дуге $F((t_1 - \varepsilon, t_2 - \varepsilon))$, совпадает со множеством перекрестков, лежащих на дуге $F((t_1, t_2))$. Пусть теперь Λ – малая регулярная окрестность дуги $F((t_1 - \varepsilon, t_2 - \varepsilon))$

такая, что ее граница $\partial\Lambda$ – это простая замкнутая кривая со следующими свойствами: (i) $\partial\Lambda$ пересекает диаграмму D рядом с точкой $F(t_1 - \varepsilon)$ ровно в трех точках: $F(t_1 - \varepsilon - \delta)$, $F(t_2 - \delta)$ и $F(t_2 + \delta)$, (ii) $\partial\Lambda$ пересекает диаграмму D рядом с точкой $F(t_2 - \varepsilon)$ в единственной точке $F(t_2 - \varepsilon + \delta)$ и (iii) остальные точки пересечения кривой $\partial\Lambda$ и диаграммы D лежат на дуге J . Обозначим через A дугу диаграммы D , соединяющую точки $F(t_2 - \delta)$ и $F(t_2 - \varepsilon + \delta)$ и не содержащую перекрестков диаграммы D , а через A' – дугу на $\partial\Lambda$, соединяющую точки $F(t_2 - \delta)$ и $F(t_2 - \varepsilon + \delta)$ и не содержащую ни точки $F(t_1 - \varepsilon - \delta)$, ни точки $F(t_2 - \delta)$. Обозначим теперь через D' диаграмму, полученную из диаграммы D заменой дуги A на дугу A' так же, как это сделано в приеме I (см. пример на рис. 2). В этом случае количество перекрестков, не лежащих на $D' \setminus J$, на единицу меньше, чем $n - m$. При этом, если дуга $F((t_1, t_2))$ содержала ровно r перекрестков диаграммы D , то количество перекрестков диаграммы D' составляет в точности $n + r - 1$. Заметим, что прием II применим не к каждой диаграмме (в отличие от приема I).

2.2. Построение полумеандрической диаграммы из минимальной. Прежде чем приступить ко второму этапу доказательства, введем ряд вспомогательных понятий и конструкций.

Хордовая диаграмма степени n – это ориентированная окружность, в которой проведены n хорд, все концы которых различны (см. [2]). Хордовые диаграммы рассматриваются с точностью до сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности. С такой точки зрения хордовая диаграмма – это то же самое, что слово длины $2n$ над алфавитом из n букв, в котором каждая буква встречается ровно два раза, рассматриваемое с точностью до циклических сдвигов и замены алфавита (и перестановок букв в алфавите). Такие классы слов называют также *циклическими словами*. Пусть $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – плоская гладкая кривая общего положения. Соединив хордами прообразы двойных точек кривой γ , мы получаем *хордовую диаграмму кривой γ* ; отвечающие этой хордовой диаграмме циклические слова называют *гауссовыми кодами* кривой γ . Нас интересует случай, когда кривая γ является диаграммой узла.

Далее нам будет удобнее пользоваться упрощенными хордовыми диаграммами, которые получаются следующим образом. Пусть дана хордовая диаграмма X , на которой выделена дуга J окружности со

следующим свойством: для каждой хорды не более чем одна ее концевая точка лежит на дуге J . Пусть m – число хорд, у которых концевая точка лежит на дуге J . Теперь совершим следующие действия: (i) удалим все хорды, один конец которых лежит на дуге J , (ii) концы оставшихся хорд и концы дуги J разбивают окружность на связные компоненты, каждой из этих компонент припишем вес – число, равное количеству концевых точек хорд, лежащих на этой дуге в исходной хордовой диаграмме X . Получившийся объект мы будем называть *упрощенной относительно дуги J хордовой диаграммой*. В дальнейшем мы будем опускать слова “относительно дуги J ”, так как из контекста ясно, о какой дуге идет речь. Отметим, что в упрощенной хордовой диаграмме суммарный вес всех дуг, отличных от J , равен m . Упрощенной хордовой диаграмме так же, как и обычной, можно сопоставить циклическое слово, вставляя при этом на соответствующие места в слове (i) символ $\overline{[m]}$, отвечающий дуге J , и (ii) для каждой дуги веса r – символ $[r]$. Такие циклические слова, отвечающие упрощенным хордовым диаграммам, мы будем называть α -строками. *Сложностью* α -строки A (обозначение $\text{Comp}(A)$) будем называть количество различных хорд в соответствующей упрощенной хордовой диаграмме, а *длину* α -строки (обозначение $\text{Len}(A)$) определим как $m + \text{Comp}(A)$. Кроме того, α -строки, полученные из диаграмм узлов, мы будем называть *упрощенными гауссовыми кодами*.

За тем, как изменяется диаграмма в результате применения приемов I или II, легко следить, пользуясь языком упрощенных гауссовых кодов. Пусть дана диаграмма узла (не являющаяся полумеандрической) с выделенной простой дугой и упрощенным гауссовым кодом \tilde{G} . Тогда, применяя к ней один из приемов I или II, мы получаем новую диаграмму, упрощенный гауссов код которой получается из \tilde{G} одним из трех возможных способов:

$$\text{I} : S_1 \overline{[m]} [r] \alpha S_2 \alpha S_3 \rightarrow S_1 \overline{[m + 2r + 1]} [r] S_2 [2r + 1] S_3, \quad (1)$$

$$\text{I} : S_1 \alpha S_2 \alpha [r] \overline{[m]} S_3 \rightarrow S_1 [2r + 1] S_2 [r] \overline{[m + 2r + 1]} S_3, \quad (2)$$

$$\text{II} : S_1 \overline{[m]} S_2 \alpha [r] \alpha S_3 \rightarrow S_1 \overline{[m + r]} S_2 [2r] S_3. \quad (3)$$

Здесь α отвечает перекрестку диаграммы, не лежащему на выделенной дуге, а S_1 , S_2 и S_3 – некоторые подстроки. Более детальный анализ приемов I или II позволяет заметить следующие факты:

Факт 1. Если упрощенный гауссов код содержит подстроку вида

$$\alpha_1[r_1]\alpha_2[r_2]\dots\alpha_{k-1}[r_{k-1}]\alpha_k[r_k]\alpha_k[r_{k+1}]\alpha_{k-1}\dots[r_{2k-2}]\alpha_2[r_{2k-1}]\alpha_1,$$

то прием II можно применить k раз таким образом, чтобы добавилось не более чем

$$kr_k + \sum_{j=1}^{k-1} j(r_j + r_{2k-j})$$

перекрестков. Для этого достаточно проводить все возможные упрощающие (т. е. уменьшающие количество перекрестков) движения Рейдемейстра типа I или II после каждого применения приема II.

Факт 2. Если упрощенный гауссов код содержит подстроку вида

$$\overline{[m]}[r_1]\alpha_1[r_2]\alpha_1[r_3]\alpha_2[r_4]\alpha_3\dots[r_{k+1}]\alpha_k$$

или подстроку вида

$$\alpha_k[r_{k+1}]\dots\alpha_3[r_4]\alpha_2[r_3]\alpha_1[r_2]\alpha_1[r_1]\overline{[m]},$$

то, применив сперва прием II для α_1 , затем можно применить прием I для $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ так, чтобы добавилось не более чем

$$\sum_{i=3}^{k+1} 2^{k+2-i}r_i + 2^{k-1}r_1 + (2^{k-1} + 1)r_2$$

перекрестков. Как и выше, этого можно добиться, проводя упрощающие движения Рейдемейстра после каждого применения приема I.

Будем проводить преобразования вида (1)–(3) вместе с фактами 1 и 2, приведенными выше, на произвольных α -строках в точности так же, как на упрощенных гауссовых кодах. При этом мы сохраним за этими преобразованиями прежние названия – прием I и прием II.

Перейдем, наконец, к построению полумеандрической диаграммы. Пусть нам дана диаграмма D с n перекрестками, представляющая узел K . Выделим на диаграмме D гладкую простую дугу J , содержащую m перекрестков. Рассмотрим несколько случаев, в зависимости от того, чему равно $n - m$.

Случай $n - m = 1$. В этом случае упрощенный гауссов код диаграммы D имеет вид $[r_1]\alpha_1[r_2]\overline{[m]}[r_3]\alpha_1$, и полумеандрическую диаграмму можно получить одним из трех способов: применив прием I слева или справа от $\overline{[m]}$, или применив прием II к α_1 . Выберем тот из них, в

результате применения которого добавится наименьшее число перекрестков (напомним, что $r_1 + r_2 + r_3 = m$). Получаем, что количество перекрестков на новой диаграмме не превышает

$$n + \min\{r_1 - 1, 2r_2, 2r_3\} \leq \frac{3n}{2} - 1.$$

Случай $n - m = 2$. Рассмотрим произвольную α -строку A сложности два. Она имеет один из трех возможных видов:

- (1) $[r_1]\alpha_1[r_2]\alpha_2[r_3]\overline{[m]}[r_4]\alpha_1[r_5]\alpha_2$,
- (2) $[r_1]\alpha_1[r_2]\alpha_2[r_3]\overline{[m]}[r_4]\alpha_1[r_5]\alpha_2$,
- (3) $[r_1]\alpha_2[r_2]\alpha_2[r_3]\overline{[m]}[r_4]\alpha_1[r_5]\alpha_1$.

Нетрудно видеть, что, пользуясь приемами I и II, каждую из этих α -строк можно перевести в α -строку нулевой сложности и длины не более $3\text{Len}(A) - 4$: для первого и второго варианта нужно либо дважды использовать прием I слева от $\overline{[m]}$, либо дважды использовать его справа от $\overline{[m]}$, а для третьего варианта нужно два раза применить прием II. Это значит, что если нам дана диаграмма (с выделенной гладкой простой дугой), для которой выполнено $n - m = 2$, то найдется полумеандрическая диаграмма того же узла с не более $3n - 4$ перекрестками.

Случай $n - m = 3$. Рассмотрим все возможные α -строки сложности три. С этого момента перебор всех возможных α -строк заданной сложности осуществлялся с помощью компьютерной программы, код которой можно найти в [7]. Различных α -строк сложности три всего 15. Заметим, что если в такой α -строке A есть подстрока вида

$$\overline{[m]}[r_1]\alpha_{i_1}[r_2]\alpha_{i_2}[r_3]\alpha_{i_3},$$

где все i_k , $k = 1, 2, 3$, различны, то, используя прием I три раза (слева или справа от $\overline{[m]}$), можно получить α -строку нулевой сложности и длины не более $4\text{Len}(A) - 9$. Кроме того, если к α -строке A применим прием II, то, очевидно, она может быть приведена к α -строке нулевой сложности и длины не более $3\text{Len}(A)$ (см. факт 2 выше). Остается рассмотреть единственный вариант с α -строкой вида

$$[r_1]\alpha_1[r_2]\alpha_2[r_3]\alpha_1[r_4]\overline{[m]}[r_5]\alpha_3[r_6]\alpha_2[r_7]\alpha_3.$$

Как нетрудно видеть, эта α -строка не является упрощенным гауссовым кодом (в противном случае существовал бы узел с гауссовым кодом $\alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_3$, а такого узла не существует). В результате получаем,

что если нам дана диаграмма узла (с выделенной гладкой простой дугой), для которой выполнено $n - m = 3$, то найдется полумеандрическая диаграмма того же узла с не более $4n - 9$ перекрестками.

Случай $n - m \geq 4$. Каждая α -строка сложности четыре или выше содержит подстроку вида

$$\alpha_{i_1}[r_1]\alpha_{i_2}[r_2]\alpha_{i_3}[r_3]\alpha_{i_4}[r_4]\overline{[m]}[r_5]\alpha_{i_5}[r_6]\alpha_{i_6}[r_7]\alpha_{i_7}[r_8]\alpha_{i_8}.$$

Такие подстроки (состоящие ровно из 17 символов) мы будем называть *центральными*. Воспользовавшись компьютерным перебором, мы получаем, что существует в точности 764 центральные подстроки. Перейдем к анализу возможных вариантов.

- Если в α -строке A сложности четыре или выше имеется подстрока вида

$$\alpha_{j_1}[r_1]\alpha_{j_2}[r_2]\alpha_{j_3}[r_3]\alpha_{j_4}[r_4]\overline{[m]}[r_1]\alpha_{i_1}[r_2]\alpha_{i_2}[r_3]\alpha_{i_3}[r_4]\alpha_{i_4},$$

где все j_k , $k = 1, 2, 3, 4$, различны и все i_k , $k = 1, 2, 3, 4$, различны, или подстрока вида

$$\alpha_{i_1}[r_1]\alpha_{i_2}[r_2]\overline{[m]}[r_3]\alpha_{i_3}[r_4]\alpha_{i_4},$$

где все i_k , $k = 1, 2, 3, 4$, различны, то, применяя прием I четырежды к α -строке A , можно получить новую α -строку сложности $\text{Comp}(A) - 4$ и длины не более $\text{Len}(A) + 4m$.

- Если в α -строке A сложности четыре или выше имеется подстрока вида

$$\alpha_{i_1}[r_1]\overline{[m]}[r_2]\alpha_{i_2}[r_3]\alpha_{i_3}[r_4]\alpha_{i_4},$$

или

$$\alpha_{i_1}[r_1]\alpha_{i_2}[r_2]\alpha_{i_3}[r_3]\overline{[m]}[r_4]\alpha_{i_4},$$

где все i_k , $k = 1, 2, 3, 4$, различны, то, используя прием I четырежды, можно получить новую α -строку сложности $\text{Comp}(A) - 4$ и длины не более $\text{Len}(A) + 5m$.

- Если к центральной подстроке α -строки A применим прием II, то, проведя его, мы получаем новую α -строку на единицу меньшей сложности и длины не более $\text{Len}(A) + m - 1$. Принимая во внимание факты 1 и 2, мы заключаем, что, используя приемы I и II, из α -строки A можно получить α -строку сложности $\text{Comp}(A) - 4$ и длины не более

$$\text{Len}(A) + m - 1 + 4m = \text{Len}(A) + 5m - 1.$$

- Перейдем теперь к тем центральным подстрокам, которые не охватываются ни одним из рассмотренных выше случаев. С точностью до обращения порядка, всего таких подстрок три:

$$(1) \alpha_5[r_1]\alpha_4[r_2]\alpha_2[r_3]\alpha_4[r_4][\overline{m}][r_5]\alpha_1[r_6]\alpha_2[r_7]\alpha_1[r_8]\alpha_3,$$

$$(2) \alpha_3[r_1]\alpha_4[r_2]\alpha_2[r_3]\alpha_4[r_4][\overline{m}][r_5]\alpha_1[r_6]\alpha_2[r_7]\alpha_3[r_8]\alpha_1,$$

$$(3) \alpha_5[r_1]\alpha_1[r_2]\alpha_5[r_3]\alpha_2[r_4][\overline{m}][r_5]\alpha_1[r_6]\alpha_2[r_7]\alpha_3[r_8]\alpha_4.$$

При этом, как нетрудно видеть, подстроки 1 и 2 не содержатся ни в каком упрощенном гауссовом коде, а α -строку A , содержащую подстроку 3, можно привести к α -строке сложности $\text{Comp}(A) - 4$ длины не более

$$\text{Len}(A) + \min\{8r_5, 14r_4 + 2r_5 + 4, 6r_5 + 2r_4 + 1\} \leq \text{Len}(A) + 5m.$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что если дана диаграмма узла с n перекрестками и гладкая простая дуга на ней, содержащая m перекрестков, то можно сперва сделать $\lfloor \frac{n-m}{4} \rfloor$ итераций, каждая из которых уменьшает сложность соответствующего упрощенного гауссова кода на 4 (увеличивая при этом вес простой дуги не более чем на $5m + 4$), а затем до трех дополнительных действий для оставшихся перекрестков. В результате получаем следующую оценку:

$$\text{cr}_2(K) \leq 4 \left(\left(m + \frac{4}{5} \right) 6^{\lfloor \frac{\text{cr}(K)-m}{4} \rfloor + 3} \right) - 9 \leq 3 + 4 \left(m + \frac{4}{5} \right) \sqrt[4]{6}^{\text{cr}(K)-m}. \quad (4)$$

Кроме того, в работе [1] доказано, что у каждого узла, число перекрестков которого превышает 10, найдется минимальная диаграмма, на которой можно выделить простую дугу, содержащую по меньшей мере 8 перекрестков. Используя это, получаем, что для узла K , число перекрестков которого превышает 10, выполнено неравенство

$$\text{cr}_2(K) \leq 3 + \frac{44}{45} \sqrt[4]{6}^{\text{cr}(K)} \leq \sqrt[4]{6}^{\text{cr}(K)}.$$

Для узлов с меньшим числом перекрестков это неравенство тоже выполнено: см. [14], где найдены полумеандрические диаграммы узлов с малым числом перекрестков. Теорема доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть дана диаграмма D некоторого узла K , составленная из $k + 1$ гладкой простой дуги и минимальная по числу перекрестков среди таких диаграмм (т. е. число перекрестков на D есть в точности $\text{cr}_{k+1}(K)$).

Разобьем диаграмму D на $k + 1$ гладкую простую дугу и выберем из них дугу J , минимальную по числу перекрестков, лежащих на ней. Как нетрудно видеть, дуга J содержит по большей мере $\frac{\text{cr}_{k+1}(K)}{k+1}$ перекрестков. Исходя из того, что $k + 1 \geq 3$, можно заключить, что дуги, соседние с дугой J , различны; обозначим их через J_l и J_r . Пусть, для определенности, число точек пересечения между дугами J и J_l не больше, чем число точек пересечения между дугами J и J_r . Тогда, используя аналог приема I из доказательства теоремы 1, мы можем получить диаграмму того же узла, полученную заменой дуги J_l простой дугой, не пересекающей J (см. рис. 3).

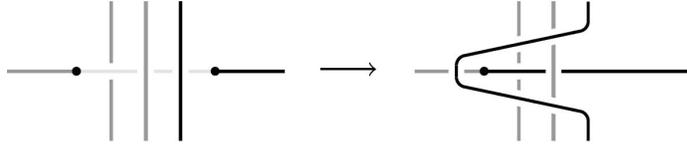


Рис. 3. Аналог приема I.

Обозначив за m число пересечений между J и J_l , мы видим, что количество перекрестков новой диаграммы не превышает

$$\text{cr}_{k+1}(K) + 2m \left(\frac{\text{cr}_{k+1}(K)}{k+1} - m \right) \leq \text{cr}_{k+1}(K) + \frac{(\text{cr}_{k+1}(K))^2}{2(k+1)^2}.$$

Кроме того, очевидно, что получившаяся диаграмма может быть составлена из k гладких простых дуг. Доказательство закончено.

§4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ КОММЕНТАРИИ

Замечание. Можно получать и более тонкие, чем в теореме 1, оценки на полумеандрическое число перекрестков, если в доказательстве рассматривать больше случаев: $n - m = 5, 6, \dots$. Однако этот подход не позволяет уйти от экспоненциальной оценки, в то время как дальнейшее углубление перебора сопряжено со значительным увеличением вычислительных трудностей.

Замечание. Очевидно, что для фиксированного узла K числа $\text{cr}_k(K)$ образуют невозрастающую последовательность. Приняв обозначение

$$p^*(K) = \min\{k \mid \text{cr}_k(K) = \text{cr}(K)\},$$

получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \text{cr}_2(K) \geq \text{cr}_3(K) \geq \dots \geq \text{cr}_{p^*(K)-1}(K) \\ > \underbrace{\text{cr}_{p^*(K)}(K) = \text{cr}_{p^*(K)+1}(K) = \dots}_{=\text{cr}(K)} \end{aligned}$$

В этом контексте удобно интерпретировать $\text{cr}(K)$ как $\text{cr}_\infty(K)$.



Рис. 4. Примеры узлов, для которых $p^*(K) = \frac{\text{cr}(K)}{3}$.

Замечание. Отметим, что верхняя оценка на $p^*(K)$ не может быть меньше, чем линейная по $\text{cr}(K)$. Это доказывают примеры на рис. 4: диаграммы, изображенные там (и подобные им), являются единственными (с точностью до изотопии) минимальными диаграммами соответствующих узлов (по третьей гипотезе Тейта, см. [12, 13]), но ни одну из этих диаграмм нельзя разбить менее чем на $\frac{\text{cr}(K)}{3}$ гладких простых дуг.

Замечание. Используя теорему 2, можно улучшить оценку на полумеандрическое число перекрестков для некоторых классов узлов. А именно, если рассмотреть узлы, у которых $p^*(K) \leq n$, где n – некоторое фиксированное число, то для них $\text{cr}_2(K)$ может быть оценено полиномом степени не выше 2^{n-2} от $\text{cr}(K)$. Это, однако, не позволяет улучшить оценку на полумеандрическое число перекрестков для всех узлов (см. предыдущее замечание).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. С. Белоусов, А. В. Малютин, *Простые дуги в плоских кривых и в диаграммах узлов.* — Тр. ИММ УрО РАН **23**, No. 4 (2017), 63–76.

2. С. В. Дужин, *Комбинаторные аспекты теории инвариантов Васильева*. — Дис. ... докт. физ.-матем. наук, С.-Петербургское отд. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, 2011.
3. Г. С. Маканин, *Об одном аналоге теоремы Александра–Маркова*. — Изв. АН СССР. Сер. матем. **53**, No. 1 (1989), 200–210.
4. C. Adams, R. Shinjo, K. Tanaka, *Complementary regions of knot and link diagrams*. — Ann. Comb. **15**, No. 4 (2011), 549–563.
5. Yu. Belousov, A. Malyutin, *Estimates on the semi-meandric crossing number of classical knots*. — Abstracts of the International Conference “Polynomial Computer Algebra 2017” (2017), 21–24.
6. Yu. Belousov, A. Malyutin, *Meander diagrams of knots and spatial graphs: proofs of generalized Jablan–Radović conjectures*. arXiv:1803.10879 (2018).
7. Yu. Belousov, *Program for generating alpha-strings*. github.com/YuryBelousov/Alpha-strings (2018).
8. G. Burde, H. Zieschang, *Knots*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2003.
9. C. Even-Zohar, J. Hass, N. Linial, T. Nowik, *Universal knot diagrams*. arXiv:1804.09860 (2018).
10. G. Hotz, *Arkadenfadendarstellung von Knoten und eine neue Darstellung der Knotengruppe*. — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **24** (1960), 132–148.
11. A. Kawachi, *A Survey of Knot Theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.
12. W. Menasco, M. Thistlethwaite, *The Tait flyping conjecture*. — Bull. Amer. Math. Soc. **25**, No. 2 (1991), 403–412.
13. W. Menasco, M. Thistlethwaite, *The classification of alternating links*. — Ann. Math. **138**, No. 1 (1993), 113–171.
14. N. Owad, *Straight knots*. arXiv:1801.10428 (2018).
15. M. Ozawa, *Edge number of knots and links*. arXiv:0705.4348 (2007).
16. L. Radović, S. Jablan, *Meander knots and links*. — Filomat **29**, No. 10 (2015), 2381–2392.
17. D. Rolfsen, *Knots and Links*. Publish or Perish Press, Berkeley, Calif., 1976.

Belousov Yu. S. The semimeander crossing number of knots and related invariants.

The minimum number of crossings among all of the diagrams of a knot K composed of at most k smooth simple arcs is called the k -arc crossing number of K . This number is denoted by $\text{cr}_k(K)$. The 2-arc crossing number is also called the semimeander crossing number. The article studies connections of the k -arc crossing numbers with the classical crossing number $\text{cr}(K)$ of K . It is proved that for each knot K , the following inequalities are fulfilled: $\text{cr}_2(K) \leq \sqrt[4]{6}^{\text{cr}(K)}$ and $\text{cr}_k(K) \leq \text{cr}_{k+1}(K) + \frac{(\text{cr}_{k+1}(K))^2}{2(k+1)^2}$.

Национальный исследовательский
университет
“Высшая школа экономики”,
ул. Усачёва 6,
119048 Москва, Россия
E-mail: bus99@yandex.ru

Поступило 18 декабря 2018 г.