Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 475, 2018 г.

А. А. Сагдеев

О ХРОМАТИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАМСЕЕВСКИМ МНОЖЕСТВАМ

§1. Введение

В 1950 году Нельсон поставил свой знаменитый вопрос (см. [1]): "какого наименьшего числа цветов $\chi\left(\mathbb{R}^2\right)$ достаточно для того, чтобы раскрасить точки плоскости так, чтобы никакие две точки на единичном расстоянии не имели бы один и тот же цвет?" К сожалению, ответ на данный вопрос все еще неизвестен, однако доказано (доказательство верхней оценки можно найти, например, в [1]; нижняя оценка получена в недавнем препринте [2]), что

$$5 \leqslant \chi\left(\mathbb{R}^2\right) \leqslant 7.$$

Эту классическую задачу Нельсона можно обобщать различными способами. Например, вместо того, чтобы раскрашивать плоскость $\mathbb{R}^2$, можно поставить вопрос об аналогичном раскрашивании n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ или, даже более общо, метрического пространства $\mathbb{R}^n_p$, которое при $p \in [1;\infty]$ задается как $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_p, определенной следующим стандартным образом:

$$\mathbf{x} = (x_1, \ \dots \ , x_n), \ \mathbf{y} = (y_1, \ \dots \ , y_n) \\ \Rightarrow \ l_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p}.$$

Хроматические числа $\chi\left(\mathbb{R}^n_p\right)$ изучались во множестве статей, так что о них известно довольно многое. В частности, о поведении $\chi\left(\mathbb{R}^n_p\right)$ при больших n известно следующее:

Ключевые слова: хроматическое число, евклидова теория Рамсея, экспоненциально рамсеевское множество, правильный симплекс.

Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ No. 18-01-00355 и частичной финансовой поддержке гранта поддержки ведущих научных школ НШ-6760.2018.1.

Теорема 1. *Справедливы следующие четыре утверждения:*

1) *При каждом* $p \in [1, \infty]$ *при* $n \to \infty$

$$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} + o(1)\right)^n = (1.207... + o(1))^n \leqslant \chi\left(\mathbb{R}_p^n\right) \leqslant (4 + o(1))^n ,$$

2) *При* $p = 1,\ n \to \infty$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + o(1)\right)^n = (1.366... + o(1))^n \leqslant \chi\left(\mathbb{R}_1^n\right) \leqslant (4 + o(1))^n ,$$

3) *При* $p = 2,\ n \to \infty$

$$(1.239... + o(1))^n \leqslant \chi\left(\mathbb{R}_2^n\right) \leqslant (3 + o(1))^n ,$$

4) *При* $p = \infty$ *и при любом* n *справедливо точное равенство*

$$\chi\left(\mathbb{R}_\infty^n\right) = 2^n.$$

Доказательства нижней и верхней оценок пункта 1) можно найти в статьях [3] и [4] соответственно. Доказательство пункта 2) – в [5] и [4]. Доказательство пункта 3) – в [6] и [7], а равенство из пункта 4) является классическим и его доказательство можно найти, например, в [8].

Исходный вопрос Нельсона можно обобщать еще сильнее. Область, изучающая подобные обобщения, называется *евклидовой теорией Рамсея* (см., например, статьи [9–11] и книгу [12]). В рамках этой теории наряду с параметрами p и n нам также дано произвольное метрическое пространство $\mathcal{Y} = (Y, d_Y)$. Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ мы будем называть *копией* пространства $\mathcal{Y}$, если существует биективное отображение $f : Y \to X$ такое, что $\forall\, y_1, y_2 \in Y$ справедливо равенство $d_Y(y_1, y_2) = l_p(f(y_1), f(y_2))$.

Хроматическим числом $\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{Y}\right)$ *пространства* $\mathbb{R}_p^n$ *с запрещенным пространством* $\mathcal{Y}$ мы будем называть минимальное число цветов, которых достаточно для такой раскраски пространства $\mathbb{R}_p^n$, при которой ни одна копия $X \subset \mathbb{R}^n$ пространства $\mathcal{Y}$ не является полностью одноцветной.

Ясно, что исходный вопрос Нельсона об отыскании $\chi\left(\mathbb{R}^2\right)$ является частным случаем вопроса об отыскании $\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{Y}\right)$. Действительно, достаточно положить $n = p = 2$ и взять в качестве $\mathcal{Y}$ произвольное двухточечное пространство. Конечно, раз даже значение $\chi\left(\mathbb{R}^2\right)$ все еще не найдено, то мы и не можем надеяться на получение точного значения величины $\chi\left(\mathbb{R}_p^n;\mathcal{Y}\right)$ в общем случае. Однако, можно надеяться на решение более простых вопросов.

Например, глядя на теорему 1, естественно заинтересоваться, правда ли, что с ростом n величина $\chi\left(\mathbb{R}_p^n;\mathcal{Y}\right)$ (экспоненциально) стремится к бесконечности. Если этой свойство выполняется, то метрическое пространство $\mathcal{Y}$ называют l_p-*(экспоненциально) рамсеевским.*

Критерий, позволяющий описать все рамсеевские и экспоненциально рамсеевские множества, пока не найден. На этот счет есть две популярные гипотезы. Первая из них гласит, что всякое рамсеевское множество является в то же время экспоненциально рамсеевским. Вторая – что при $p = 2$, т.е. в случае "евклидовой" метрики, множество Y является рамсеевским тогда и только тогда, когда оно конечно и "сферично", т.е. лежит на поверхности некоторой многомерной сферы (на данный момент известно, что эти два условия являются необходимыми, однако их достаточность пока не доказана; см., например, [12]).

На сегодняшний день рамсеевость и экспоненциальная рамсеевость доказана только для сравнительно небольшого количества множеств, которые мы перечислим после нескольких вспомогательных определений.

l_p-*декартовым произведением* $\times_p$ метрических пространств $\mathcal{X} = (X, d_X)$ и $\mathcal{Y} = (Y, d_Y)$ мы будем называть метрическое пространство $\mathcal{X} \times_p \mathcal{Y} = (X \times Y, d)$, где метрика d определена следующим естественным образом

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \;\; \forall\, y_1, y_2 \in Y \;\; d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt[p]{d_X^p(x_1, x_2) + d_Y^p(y_1, y_2)}.$$

k-*мерным* l_p-*прямоугольным параллелепипедом* $\mathcal{I}_p^k = \mathcal{I}_p^k\,(a_1, \ldots, a_k)$ мы будем называть метрическое пространство, являющееся l_p-декартовым произведением каких-нибудь k "отрезков" (двухточечных метрических пространств), таких что при каждом i длина i-ого отрезка равна a_i.

k-*мерным симплексом* мы будем называть любое метрическое пространство, состоящее из $k + 1$ точки. Если дополнительно расстояние между любыми двумя различными его точками одинаково, то такой симплекс $\mathcal{S}_k$ мы будем называть *правильным.* Отметим, что это определение наиболее естественно в l_2-метрике, однако ничто не мешает нам так определять симплекс и при $p \neq 2$.

Теперь мы готовы перечислить все известные на данный момент экспоненциально рамсеевские множества.

В работе [13] было доказано, что при любом $p \in [1; \infty]$ множество вершин любого l_p-прямоугольного параллелепипеда является l_p-экспоненциально рамсеевским. В той же работе при $p = 2$ была обоснованна l_2-экспоненциальная рамсеевость множества вершин любого невырожденного симплекса. Помимо этого, очевидно, что любое подмножество экспоненциально рамсеевского множества само является экспоненциально рамсеевским, так как если $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}_2$, то $\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{Y}_1\right) \geqslant \chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{Y}_2\right)$. Другие примеры экспоненциально рамсеевских множеств неизвестны.

Более слабое свойство рамсеевости обоснованно для большего числа множеств. Например, в работах [14] и [15] доказана l_2-рамсеевость множества вершин произвольного правильного многогранника любой размерности. В [16] – l_2-рамсеевость произвольного трапециоида.

Однако, несмотря на то, что экспоненциальная рамсеевость некоторых множеств известна довольно давно, получению для них нижних экспоненциально растущих оценок, аналогичных оценкам из теоремы 1, посвящено довольно мало работ.

Ситуация $\mathcal{Y} = \mathcal{S}_k$ была изучена в [17] и [18], где была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *При каждом $p \in [1, \infty]$ и при любом $k \geqslant 1$ при $n \to \infty$ верно, что*

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{S}_k\right) \geqslant \left(1 + \frac{1}{2^{2^{k+4}}} + o(1)\right)^n.$$

В работе [19] для получения нижних оценок был использован принципиально иной метод, что позволило выписать множество различных оценок и, в частности, доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $p \in [1, \infty]$ и $\mathcal{Y} = \mathcal{S}_k$ или $\mathcal{Y} = \mathcal{I}_p^k$. Тогда существует такая стремящаяся к нулю при $k \to \infty$ функция $\varepsilon(k)$, с которой при каждом $k \geqslant 1$ при $n \to \infty$ справедливо следующее неравенство*

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{Y}\right) \geqslant \left(1 + \left(\frac{1}{2 + \varepsilon(k)}\right)^k + o(1)\right)^n.$$

Видно, что при больших k теорема 3 дает намного более сильную оценку, по сравнению с теоремой 2. Однако, из-за отсутствия явного вида функции $\varepsilon(k)$, не ясно, верно ли это и при малых значениях k тоже. Настоящая статья устраняет этот пробел: теорема 6, сформулированная в §2, конкретизирует теорему 3 таким образом, что ее превосходство над теоремой 2 становится очевидным абсолютно при любом значении k.

Помимо теоремы 3 работа [19] содержала ряд других интересных результатов. В частности, в ней была доказана следующая теорема (ср. с пунктом 4 теоремы 1)

Теорема 4. *При любом $k \geqslant 1$, при $n \to \infty$ верно, что $\chi\left(\mathbb{R}^n_\infty; \mathcal{S}_k\right) = (2 + o(1))^n$.*

В настоящей работе нам удалось конкретизировать и эту теорему, выписав *точную* формулу величины $\chi\left(\mathbb{R}^n_\infty; \mathcal{S}_k\right)$ как функции от n и k. Этому посвящена теорема 7 из §2 настоящей работы.

Теперь, когда мы рассказали то, что известно о нижних экспоненциально растущих оценках величин $\chi\left(\mathbb{R}^n_p; \mathcal{Y}\right)$, мы расскажем о их верхних оценках, некоторые из которых были найдены в работах [20] и [21]. В частности, в работе [21] была доказана следующая довольно универсальная теорема.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{Y} = (Y, d_Y)$ – конечное метрическое пространство. Введем две связанные с ним величины: $l(\mathcal{Y})$ и $R(l_2; \mathcal{Y})$. Величину $l(\mathcal{Y})$ мы определим как наименьший элемент множества, состоящего из таких положительных чисел l, для которых любые два элемента $u, v \in Y$ можно соединить путем $\{u = y_0, y_1, \ \dots \ , y_m = v\}$, где все $y_i \in Y$, а также*

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant m-1} d_Y(y_i, y_{i+1}) \leqslant l,$$

а величину $R(l_2; \mathcal{Y})$ мы определим как наименьший радиус l_2-шара, содержащего в себе копию $\mathcal{Y}$. Тогда при $n \to \infty$ верно, что

$$\chi\left(\mathbb{R}^n_2; \mathcal{Y}\right) \leqslant \left(1 + \frac{l(\mathcal{Y})}{R(l_2; \mathcal{Y})} + o(1)\right)^n.$$

Видно, что данная теорема позволяет получать явные нетривиальные верхние оценки при любом фиксированном пространстве $\mathcal{Y}$, так как в каждом конкретном случае вычислить величины $l(\mathcal{Y})$ и $R(l_2; \mathcal{Y})$ не составляет труда (см., например, множество конкретных следствий из этой теоремы, выписанных в работе [21]). Однако, недостатком этой теоремы является тот факт, что она справедлива только для l_2-метрики.

В настоящей работе мы применили технику из работы [21] для более общего случая. Полученная в результате этого теорема 8, выписанная в §2, применима для всех l_p-метрик.

В заключение отметим, что смежные задачи комбинаторной геометрии и евклидовой теории Рамсея рассматривались в статьях [22–28], обзорах [29–32] и в книге [12].

§2. Формулировка результатов

Как мы уже упоминали в §1, в данной статье есть три основных результата. Первым из них является нижеследующая теорема 6, являющаяся конкретизацией известной ранее теоремы 3.

Теорема 6. *При каждом $p \in [1, \infty]$ и при любом $k \geqslant 2$ при $n \to \infty$ верно, что*

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{I}_p^k\right) \geqslant \left(1 + \frac{1}{2^{k+1} \cdot k^2} + o(1)\right)^n.$$

Так как правильный k-мерный симплекс $\mathcal{S}_k$ является подмножеством $(k+1)$-мерного куба $\mathcal{I}_p^{k+1}$ (произведения $\times_p$ одного и того же отрезка на себя $k+1$ раз), то из теоремы 6 вытекает интересное следствие.

Следствие 1. *При каждом $p \in [1, \infty]$ и при любом $k \geqslant 1$ при $n \to \infty$ верно, что*

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{S}_k\right) \geqslant \left(1 + \frac{1}{2^{k+2} \cdot (k+1)^2} + o(1)\right)^n.$$

Не составляет труда увидеть, что оценка, обоснованная в предыдущем следствии, сильнее аналогичной оценки из теоремы 2 при всех k, а не только при достаточно больших.

Вторым центральным результатом настоящей работы является следующая теорема 7, являющаяся значительным уточнением ранее известной теоремы 4.

Теорема 7. *При любых натуральных значениях k и n верно следующее точное равенство*

$$\chi\left(\mathbb{R}_\infty^n; \mathcal{S}_k\right) = \left\lceil \frac{2^n}{k} \right\rceil.$$

Отметим, что в частном случае $k = 1$ результат теоремы 7 совпадает с ранее известным результатом, приведенном нами в пункте 4 теоремы 1.

Для формулировки нашего третьего основного результата нам необходимо ввести несколько обозначений, связанных с теорией плотных упаковок.

Пусть K – ограниченное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, а Ω – некоторая решетка в $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$\mathcal{K} = K + \Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} (K + \omega)$$

– упаковка, т.е. объединение является дизъюнктным. Положим $\delta(\mathcal{K}) = \frac{\operatorname{vol} K}{\det \Omega}$ – плотность нашей упаковки, а

$$\delta(K) = \sup_{\Omega} \delta(\mathcal{K}).$$

Пусть $r > 0$ и $B_p^n = B_p^n(r)$ – n-мерный l_p-шар радиуса r. Определим $c(p)$ как наименьшее из чисел c, для которых справедливо неравенство

$$\delta(B_p^n) \geqslant (2^c + o(1))^{-n},$$

или, более формально,

$$c(p) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log_2 \left(\delta^{-1}(B_p^n)\right)}{n}.$$

Итак, мы готовы сформулировать третий центральный результат нашей работы.

Теорема 8. *Пусть $p \in [1, \infty]$, $\mathcal{Y} = (Y, d_Y)$ – конечное метрическое пространство. Определим в полной аналогии с теоремой 5 две связанные с ним величины: $l(\mathcal{Y})$ и $R(l_p; \mathcal{Y})$. Тогда при $n \to \infty$ верно, что*

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{Y}\right) \leqslant \left(2^{c(p)} \cdot \left(1 + \frac{l(\mathcal{Y})}{2 \cdot R(l_p; \mathcal{Y})}\right) + o(1)\right)^n.$$

Видно, что даже в самых конкретных случаях применить эту теорему не так то просто. Дело в том, что точное значение функции $c(p)$ известно только при $p = \infty$: $c(\infty) = 0$ (см., например, [33]). Однако, для применения этой теоремы не обязательно знать точное значение $c(p)$, достаточно иметь какую-либо ее верхнюю оценку. Такие верхние оценки можно найти в работе [33]. В частности, из этой работы следует (хотя этот результат был известен и ранее), что при каждом p верно, что $c(p) \leqslant 1$.

Еще одной проблемой, стоящей на пути применения теоремы 8 в конкретных случаях, является тот факт, что при $p \neq 2$ не очень понятно, как вычислить (или хотя бы оценить снизу) величину $R(l_p; \mathcal{Y})$. Конечно, всегда можно воспользоваться очевидным неравенством $2 \cdot R(l_p; \mathcal{Y}) \geqslant \operatorname{diam} \mathcal{Y}$, однако оно, зачастую, далеко от оптимального.

Из вышесказанного мы мгновенно получаем два следствия из теоремы 8.

Следствие 2. *Пусть* $p < \infty$, $\mathcal{Y} = (Y, d_Y)$ *– конечное метрическое пространство. Тогда при* $n \to \infty$ *верно, что*

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{Y}\right) \leqslant \left(2 + \frac{l(\mathcal{Y})}{R(l_p; \mathcal{Y})} + o(1)\right)^n \leqslant \left(2 + \frac{2 \cdot l(\mathcal{Y})}{\operatorname{diam} \mathcal{Y}} + o(1)\right)^n.$$

Следствие 3. *Пусть* $p = \infty$, $\mathcal{Y} = (Y, d_Y)$ *– конечное метрическое пространство. Тогда при* $n \to \infty$ *верно, что*

$$\chi\left(\mathbb{R}_\infty^n; \mathcal{Y}\right) \leqslant \left(1 + \frac{l(\mathcal{Y})}{2 \cdot R(l_\infty; \mathcal{Y})} + o(1)\right)^n \leqslant \left(1 + \frac{l(\mathcal{Y})}{\operatorname{diam} \mathcal{Y}} + o(1)\right)^n.$$

Замечание 1. Отметим, что в “наиболее интересном случае”, когда $p = 2$, не только не известно никакого более сильного неравенства, кроме уже упомянутого факта, что $c(2) \leqslant 1$, но и даже популярна гипотеза о том, что $c(2) = 1$. А значит, в этом случае следствие 2, вероятно, не улучшаемо в рамках метода. Сравнив его с ранее известной теоремой 5, видим, что оно значительно хуже. Дело в том, что в доказательстве теоремы 5 используется довольно продвинутая техника основанная на том факте, что любое разбиение Вороного состоит из выпуклых областей. К сожалению, этот факт перестает быть верным для l_p-метрик в общем случае. Так что для того, чтобы получить работающую при всех p оценку нам пришлось воспользоваться более слабым и более универсальным методом. Так что в случае $p = 2$ полученная нами оценка хуже ранее известной.

В теореме 6 настоящей работы мы выписали явную нижнюю оценку хроматического числа в случае $\mathcal{Y} = \mathcal{I}_p^k(a_1, \ \dots \ , a_k)$. Выпишем теперь для иллюстрации соответствующую верхнюю оценку, тривиально вытекающую из следствия 2.

Следствие 4. *Пусть* $p < \infty$, $\mathcal{Y} = \mathcal{I}_p^k = \mathcal{I}_p^k(a_1, \ \dots \ , a_k)$, *где, без ограничения общности,* a_i *упорядочены по возрастанию. Тогда при*

$n \to \infty$ верно, что

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{I}_p^k\right) \leqslant \left(2 + \frac{a_k}{\sqrt[p]{a_1^p + \cdots + a_k^p}} + o(1)\right)^n.$$

В частности, если все a_i равны друг другу, т.е. $\mathcal{I}_p^k$ является правильным k-мерным кубом, то

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{I}_p^k\right) \leqslant \left(2 + \frac{1}{\sqrt[p]{k}} + o(1)\right)^n.$$

Оставшаяся часть работы построена следующим образом. В §3 мы докажем теорему 6, в §4 – теорему 7, а в §5 – теорему 8.

§3. Доказательство теоремы 6

3.1. Формулировка вспомогательного результата и вывод из него теоремы. Доказательство теоремы 6 будет очень близко по своей структуре к доказательству теоремы 3 из [19], однако, основные вычисления мы произведем намного более аккуратно. На самом деле, нами будет доказано немного более сильное утверждение, чем теорема 6.

Теорема 9. *При каждом $p \in [1, \infty]$ и при любом $k \geqslant 3$ при $n \to \infty$ верно, что*

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{I}_p^k\right) \geqslant \left(e^{\frac{1}{2^{k+1} \cdot k \cdot (k-1)}} + o(1)\right)^n.$$

Поймем, что при каждом $k \geqslant 3$ теорема 6 является следствием теоремы 9. Действительно, это верно в силу того, что

$$e^{\frac{1}{2^{k+1} \cdot k \cdot (k-1)}} > 1 + \frac{1}{2^{k+1} \cdot k \cdot (k-1)} > 1 + \frac{1}{2^{k+1} \cdot k^2}.$$

Единственный случай теоремы 6, не вытекающий из теоремы 9, это случай $k = 2$. Здесь нам потребуется сослаться на еще один результат из [19], утверждающий, что

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{I}_p^2\right) \geqslant (1.0428 \cdots + o(1))^n.$$

Несложно убедиться, что эта оценка сильнее заявленной в теореме 6, а значит, для завершения доказательства осталось только доказать теорему 9.

3.2. Доказательство теоремы 7. Доказательство мы будем вести индукцией по k. База индукции, случай $k = 3$, следует из оценки, доказанной в [19]:

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{I}_p^3\right) \geqslant (1.0126\dots + o(1))^n$$

и того факта, что

$$\ln 1.0126 > \frac{1}{2^{3+1} \cdot 3 \cdot 2}.$$

Для обоснования шага индукции мы привлечем теорему, доказанную в работе [19].

Теорема 10. *Пусть* $\mathcal{A} = (A, d_A)$ *– конечное метрическое пространство, которое при некотором* $p \geqslant 1$ *является* l_p*-экспоненциально рамсеевским и при* $n \to \infty$ *верно, что*

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{A}\right) \geqslant (\chi_{\mathcal{A}} + o(1))^n.$$

Пусть $\mathcal{I}$ *– двухточечное метрическое пространство. Тогда* $\mathcal{A} \times_p \mathcal{I}$ *– тоже является* l_p*-экспоненциально рамсеевским и при* $n \to \infty$ *верно, что*

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{A} \times_p \mathcal{I}\right) \geqslant \left(\chi_{\mathcal{A}}^{\delta} + o(1)\right)^n,$$

где

$$c_a^b = \frac{a^a}{b^b \cdot (a-b)^{(a-b)}}, \quad \chi(x, y) = \frac{c_1^{\min(x, 2x-2y)}}{c_1^{x-y}},$$

$$\delta = \frac{\ln \chi(x, y)}{\ln \chi_{\mathcal{A}} + \ln \chi(x, y) + \ln c_x^y + \ln c_{1-x}^{x-y}},$$

а значения вспомогательных параметров $0 < y < x \leqslant \frac{1}{2}$ *можно выбрать произвольно.*

Замечание 2. Отметим, что на самом деле в [19] в формулировке этой теоремы от $\mathcal{A}$ требовалось несколько более сильное свойство, чем l_p-экспоненциальная рамсеевость. Нестрого говоря, в [19] требовалось, чтобы $\mathcal{A}$ было не только l_p-экспоненциально рамсеевским, но и это можно было доказать, предъявив последовательность “гиперграфов”, число вершин которых растет “не очень быстро”. Однако, если посмотреть на доказательство той теоремы, станет ясно, что “не очень быстрый” рост числа вершин требовать не обязательно, то есть для применимости теоремы достаточно наличия хоть какой-то обосновывающей последовательности гиперграфов. Но это свойство автоматически справедливо для всех l_p-экспоненциально рамсеевских множеств в силу теоремы Эрдёша-де Брейна (которая верна не только для графов, но и для гиперграфов, как можно прочитать, например, в [29]). Таким образом, теорема, доказанная в [19], эквивалентна сформулированной выше теореме 10.

Эта теорема довольно громоздкая и не очень явная, так как для получения наилучшей нижней оценки нужно вычислять максимум величины δ по параметрам y и x. В дальнейшем мы будем пользоваться следующей упрощенной версией этой теоремы.

Следствие 5. *Пусть $\mathcal{A} = (A, d_A)$ – конечное метрическое пространство, которое при некотором $p \geqslant 1$ является l_p-экспоненциально рамсеевским и при $n \to \infty$ верно, что*

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{A}\right) \geqslant \left(e^r + o(1)\right)^n,$$

где r –произвольное положительное число, не превосходящее $\frac{1}{2}$. Пусть $\mathcal{I}$ – двухточечное метрическое пространство. Тогда $\mathcal{A} \times_p \mathcal{I}$ – тоже является l_p-экспоненциально рамсеевским и при $n \to \infty$ верно, что

$$\chi\left(\mathbb{R}_p^n; \mathcal{A} \times_p \mathcal{I}\right) \geqslant \left(e^{r \cdot s(r)} + o(1)\right)^n,$$

где

$$s(r) = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} - \frac{\ln 2 \cdot \ln\left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right)}{\ln^2\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Доказательство. Для получения этого следствия мы применим к нашей ситуации теорему 10, выбрав значения вспомогательных параметров следующим образом:

$$x = \frac{r \ln\left(\frac{1}{r}\right)}{2 \ln 2}, \quad y = \frac{r \ln\left(\frac{1}{r}\right)}{4 \ln 2}.$$

После этого остается только убедиться, что гарантированное теоремой 10 число δ в этом случае окажется больше, чем заявленная в данном следствии величина $s(r)$. $\square$

Итак, для обоснования шага индукции мы применим следствие 5 к ситуации

$$\mathcal{A} = \mathcal{I}_p^k, \quad r = \frac{1}{2^{k+1} \cdot k \cdot (k-1)}.$$

Несложно проверить, что при этом окажется, что $s(r) > \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}$, а значит

$$r \cdot s(r) > \frac{1}{2^{k+1} \cdot k \cdot (k-1)} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2^{k+2} \cdot (k+1) \cdot k},$$

что и завершает доказательство шага индукции.

§4. Доказательство теоремы 7

Так как пространство $\mathbb{R}^n_\infty$ гомотетично само себе, то, без ограничения общности, можно считать, что все “ребра” пространства $\mathcal{S}_k$ имеют единичную длину.

Нам потребуется ввести вспомогательное обозначение. Пусть $m = 2^n$ и $\mathbf{v}_1, \ \dots \ , \mathbf{v}_m$ – всевозможные точки $\mathbb{R}^n$, каждая координата которых равняется либо нулю, либо единице.

Теперь мы готовы перейти к доказательству, которое мы для удобства разбили на две несложные леммы.

Лемма 1. *При любых натуральных значениях k и n справедливо следующее неравенство:*

$$\chi\left(\mathbb{R}^n_\infty; \mathcal{S}_k\right) \geqslant \left\lceil \frac{2^n}{k} \right\rceil.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не верно. В таком случае при каких-то k и n мы смогли “правильно” раскрасить $\mathbb{R}^n_\infty$ в $s < \left\lceil \frac{2^n}{k} \right\rceil$ цветов. В частности, мы покрасили в s цветов точки $\mathbf{v}_1, \ \dots \ , \mathbf{v}_m$. По принципу Дирихле среди них найдется $k+1$ точка, покрашенная в один и тот же цвет. Нетрудно видеть, что этот набор из $k+1$ точки является копией пространства $\mathcal{S}_k$, что противоречит “правильности” нашей исходной раскраски и завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 2. *При любых натуральных значениях k и n справедливо следующее неравенство:*

$$\chi\left(\mathbb{R}^n_\infty; \mathcal{S}_k\right) \leqslant \left\lceil \frac{2^n}{k} \right\rceil.$$

Доказательство. Требуемое неравенство мы обоснуем, явно указав соответствующую раскраску. Положим

$$V_i = \bigcup_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n} \{\mathbf{v}_i + 2\mathbf{z} + [0;1)^n\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Во-первых, очевидно, что

$$\bigsqcup_{i=1}^{m} V_i = \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Во-вторых, нетрудно видеть, что

$$\forall\, i\ \forall\, x, y \in V_i \quad l_\infty(x, y) \neq 1. \tag{2}$$

Теперь мы построим искомую раскраску $\mathbb{R}^n$ в $\left\lceil \frac{2^n}{k} \right\rceil$ цветов следующим образом: объединим множества V_i в классы по k штук в каждом, кроме, быть может, последнего, в который войдут оставшиеся $2^n - k \cdot \left\lfloor \frac{2^n}{k} \right\rfloor$ множеств, если 2^n не делится на k. Ясно, что мы имеем в точности $\left\lceil \frac{2^n}{k} \right\rceil$ классов. Раскрасив точки каждого класса в свой цвет, мы получаем искомую раскраску.

Действительно, в силу (1) каждая точка $\mathbb{R}^n$ получила свой цвет. В силу (2) для каждого $(k+1)$-элементного множества X, являющегося копией $\mathcal{S}_k$ в $\mathbb{R}^n_\infty$, и каждого V_i верно, что $|X \cap V_i| \leqslant 1$, а значит, множество X не может быть целиком покрашено в один цвет.

Итак, мы предъявили “правильную” раскраску $\mathbb{R}^n_\infty$ в $\left\lceil \frac{2^n}{k} \right\rceil$ цветов и лемма полностью доказана.

□

§5. Доказательство теоремы 8

Будем считать, что число p и пространство $\mathcal{Y}$ зафиксированы. Пусть $\epsilon(n)$ – произвольная положительная, стремящаяся к 0 при $n \to \infty$ функция. При каждом $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\mu = 1 + \frac{l(\mathcal{Y})}{2 \cdot R(l_p; \mathcal{Y})} + \epsilon(n), \quad r = R(l_p; \mathcal{Y}) + \frac{l(\mathcal{Y})}{2}.$$

Смысл данного выбора параметров будет ясен позднее.

В силу определения величины $c(p)$ ясно, что существует такая стремящаяся к нулю при $n \to \infty$ функция $\varepsilon(p, n)$, для которой при каждом n существует решетка Ω такая, что

$$\delta(B^n_p(r) + \Omega) \geqslant \left(2^{c(p)} + \varepsilon(p, n)\right)^{-n}.$$

Положим $\mathcal{K}(\mu) = \frac{1}{\mu} B^n_p(r) + \Omega = B^n_p(\frac{r}{\mu}) + \Omega$. Докажем, что множество $\mathcal{K}(\mu)$ не содержит внутри себя копий пространства $\mathcal{Y}$. Для доказательства этого мы предположим противное и разберем два гипотетически возможных случая.

Во-первых, копия $\mathcal{Y}$ могла бы оказаться целиком в одном l_p-шаре радиусом $\frac{r}{\mu}$. Этот случай привел бы нас к противоречию с определением $R(l_p;\mathcal{Y})$, так как $\frac{r}{\mu} < R(l_p;\mathcal{Y})$.

Во-вторых, копия $\mathcal{Y}$ могла бы оказаться в нескольких l_p-шарах. В силу определения $l(\mathcal{Y})$, в таком случае должны были бы существовать две точки, принадлежащие разным шарам и находящиеся друг от друга на расстоянии не превосходящем $l(\mathcal{Y})$. Однако, как мы сейчас убедимся, это также невозможно, так как расстояние между любыми двумя шарами из $\mathcal{K}(\mu)$ строго больше $l(\mathcal{Y})$. Действительно, пусть точки x_1 и x_2 принадлежат шарам с центрами O_1 и O_2 соответственно. Тогда, в силу неравенства треугольника,

$$l_p(x_1,x_2) \geqslant l_p(O_1,O_2) - l_p(O_1,x_2) - l_p(x_2,O_2) \geqslant 2r - \frac{r}{\mu} - \frac{r}{\mu} > l(\mathcal{Y}).$$

Итак, мы доказали, что множество $\mathcal{K}(\mu)$ не содержит копий пространства $\mathcal{Y}$, а значит, при построении требуемой раскраски мы можем целиком покрасить его в один цвет. Для завершения доказательства нам потребуется воспользоваться одним утверждением, являющимся значительно ослабленной формой основного результата из [34].

Теорема 11. *Существует такая субэкспоненциальная функция $\omega(n) = (1+o(1))^n$, что для каждого ограниченного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$, и для каждой решетки Ω такой, что $\mathcal{K} = K + \Omega$ – упаковка, верно, что все пространство $\mathbb{R}^n$ можно покрыть с помощью не более чем $\delta^{-1}(\mathcal{K}) \cdot \omega(n)$ копий множества $\mathcal{K}$.*

Применив теперь теорему 11, получаем, что для построения правильной раскраски достаточно

$$\left(2^{c(p)} + \varepsilon(p,n)\right)^n \cdot \mu^n \cdot \omega(n) = \left(2^{c(p)} \cdot \left(1 + \frac{l(\mathcal{Y})}{2 \cdot R(l_p;\mathcal{Y})}\right) + o(1)\right)^n$$

цветов, что и завершает доказательство теоремы.

Список литературы

1. A. Сойфер, *Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее.* — Матем. просвещение, No. 8 (2004), 186–221.
2. A. D. N. J. de Grey, *The chromatic number of the plane is at least* 5, `https://arxiv.org/abs/1804.02385`.
3. P. Frankl, R. M. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences.* — Combinatorica, **1**, No. 4 (1981), 357–368.
4. A. Kupavskiy, *On the chromatic number of* $\mathbb{R}^n$ *with an arbitrary norm.* — Discrete Mathematics, **311** (2011), 437–440.

5. А. М. Райгородский, *О хроматическом числе пространства с метрикой l_q*. — Успехи мат. наук, **59**, No. 5 (2004), 161–162.
6. А. М. Райгородский, *О хроматическом числе пространства.* — Успехи мат. наук, **55**, No. 2 (2000), 147–148.
7. D. G. Larman, C. A. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space.* — Mathematika, **19** (1972), 1–24.
8. L. A. Székely, *Erdős on Unit Distances and the Szemerédi-Trotter Theorems // Paul Erdős and His Mathematics*, II (Proc. Conf. Held in Budapest, Hungary, July 4–11, 1999), G. Halász, L. Lovász, M. Simonovits and V. T. Sós, Eds., Bolyai Soc. Math. Stud, **11**, Berlin: Springer; Budapest: János Bolyai Math. Soc. (2002), 649–666.
9. P. Erdős, R. L. Graham, P. Montgomery, B. L. Rothschild, J. Spencer, E. G. Straus, *Euclidean ramsey theorems.* I. — J. Comb. Theor., Series A, **14**, No. 3 (1973), 341–363.
10. P. Erdős, R. L. Graham, P. Montgomery, B. L. Rothschild, J. Spencer, E. G. Straus, *Euclidean ramsey theorems II*, In A. Hajnal, R. Rado and V. Sós, eds., Infinite and Finite Sets I, North Holland, Amsterdam (1975), 529–557.
11. P. Erdős, R. L. Graham, P. Montgomery, B. L. Rothschild, J. Spencer, E. G. Straus, *Euclidean ramsey theorems III.* — In: A. Hajnal, R. Rado and V. Sós, eds., Infinite and Finite Sets II, North Holland, Amsterdam (1975), 559–583.
12. R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey theory*, — 2nd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., New York, John Wiley & Sons, Inc., 1990, xii+196 pp.
13. P. Frankl, V. Rödl, *A partition property of simplices in Euclidean space.* — J. Amer. Math. Soc., **3** , No. 1 (1990), 1–7.
14. I. Kříž, *Permutation groups in euclidean ramsey theory.* — Proceedings of the American Math. Soc., **112**, No. 3 (1991), 899–907.
15. K. Cantwell, *All regular polytopes are Ramsey.* — J. Combin. Theory, Ser. A, **114** (2007), 555—562.
16. I. Kříž, *All trapezoids are Ramsey.* — Discr. Math., **108** (1992), 59–62.
17. А. А. Сагдеев, *О теореме Франкла–Рэдла.* — Изв. РАН, Сер. матем., **82**, No. 6 (2018), 125–154.
18. А. А. Сагдеев, *Улучшенная теорема Франкла-Рёдля и некоторые ее геометрические следствия.* — Проблемы передачи информации, **54**, No. 2 (2018), 45–72.
19. А. А. Сагдеев, *Экспоненциально рамсеевские множества.* — Проблемы передачи информации, принята к публикации.
20. Р. И. Просанов, А. М. Райгородский, А. А. Сагдеев, *Улучшения теоремы Франкла-Рёдля и геометрические следствия.* — Доклады РАН, **475**, No. 2 (2017), 137–139.
21. Р. И. Просанов, *Верхние оценки хроматических чисел евклидовых пространств с запрещенными рамсеевскими множествами.* — Матем. заметки, **103**, No. 2 (2018), 248–257.
22. N. Alon, A. Kupavskii, *Two notions of unit distance graphs.* — J. Comb. Theory, Ser. A, **125** (2014), 1–17.

23. А. М. Райгородский, Д. В. Самиров, *Новые оценки в задаче о хроматическом числе пространства с запрещенными равнобедренными треугольниками.* — Доклады РАН, **456**, No. 3 (2014), 280–283.
24. А. М. Райгородский, Д. Д. Черкашин, *О хроматических числах пространств малой размерности.* — Доклады РАН, **472**, No. 1 (2017), 11–12.
25. D. Cherkashin, A. Kulikov, A. Raigorodskii, *On the chromatic numbers of small-dimensional Euclidean spaces.* — Discrete and Applied Math., **243** (2018), 125–131.
26. А. В. Бобу, А. Э. Куприянов, А. М. Райгородский, *О максимальном числе ребер однородного гиперграфа с одним запрещенным пересечением.* — Доклады РАН, **463**, No. 1 (2015), 11–13.
27. А. В. Бобу, А. Э. Куприянов, А. М. Райгородский, *Асимптотическое исследование задачи о максимальном числе ребер однородного гиперграфа с одним запрещенным пересечением.* — Матем. сборник, **207**, No. 5 (2016), 17–42.
28. А. М. Райгородский, А. А. Сагдеев, *Об одной оценке в экстремальной комбинаторике.* — Доклады РАН, **478**, No. 3 (2018), 271–273.
29. A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book.* Springer (2009).
30. A. M. Raigorodskii, *Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters.* Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer (2013), 429–460.
31. A. M. Raigorodskii, *Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters.* — Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics, AMS, Contemporary Mathematics, **625** (2014), 93–109.
32. A. M. Raigorodskii, *Combinatorial geometry and coding theory.* — Fundamenta Informatica, **145** (2016), 359–369.
33. N. D. Elkies, A. M. Odlyzko, J. A. Rush, On the packing densities of superballs and other bodies. — Invent. Math., **105** (1991), 613–639.
34. P. Erdős, C. A. Rogers, *Covering space with convex bodies.* — Acta Arithmetica, **7** (1962), 281–285.

Sagdeev A. A. On the chromatic numbers corresponding to exponentially Ramsey sets.

In this paper, nontrivial upper bounds on the chromatic numbers of the spaces $\mathbb{R}^n_p = (\mathbb{R}^n, l_p)$ with forbidden monochromatic sets are proved. In the case of forbidden rectangular parallelepiped or a regular simplex, explicit exponential lower bounds on the chromatic numbers are obtained. Exact values of the chromatic numbers of the spaces $\mathbb{R}^n_p$ with forbidden regular simplex in case $p = \infty$ are found.

Лаборатория Продвинутой Комбинаторики
и Сетевых Приложений МФТИ,
Институтский переулок, д. 9,
141701 г. Долгопрудный, Московская область
E-mail: xp1@protonmail.com

Поступило 12 ноября 2018 г.