Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 475, 2018 г.

А. В. Пастор

О КРИТИЧЕСКИХ ТРЕХСВЯЗНЫХ ГРАФАХ РОВНО С ДВУМЯ ВЕРШИНАМИ СТЕПЕНИ 3. ЧАСТЬ 2

§1. Введение

Под графом в данной работе понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. В основном мы будем использовать обозначения, принятые в работах [2, 6, 7]. Ниже мы приведем основные определения и обозначения, принятые в данной работе.

Множество вершин графа G традиционно обозначается $V(G)$, а множество ребер – $E(G)$. Количество вершин и ребер графа G мы будем обозначать через $v(G)$ и $e(G)$, соответственно. Степень вершины v в графе G обозначается через $d_G(v)$. Там, где это не может приводить к неоднозначности, мы вместо $d_G(v)$ будем писать просто $d(v)$. Наименьшая из степеней вершин графа G обозначается через $\delta(G)$, а наибольшая из степеней его вершин – через $\Delta(G)$.

Пусть $A \subset V(G)$. Через $G(A)$ обозначается индуцированный подграф графа G на множестве A. Для $X \subset V(G) \cup E(G)$ через $G - X$ мы будем обозначать граф, полученный из G удалением всех вершин и ребер множества X, а также всех ребер, инцидентных вершинам из X (в частности, при $A \subset V(G)$ мы получаем $G - A = G(V(G) \setminus A)$, а при $B \subset E(G)$ получаем, что $G - B$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G) \setminus B$). Для $x \in V(G) \cup E(G)$ положим $G - x = G - \{x\}$.

Окрестностью вершины $v \in V(G)$ мы будем называть множество $N_G(v)$ всех вершин, смежных с v. Аналогично, *окрестностью* множества $A \subset V(G)$ мы будем называть множество $N_G(A)$, состоящее из всех вершин графа G, которые смежны хотя бы с одной из вершин множества A и не лежат в A.

Мы будем называть две вершины графа G *связанными*, если между ними существует путь. Подмножество $S \subset V(G)$ мы будем называть

Ключевые слова: связность, трёхсвязные графы, критические трехсвязные графы.

Исследования выполнены при поддержке гранта правительства РФ (грант 14.Z50.31.0030).

связным, если любые две его вершины связаны. Под *компонентой связности* графа в данной работе подразумевается максимальное по включению связное подмножество множества его вершин. В дальнейшем, для удобства изложения, вместо “*компонента связности*” будем говорить просто “*компонента*”.

Замечание 1. Отметим, что приведенное выше определение компоненты связности отличается от общепринятого: как правило, в работах по теории графов компонентой связности называют максимальный по включению связный подграф данного графа.

1.1. Разделяющие множества и разрезы.

Определение 1. Пусть $S \subset V(G) \cup E(G)$.

1) Пусть $X \subset V(G)$. Множество S *разделяет* множество X, если не все вершины из $X \setminus S$ лежат в одной компоненте графа $G - S$.

2) Пусть $U, W \subset V(G)$. Множество S *отделяет* множество U от множества W, если $U \not\subset S$, $W \not\subset S$ и никакие две вершины $u \in U \setminus S$ и $w \in W \setminus S$ не лежат в одной компоненте графа $G - S$.

В случае, когда $U = \{u\}$, мы будем говорить, что S *отделяет* вершину u от множества W. Если же $U = \{u\}$ и $W = \{w\}$, то мы будем говорить, что S *отделяет* вершину u от вершины w.

Определение 2. *Вершинной связностью* графа G называется мощность наименьшего подмножества $S \subset V(G)$, такого, что граф $G - S$ несвязен или тривиален (т. е. состоит ровно из одной вершины). Вершинная связность графа G обозначается $\kappa(G)$. Граф G называется *k-связным*, если $\kappa(G) \geqslant k$.

Пусть $\kappa(G) = k$, $V(G) = V$ и $E(G) = E$. Введем следующие обозначения.

$$\mathfrak{M}_i(G) = \{S \mid S \subset V \cup E, |S| = k, |S \cap E| = i \text{ и граф } G - S \text{ несвязен}\},$$

$$\mathfrak{M}(G) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{M}_i(G) \text{ и } \mathfrak{M}^+(G) = \bigcup_{i=0}^{k} \mathfrak{M}_i(G).$$

Определение 3. Множество $S \in \mathfrak{M}_0(G)$ мы будем называть *k-разделяющим множеством*, а множество $T \in \mathfrak{M}(G)$ – *разрезом* графа G. Для множества всех k-разделяющих множеств графа G мы наряду с $\mathfrak{M}_0(G)$ будем также использовать обозначение $\mathfrak{R}_k(G)$.

Замечание 2. Легко видеть (см. например [4, замечание 1]), что для любого разреза S графа G граф $G - S$ имеет ровно две компоненты, причем концы любого ребра $e \in S$ принадлежат разным компонентам. Кроме того, никакая вершина $v \in S$ не может быть инцидентна никакому ребру $e \in S$.

Определение 4. Множество $S \in \mathfrak{M}^+(G)$ можно *дополнить* ребром xy, если $x \in S$ и множество $(S \setminus \{x\}) \cup \{xy\}$ является разрезом.

Будем говорить, что множество $S \in \mathfrak{M}^+(G)$ *содержится* в разрезе $M \in \mathfrak{M}(G)$, если M можно получить из S последовательно дополняя его одним или несколькими ребрами.

Множество $S \in \mathfrak{M}^+(G)$ мы будем называть *максимальным*, если его нельзя дополнить никаким ребром. Множество всех максимальных элементов $\mathfrak{M}^+(G)$ мы будем обозначать $\mathfrak{M}^*(G)$.

Лемма 1 (см. [6, лемма 5])**.** *Пусть $x \in M \in \mathfrak{M}^+(G)$, $xy \in E(G)$ и H – компонента графа $G - M$, содержащая y. Тогда множество M можно дополнить ребром xy, если и только если y – единственная вершина компоненты H, смежная с x.*

Лемма 2 (см. [6, следствие 8])**.** *Два максимальных разреза могут иметь не более одного общего ребра.*

Определение 5. Пусть $M \in \mathfrak{M}^+(G)$. Тогда множество всех входящих в M вершин мы будем обозначать через $V_0(M)$, а множество всех вершин, входящих в M либо инцидентных ребрам из M – через $V(M)$.

Замечание 3. В частности, для $R \in \mathfrak{M}_0(G)$ имеем $V(R) = V_0(R) = R$.

1.2. Части разбиения. Понятие части разбиения k-связного графа набором его k-разделяющих множеств было введено в работе [1]. В работах [4, 7] были даны некоторые обобщения этого понятия.

1.2.1. *Разбиение графа одним множеством.*

Определение 6. Пусть $S \in \mathfrak{M}^+(G)$ и $U_1, \dots, U_m$ – компоненты графа $G - S$. Назовем множества $H_i = U_i \cup V_0(S)$ *частями разбиения* графа G множеством S. Мы будем использовать обозначение $\mathrm{Part}_G(S) = \{H_1, \dots, H_m\}$. Элементы множества $\mathrm{Part}_G(S)$ мы также будем называть *частями S-разбиения* графа G.

Границей части H_i мы будем называть множество $\mathrm{Bound}(H_i) = H_i \cap V(S)$, *внутренностью* части H_i – множество $\mathrm{Int}(H_i) = H_i \setminus V(S)$ и *окрестностью* части H_i – множество $\mathrm{Nb}(H_i) = H_i \cup V(S)$.

Замечание 4. 1) Если множество S является разрезом, то, как уже отмечалось в замечании 2, граф $G - S$ имеет ровно две компоненты. Следовательно, частей S-разбиения также будет две. Очевидно, что граница любой из этих частей будет содержать все вершины разреза S и ровно по одному концу каждого из ребер S. Тем не менее, граница части может содержать менее k вершин, поскольку ребра S могут иметь общие концы.

2) Если $S \in \mathfrak{M}_0(G)$, то границы всех частей S-разбиения совпадают с множеством S. В этом случае каждая часть S-разбиения совпадает со своей окрестностью, а ее внутренностью является соответствующая компонента связности графа $G - S$.

Определение 7. Пусть $S \in \mathfrak{M}(G)$ и $\mathrm{Part}_G(S) = \{H_1, H_2\}$.

1) Разрез S называется *невырожденным*, если $\mathrm{Int}(H_1) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Int}(H_2) \neq \varnothing$ и *вырожденным* в противном случае.

2) Разрез $S \in \mathfrak{M}(G)$ называется *тривиальным*, если одна из компонент графа $G - S$ состоит из единственной вершины и *нетривиальным* в противном случае.

Замечание 5. Легко видеть, что ребра нетривиального разреза не могут иметь общих концов. Следовательно, в этом случае обе границы разреза состоят ровно из k вершин.

Следующая лемма включает в себя ряд утверждений о разрезах трехсвязного графа, которые были доказаны в работе [6, лемма 6 и следствие 10]. Отметим, что аналогичные утверждения верны и для k-связных графов при всех k. Однако в данной работе мы будем использовать только случай $k = 3$.

Лемма 3. *Пусть $\kappa(G) = 3$, $S \in \mathfrak{M}(G)$ – нетривиальный разрез, $\mathrm{Part}_G(S) = \{H_1, H_2\}$, $\mathrm{Bound}(H_i) = T_i$ при $i \in \{1, 2\}$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если множество $R \subset V(S)$, отличное от T_1, T_2, содержит все вершины разреза S и ровно по одному концу каждого из ребер S, то $R \in \mathfrak{M}_0(G)$, причем множество R делит граф G ровно на две части, одна из которых содержит H_1, а другая – H_2.*

2) *Если $\mathrm{Int}(H_i) \neq \varnothing$, то $T_i \in \mathfrak{M}_0(G)$, причем $\mathrm{Nb}(H_{3-i}) \in \mathrm{Part}(T_i)$, а объединение остальных частей $\mathrm{Part}(T_i)$ совпадает с H_i. В частности, если разрез S невырожден, то обе его границы являются 3-разделяющими множествами.*

3) *Любое* 3*-разделяющее множество, содержащееся в* $V(S)$*, содержит все вершины и ровно по одному концу каждого из ребер разреза* S.

Замечание 6. Тем самым, трехвершинное множество R, содержащее все вершины разреза S и ровно по одному концу каждого ребра из S может быть либо 3-разделяющим множеством, либо границей пустой части $\mathrm{Part}(S)$ и, более того, все 3-разделяющие множества, содержащиеся в $V(S)$ имеют такой вид. Очевидно, что любое из полученных разделяющих множеств можно дополнить одним или несколькими ребрами до разреза S. То есть, согласно терминологии из определения 4, любое из этих множеств содержится в разрезе S.

Определение 8. Пусть S – разрез в k-связном графе G. Назовем *границами* разреза S границы частей из $\mathrm{Part}(S)$. *Внутренними множествами* разреза S назовем k-разделяющие множества, содержащиеся в разрезе S, но не являющиеся его границами. Множество всех внутренних множеств разреза S мы будем обозначать через $\mathfrak{R}(S)$.

Легко видеть, что граница пустой части S-разбиения не является разделяющим множеством. Тем не менее, мы в дальнейшем будем говорить, что такие множества также *содержатся в* S.

1.2.2. *Разбиение графа несколькими множествами.*

Определение 9. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M}^+(G)$. Назовем *квазичастями* разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ множества вида

$$H = \bigcap_{S\in\mathfrak{S}} H_S, \quad \text{где} \quad H_S \in \mathrm{Part}_G(S). \tag{1}$$

Частями разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ мы назовем все максимальные по включению квазичасти. Множество всех частей разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ будем обозначать через $\mathrm{Part}_G(\mathfrak{S})$. Элементы множества $\mathrm{Part}_G(\mathfrak{S})$ мы также будем называть *частями* $\mathfrak{S}$*-разбиения* графа G. В случае, когда ясно, какой граф разбивается, мы вместо $\mathrm{Part}_G(\mathfrak{S})$ и $\mathrm{Part}_G(S)$ будем писать $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ и $\mathrm{Part}(S)$, соответственно.

Определение 10. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M}^+(G)$ и $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. *Границей* части H назовем множество

$$\mathrm{Bound}(H) = H \cap \Bigg(\bigcup_{S\in\mathfrak{S}} V(S)\Bigg).$$

Внутренностью части H назовем множество $\mathrm{Int}(H) = H \setminus \mathrm{Bound}(H)$.

Вершины, принадлежащие границе части, мы будем называть *граничными*, а вершины, принадлежащие внутренности – *внутренними*.

Определение 11. Назовем часть A *пустой*, если $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$, и *непустой* в противном случае. Назовем часть A *малой*, если $|A| < k$, и *нормальной*, если $|A| \geqslant k$.

Замечание 7. Легко видеть (см. также [4, замечание 3]), что пересечение двух различных частей $H_1, H_2 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ является подмножеством множества $V_0(S)$ для некоторого $S \in \mathfrak{S}$.

Лемма 4. *Граница* $\mathrm{Bound}(H)$ *части* $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *состоит из всех вершин части* H, *имеющих смежные вершины вне* H. *В случае, если* $\mathrm{Int}(H) \neq \varnothing$, $\mathrm{Bound}(H)$ *отделяет* $\mathrm{Int}(H)$ *от* $V(G) \setminus H$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{Bound}(H)$. Тогда существует множество $S \in \mathfrak{S}$, такое, что $x \in H \cap V(S)$. Рассмотрим часть $H_S \in \mathrm{Part}(S)$, такую, что $H \subset H_S$. Тогда $x \in \mathrm{Bound}(H_S)$. Докажем, что вершина x смежна с вершиной, не лежащей в H_S (а, следовательно, и в H). Действительно, если вершина x инцидентна ребру $xy \in S$, то $y \notin H_S$ и требуемая вершина найдена. Если же $x \in V_0(S)$, то рассмотрим множество $S' = S \setminus \{x\}$. Поскольку $|S'| < k$, множество S' не может отделять H_S от $V(G) \setminus H_S$. Но в графе $G - S'$ вершина x – единственная из множества $H_S \setminus S'$ может быть смежна с вершиной не из H_S.

Обратно, если $x \in \mathrm{Int}(H)$ и y смежна с x, то для любого $S \in \mathfrak{S}$ имеем $x \in \mathrm{Int}(H_S)$ и, следовательно, $y \in H_S$. Таким образом, $y \in H$.

Наконец, если $\mathrm{Int}(H) \neq \varnothing$, то по доказанному выше ни одна вершина из $\mathrm{Int}(H)$ не может быть смежна ни с одной вершиной из $V(G) \setminus H$. Это и означает, что $\mathrm{Bound}(H)$ отделяет $\mathrm{Int}(H)$ от $V(G) \setminus H$. □

Замечание 8. Утверждения из леммы 4 для случая, когда $\mathfrak{S}$ состоит только из k-разделяющих множеств, были доказаны в [2, теорема 2 и следствие 2]. Аналогичное, но совсем иначе сформулированное утверждение для случая, когда $\mathfrak{S}$ состоит из разрезов, было доказано в [4, лемма 2].

1.3. Зависимые и независимые множества. Понятие независимых k-разделяющих множеств впервые было введено в работах [5, 12]: k-разделяющие множества S и T называются *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В работе [4] было дано определение независимых разрезов, а в работе [7] это определение было применено к произвольным множествам из $\mathfrak{M}^+(G)$.

Определение 12. Множества $S, T \in \mathfrak{M}^+(G)$ называются *независимыми*, если можно так задать нумерацию частей S- и T-разбиения $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, что

$$A_1 \supset \bigcup_{i=2}^{m} B_i \quad \text{и} \quad B_1 \supset \bigcup_{i=2}^{n} A_i.$$

В противном случае множества S и T называются *зависимыми*.

Замечание 9. 1) В случае, если $S, T \in \mathfrak{M}_0(G)$, данное определение полностью согласуется с классическим: легко видеть, что множества S и T будут независимы тогда и только тогда, когда ни одно из них не разделяет другое.

2) Несколько сложнее дело обстоит с разрезами. Разрез S, независимый с разрезом T, может разделять множество $V(T)$. Но при этом S не будет разделять как минимум одну из границ разреза T, а именно в терминологии определения 12 разрез S не будет разделять границу части B_2.

Определение 13. Множество $T \in \mathfrak{M}_0(G)$ называется *одиночным*, если оно независимо со всеми остальными множествами из $\mathfrak{M}_0(G)$.

Разбиение графа парой зависимых k-разделяющих множеств описывается следующей леммой.

Лемма 5 (см. [2, лемма 7])**.** *Пусть G – k-связный граф, а множества $S, T \in \mathfrak{M}_0(G)$ зависимы. Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{F_1, \ldots, F_n\}$, а $\mathrm{Part}(T) = \{H_1, \ldots, H_m\}$. Для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m\}$ введем обозначения*

$$P = S \cap T, \quad S_j = S \cap \mathrm{Int}(H_j), \quad T_i = T \cap \mathrm{Int}(F_i), \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j.$$

Тогда

$$\mathrm{Part}(\{S, T\}) = \{G_{i,j}\}_{i \in \{1,\ldots,n\},\, j \in \{1,\ldots,m\}}, \quad \mathrm{Bound}(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j,$$

причем $T_i \neq \varnothing$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $S_j \neq \varnothing$ для всех $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Замечание 10. Из леммы 5 легко следует (см. также [6, следствие 2]), что если $\kappa(G) = 3$ и множества $S, T \in \mathfrak{M}_0(G)$ зависимы, то в $\mathrm{Part}(\{S, T\})$ есть хотя бы одна малая часть. Любая малая часть в $\mathrm{Part}(\{S, T\})$, состоит из двух смежных вершин, которые можно обозначить u и v

так, что $u \in T$, $v \in S$ и каждое из множеств S и T можно дополнить ребром uv.

1.4. Ромашки в трехсвязном графе. Пусть G – трехсвязный граф и $m \geqslant 4$. Рассмотрим набор $F = (p; q_1, \ldots, q_m)$ вершин трехсвязного графа G ($m \geqslant 4$). Вершины $q_1, \ldots, q_m$ считаются *циклически упорядоченными*, то есть их номера будем считать вычетами по модулю m. Также будем считать, что циклическая перестановка множества $q_1, \ldots, q_m$ и замена циклического порядка на противоположный не меняет набора F. Пусть $Q_{i,j} = \{q_i, q_j, p\}$ и $\mathfrak{R}(F)$ – набор, состоящий из множеств $Q_{i,j}$ для всех пар различных несоседних в циклическом порядке индексов i и j.

Определение 14. Набор $F = (p; q_1, \ldots, q_m)$ называется *ромашкой*, если существует такой набор $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(F)$, что разбиение $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ состоит из m частей $G_{1,2}$, $G_{2,3}$, $\ldots$, $G_{m,1}$, причем $\mathrm{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$. Множество $V(F) = \{p, q_1, \ldots, q_m\}$ называется *множеством вершин* ромашки F. Вершина p называется *центром*, а вершины $q_1, \ldots, q_m$ – *лепестками* ромашки F.

Будем говорить, что набор $\mathfrak{S}$ *порождает* ромашку F.

Введем обозначение $G_{i,j} = \bigcup\limits_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$ (индекс x пробегает значения от i до $j-1$ в циклическом порядке). Положим также $G_{x,x} = \varnothing$.

В работе [2] доказано (см. теорему 6 и следствия из нее), что множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$, а при $j \notin \{i, i+1, i-1\}$, более того, $\mathrm{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

Определение 15. Множества $Q_{1,2}, Q_{2,3}, \ldots, Q_{m,1}$ называются *границами*, а остальные множества $Q_{i,j}$ – *внутренними множествами* ромашки F.

Разбиением графа G ромашкой F называется множество $\mathrm{Part}(F) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \ldots, G_{m,1}\}$.

Легко видеть, что $\mathrm{Part}(F) = \mathrm{Part}(\mathfrak{R}(F))$. При этом ни одна из частей $\mathrm{Part}(F)$ не может быть малой. Также очевидно (см. [6, замечание 2]), что если часть $G_{i,i+1}$ пуста, то вершины q_i и q_{i+1} смежны.

Заметим также, что для любого i выполняется $G_{i+1,i} \in \mathrm{Part}(Q_{i,i+1})$, а $G_{i,i+1}$ есть объединение всех отличных от $G_{i+1,i}$ частей $\mathrm{Part}(Q_{i,i+1})$.

Замечание 11. Как уже отмечалось выше, ромашка сохраняется при смене нумерации ее лепестков $q_1, \dots, q_m$, которая сохраняет их циклический порядок, либо заменяет его не противоположный. То есть фактически ромашка не изменяется при действии диэдральной группы D_n на множество ее лепестков. Отметим, что при таком преобразовании изменятся также и множества, обозначаемые $Q_{i,j}$ и $G_{i,j}$. Однако эти множества также будут переставляться циклически с возможной сменой ориентации. Само же множество $\mathrm{Part}(F)$ при этом не изменится, поменяются только номера его элементов.

Далее мы будем считать, что для каждой ромашки задана некоторая фиксированная нумерация ее лепестков и обудем использовать именно эту нумерацию.

Определение 16. Будем говорить, что разрез M *содержится* в ромашке F, если $V(M) \subset V(F)$, и наоборот ромашка F содержится в разрезе M, если $V(F) \subset V(M)$.

Назовем ромашку F *невырожденной*, если она не содержится ни в каком разрезе $M \in \mathfrak{M}_3(G)$, и *вырожденной* в противном случае.

Лемма 6 (см. [6, лемма 16]). *Пусть максимальный нетривиальный разрез M и $S \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(M)$ таковы, что S разделяет $V(M)$. Тогда $|\mathrm{Part}(S)| = 2$ и выполняется одно из следующих двух утверждений.*

1° *Разрез M содержится в ромашке, порожденной набором $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}(M) \cup \{S, T_1, T_2\}$, где T_1 и T_2 – границы разреза S.*

2° *Множество S содержится в окрестности одной из частей $H_1 \in \mathrm{Part}(M)$. Более того, существует такое ребро $x_1x_2 \in M$, что $x_1 \in \mathrm{Bound}(H_1)$, S отделяет x_1 от остальных вершин множества $V(M) \setminus S$ и при этом $S \setminus H_1 = \{x_2\}$.*

1.4.1. *Максимальные ромашки.*

Определение 17. Будем говорить, что ромашка F *содержит* ромашку F', если у них общий центр и $V(F') \subset V(F)$. Назовем ромашку F *максимальной*, если она не содержится ни в какой другой ромашке.

Лемма 7 ((см. [6, лемма 14])). *Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ – максимальная ромашка и $\{q_i, p, q_j x\} \in \mathfrak{M}(G)$. Тогда выполняется одно из следующих двух утверждений.*

1° *Вершина x – один из соседних с q_j лепестков F, причем $\{q_j, p, x\}$ – пустая часть $\mathrm{Part}(F)$.*

2° *Выполняются соотношения $\{i, j\} = \{k, k+1\}$ и $x \in \mathrm{Int}(G_{k,k+1})$, причем, если $|\mathrm{Part}(Q_{k,k+1})| = 2$, то вершины q_k и q_{k+1} смежны.*

Следствие 1. *Пусть* $F = (p; q_1, \ldots, q_m)$ *– максимальная ромашка и ее лепесток* q_j *имеет степень* 3. *Тогда, как минимум, одна из частей* $G_{j-1,j}$ *и* $G_{j,j+1}$ *пуста.*

Доказательство. Пусть q_i – произвольный лепесток, не соседний с q_j. Тогда $\mathrm{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$ и обе эти части непусты. Поскольку $d(q_j) = 3$, вершина q_j смежна ровно с одной внутренней вершиной одной из этих частей. Тогда по лемме 1 множество $Q_{i,j}$ можно дополнить до разреза $\{q_i, p, q_j x\}$. Так как лепестки q_i и q_j – несоседние, утверждение 2° леммы 7 выполнено быть не может. Следовательно, выполнено утверждение 1°, откуда $\{q_j, p, x\}$ – пустая часть $\mathrm{Part}(F)$. □

1.4.2. *Особые ромашки.*

Определение 18. Назовем ромашку $F = (p; q_1, \ldots, q_m)$ *особой*, если $d(p) = 3$ и неособой в противном случае. *Окрестностью* центра особой ромашки назовем множество $T(p)$, состоящее из вершин, смежных с p.

Лемма 8 (см. [6, лемма 20])**.** *Пусть* F *– невырожденная особая ромашка. Тогда внутренность любой непустой части* $\mathrm{Part}(F)$ *содержит ровно одну вершину множества* $T(p)$*, а ее граница не пересекается с* $T(p)$.

В [6, замечание 16] была дана подробная классификация всех невырожденных особых ромашек.

1.5. Критические k-связные графы.

Определение 19. k-связный граф G с $v(G) \geqslant k + 2$ называется *критическим*, если для любой вершины $x \in V(G)$ граф $G - x$ не является k-связным.

Известно (см. [10]), что любой критический трехсвязный граф содержит хотя бы две вершины степени 3. Нашей целью является описание структуры всех критических трехсвязных графов, содержащих ровно две вершины степени 3. В первой части работы (см. [8]) мы сделали это для случая, когда вершины степени 3 смежны. Сейчас мы будем исследовать общий случай.

Для начала напомним несколько утверждений, доказанных в работе [8].

Лемма 9 (см. [8, лемма 3])**.** *Пусть* G *– критический трехсвязный граф, содержащий ровно две вершины степени* 3, $R \in \mathfrak{M}^+(G)$ *и* $H \in \mathrm{Part}(R)$. *Тогда часть* H *содержит вершину степени* 3.

Следствие 2 (см. [8, следствие 2]). *Любое 3-разделяющее множество графа G делит его ровно на две части.*

§2. Структура критического трехсвязного графа ровно с двумя вершинами степени 3

Всюду начиная с этого места через G будет обозначаться критический трехсвязный граф, содержащий ровно две вершины степени 3. Вершины степени 3 графа G мы обозначим через u и v.

2.1. Ромашки в графе G. В этом разделе мы исследуем вопрос о том, какие ромашки могут быть в графе G.

Лемма 10. *Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ – максимальная ромашка в графе G. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(F)$ – непустая часть. Тогда в $G_{i,i+1}$ есть отличная от p вершина степени 3.*

2) *Пусть $G_{i,i+1}$ и $G_{j,j+1}$ – две непустые части $\mathrm{Part}(F)$; $x \in G_{i,i+1}$ и $y \in G_{j,j+1}$ – отличные от p вершины степени 3. Тогда $x \neq y$.*

Доказательство. 1) Если $d(p) > 3$, требуемая вершина существует по лемме 9. Пусть $d(p) = 3$. Тогда по лемме 8 вершина p смежна ровно с одной внутренней вершиной $t \in \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$. Следовательно, множество $Q_{i,i+1}$ можно дополнить ребром pt и $G_{i,i+1} \setminus \{p\}$ будет частью разбиения графа G получившимся разрезом. Тогда по лемме 9 в множестве $G_{i,i+1} \setminus \{p\}$ есть вершина степени 3.

2) Предположим противное, тогда части $G_{i,i+1}$ и $G_{j,j+1}$ – соседние и x – их общий лепесток. Но в этом случае по следствию 1 одна из частей $G_{i,i+1}$ и $G_{j,j+1}$ пуста, что противоречит условию. □

Лемма 11. *В графе G нет невырожденных особых ромашек.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ – максимальная невырожденная особая ромашка и $T(p) = \{t_1, t_2, t_3\}$. Рассмотрим произвольную вершину $t_i \in T(p)$. Поскольку по лемме 8 вершина t_i не может принадлежать границе непустой части $\mathrm{Part}(F)$, возможны следующие два случая: t_i может быть либо внутренней вершиной непустой части $H_i \in \mathrm{Part}(F)$, либо лепестком, к которому примыкают две пустые части. Рассмотрим эти случаи более подробно.

1. Пусть $t_i \in \mathrm{Int}(H_i)$, где $H_i \in \mathrm{Part}(F)$. Тогда по лемме 10 в H_i есть отличная от p вершина степени 3. Обозначим ее через s_i. Отметим, что по лемме 8 в каждой непустой части $\mathrm{Part}(F)$ лежит ровно одна вершина множества $T(p)$. В каждой такой части мы выбираем соответствующую ей вершину s_i. По лемме 10 эти вершины будут различны.

2. Пусть t_i – лепесток, к которому примыкают две пустые части. Тогда $d(t_i) = 3$ и мы положим $s_i = t_i$.

Таким образом, мы получили четыре различные вершины степени 3 (p, s_1, s_2, s_3), что противоречит условию. □

Лемма 12. *Любая ромашка F в графе G содержит ровно четыре лепестка. При этом в* $\mathrm{Part}(F)$ *ровно две непустые части и эти части не могут быть соседними.*

Доказательство. Заметим сначала, что мы можем рассматривать только максимальные ромашки F. Действительно, любая ромашка содержится в какой-либо максимальной и если мы докажем, что максимальная ромашка не может содержать больше четырех лепестков, из этого будет следовать, что все ромашки графа G максимальны.

Итак, пусть ромашка $F = (p; q_1, \ldots, q_m)$ максимальна. Рассмотрим следующие случаи: в $\mathrm{Part}(F)$ может быть ноль, одна, или хотя бы две непустые части.

1. Пусть все части $\mathrm{Part}(F)$ пусты. Тогда все лепестки ромашки F имеют степень 3. Но у F хотя бы четыре лепестка. Противоречие.

2. Пусть в $\mathrm{Part}(F)$ ровно одна непустая часть (не умаляя общности будем считать, что это часть $G_{1,2}$). Тогда в ней есть вершина степени 3. Но лепестки q_3 и q_4 также имеют степень 3. Противоречие.

3. Пусть в $\mathrm{Part}(F)$ хотя бы две непустые части. В каждой из них по лемме 10 есть отличная от p вершина степени 3, причем эти вершины различны. Тогда непустых частей ровно две и других вершин степени 3 (кроме тех, что выбраны в непустых частях $\mathrm{Part}(F)$) в графе G нет. Следовательно, в $\mathrm{Part}(F)$ не может быть соседних пустых частей. Тогда $m = 4$ и непустые части $\mathrm{Part}(F)$ также не могут быть соседними. □

Рассмотрим теперь ромашку $F(p; q_1, q_2, q_3, q_4)$, удовлетворяющую условиям леммы 12. Нумерацию ее лепестков можно выбрать так, чтобы части $G_{1,2}$ и $G_{3,4}$ были пустыми, а части $G_{2,3}$ и $G_{4,1}$ – непустыми. Заметим, что тогда множество $M = \{q_1q_2, p, q_4q_3\}$ является разрезом, причем $V(M) = V(F)$ и $\mathrm{Part}(M)$ совпадает с множеством непустых частей $\mathrm{Part}(F)$. Отметим, что разрез M может быть как максимальным (и тогда ромашка F невырождена), так и не максимальным (тогда его можно дополнить до разреза из $\mathfrak{M}_3(G)$ и ромашка F – вырождена).

Итак, любая ромашка графа G содержится в некотором максимальном разрезе. Поэтому далее мы не будем рассматривать ромашки и займемся изучением максимальных разрезов графа G.

2.2. Максимальные разрезы и 3-разделяющие множества в графе G. В этом разделе мы изучим взаимное расположение множеств из $\mathfrak{M}^*(G)$. Напомним, что в $\mathfrak{M}^*(G)$ входят максимальные разрезы графа G и те его 3-разделяющие множества, которые нельзя дополнить ни одним ребром.

Лемма 13. *Пусть $R \in \mathfrak{M}^*(G)$. Тогда $\{u, v\} \cap V_0(R) = \varnothing$ и вершины u и v лежат в разных частях R-разбиения графа G.*

Доказательство. Предположим, что $u \in V_0(R)$ (случай $v \in V_0(R)$ аналогичен). Поскольку $R \in \mathfrak{M}^*(G)$, множество R нельзя дополнить никаким ребром. Следовательно, вершина u должна быть смежна хотя бы с двумя вершинами каждой из компонент графа $G - R$. Но это противоречит тому, что $d(u) = 3$. Полученное противоречие доказывает, что $\{u, v\} \cap V_0(R) = \varnothing$. Тогда каждая из вершин u и v лежит ровно в одной части R-разбиения графа G, откуда по лемме 9 они лежат в разных частях. □

Лемма 14. *В $\mathfrak{M}^*(G)$ есть ровно два тривиальных разреза: один из них состоит из всех ребер, инцидентных вершине u, а другой – из всех ребер, инцидентных v. Все остальные разрезы из $\mathfrak{M}^*(G)$ невырождены.*

Доказательство. Очевидно, что описанные в условии множества ребер действительно являются максимальными тривиальными разрезами. Докажем, что любой вырожденный (а, следовательно, и любой тривиальный) разрез из $\mathfrak{M}^*(G)$ совпадает с одним из двух описанных выше разрезов.

Пусть $R \in \mathfrak{M}^*(G)$ – вырожденный разрез, $\mathrm{Part}(R) = \{H_1, H_2\}$ и $\mathrm{Int}(H_1) = \varnothing$. Тогда одной из компонент графа $G - R$ будет множество $F_1 = H_1 \setminus V_0(R)$. Очевидно, что все вершины F_1 имеют степень 3. С другой стороны, по лемме 13 компонента F_1 содержит ровно одну из вершин u и v (пусть, не умаляя общности, u). Тогда $F_1 = \{u\}$ и разрез R состоит из всех ребер, инцидентных u. □

Лемма 15. *Пусть $S, T \in \mathfrak{M}^*(G)$. Тогда S и T независимы.*

Доказательство. В случае, если S или T является тривиальным разрезом, утверждение леммы очевидно. Поэтому согласно лемме 14 достаточно рассмотреть случай, когда каждое из множеств S и T является либо 3-разделяющим множеством, либо невырожденным разрезом. Это означает, что все части разбиения из $\mathrm{Part}(S)$ и $\mathrm{Part}(T)$ непусты. Кроме того, если S или T разрез, то обе его границы являются разделяющими множествами.

Введем обозначения $\mathrm{Part}(S) = \{F_1, F_2\}$, $\mathrm{Part}(T) = \{H_1, H_2\}$, $S_i = \mathrm{Bound}(F_i)$ и $T_i = \mathrm{Bound}(H_i)$, где $i \in \{1, 2\}$.

Предположим, что множества S и T зависимы. Далее, мы рассмотрим два случая: **1.** $S, T \in \mathfrak{M}_0(G)$; **2.** хотя бы одно из множеств S и T является разрезом.

1. Пусть $S, T \in \mathfrak{M}_0(G)$. Докажем, что тогда каждое из множеств S и T можно дополнить некоторым ребром. Тем самым мы получим противоречие с максимальностью S и T и докажем невозможность данного случая.

В случае $S \cap T = \varnothing$ это непосредственно следует из замечания 10. Если же $S \cap T \neq \varnothing$, эти множества порождают ромашку, в которой по лемме 12 есть пустые части. Но тогда по лемме 1 каждое из множеств S и T можно дополнить ребром, соединяющим лепестки пустой части.

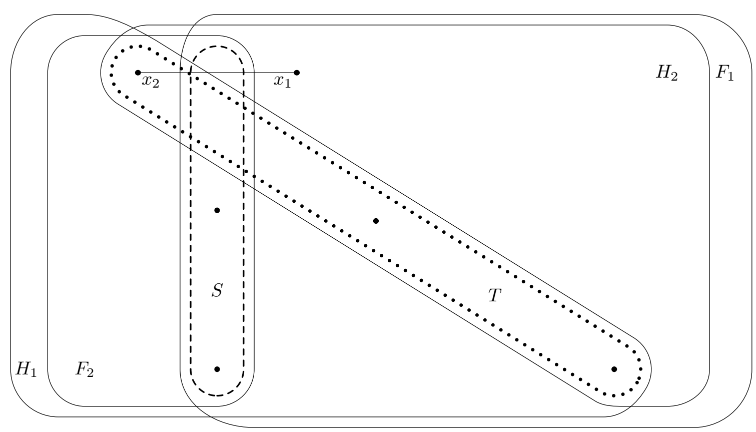

Рис. 1. Разбиение графа G двумя максимальными множествами.

2. Пусть, не умаляя общности, $S \in \mathfrak{M}(G)$. Докажем сначала, что внутренность одной из частей F_1 и F_2 не пересекается с $V(T)$. Действительно, пусть $x \in \mathrm{Int}(F_1) \cap V(T)$ и $y \in \mathrm{Int}(F_2) \cap V(T)$. Поскольку вершины x и y, очевидно, несмежны, они не могут быть концами одного ребра, входящего в T. Тогда существует такая вершина z, что множество $T' = \{x, y, z\}$ либо совпадает с T, либо содержится в нем (т. е. является либо внутренним множеством, либо границей разреза T). В любом из этих случаев, T' – 3-разделяющее множество, зависимое с S_1 и S_2. Тогда по лемме 6 набор $\mathfrak{R}(S) \cup \{S_1, S_2, T'\}$ порождает ромашку, содержащую хотя бы 5 лепестков, что противоречит лемме 12.

Итак, пусть не умаляя общности $\mathrm{Int}(F_2) \cap V(T) = \varnothing$. Заметим, что тогда T не разделяет F_2. Действительно, $\mathrm{Int}(F_2)$ является компонентой связности графа $G - S_2$, которая останется связной после удаления T, а любая вершина из $S_2 \setminus T$ будет смежна хотя бы с одной вершиной этой компоненты. Следовательно, F_2 содержится в одной из частей $\mathrm{Part}(T)$. Пусть не умаляя общности $F_2 \subset H_1$. Тогда $H_2 \subset \mathrm{Nb}(F_1)$. Но, поскольку мы предположили что S и T зависимы, $H_2 \not\subset F_1$. То есть существует такая вершина $x_2 \in \mathrm{Nb}(F_1) \setminus F_1 = S_2 \setminus S_1$, что $x_2 \in H_2$. Поскольку $x_2 \in S_2 \setminus S_1$, существует такая вершина $x_1 \in S_1 \setminus S_2$, что $x_1x_2 \in S$ (см. рисунок 1). С другой стороны, $x_2 \in S_2 \subset F_2 \subset H_1$, откуда $x_2 \in H_1 \cap H_2 \subset V_0(T)$. Но тогда x_1 – единственная вершина, смежная с x_2, которая не лежит в F_2. Рассмотрим компоненту U_2 графа $G - T$, которая содержится в H_2. Заметим, что $U_2 \cap F_2 \subset U_2 \cap H_1 = \varnothing$. Следовательно, x_1 – единственная вершина, смежная с x_2, лежащая компоненте U_2. Тогда по лемме 1 множество T можно дополнить ребром x_1x_2, что противоречит его максимальности. $\square$

Теорема 1. *Пусть в $\mathfrak{M}^*(G)$ помимо двух тривиальных разрезов есть еще m множеств. Тогда можно ввести обозначения*

$$\mathfrak{M}^*(G) = \{S_0, S_1, \ldots, S_m, S_{m+1}\}$$

и

$$\mathrm{Part}(S_i) = \{L_i, R_i\} \quad \textit{при} \quad i \in \{0, 1, \ldots, m, m+1\}$$

так, чтобы S_0 был тривиальным разрезом, отделяющим вершину u, S_{m+1} – тривиальным разрезом, отделяющим v, и выполнялись следующие свойства:

$$\{u\} = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \ldots \subsetneq L_m \subsetneq L_{m+1} = V(G) \setminus \{v\}$$

и

$$V(G) \setminus \{u\} = R_0 \supsetneq R_1 \supsetneq R_2 \supsetneq \ldots \supsetneq R_m \supsetneq R_{m+1} = \{v\}.$$

Доказательство. Для каждого множества $S \in \mathfrak{M}^*(G)$ обозначим через $L(S)$ ту из частей S-разбиения, которая содержит вершину u (по лемме 13 такая часть ровно одна) и через $R(S)$ – ту из частей, что содержит v.

Пусть $S, T \in \mathfrak{M}^*(G)$ – различные множества. Заметим, что тогда $L(S) \neq L(T)$. Действительно, в противном случае S и T можно получить, дополнив границу части $L(S)$ всеми ребрами, не лежащими в этой части. А это можно сделать единственным способом. Аналогично, $R(S) \neq R(T)$.

Далее, поскольку S и T независимы, одна из частей T-разбиения должна либо содержать $L(S)$, либо содержаться в ней. Очевидно, что такой частью не может быть $R(T)$. Тогда мы имеем либо $L(S) \subsetneq L(T)$ и $R(S) \supsetneq R(T)$, либо наоборот $L(S) \supsetneq L(T)$ и $R(S) \subsetneq R(T)$.

Таким образом, мы можем упорядочить все множества из $\mathfrak{M}^*(G)$ по возрастанию $|L(S)|$ и обозначить их через $S_0, S_1, \ldots, S_m, S_{m+1}$ именно в таком порядке. Тогда все строгие включения из условия теоремы, очевидно, будут выполнены.

Рассмотрим, наконец, максимальный тривиальный разрез, отделяющий вершину u. Для него часть разбиения, содержащая вершину u, будет состоять из одной лишь этой вершины. То есть для данного разреза эта часть будет наименьшей. Следовательно, этот разрез будет именно S_0 и будут выполнены равенства $L_0 = \{u\}$ и $R_0 = V(G) \setminus \{u\}$. Случай максимального тривиального разреза, отделяющего v, рассматривается аналогично: это разрез S_{m+1} и для него выполнены равенства $L_{m+1} = V(G) \setminus \{v\}$ и $R_{m+1} = \{v\}$. □

Далее, мы будем всюду использовать обозначения, введенные в теореме 1. Также мы введем обозначения для границ разрезов и частей разбиения. А именно, пусть $P_i = \mathrm{Bound}(L_i)$ и $Q_i = \mathrm{Bound}(R_i)$ при $i \in \{0, 1, \ldots, m, m+1\}$. Очевидно, что тогда $P_0 = \{u\}$ и $Q_{m+1} = \{v\}$. Все остальные множества P_i и Q_j являются 3-разделяющими, но некоторые из этих множеств могут совпадать.

Замечание 12. Пусть $m = 0$. В этом случае единственными двумя 3-разделяющими множествами графа G являются окрестности вершин u и v. Поскольку G – критический трехсвязный граф, из этого следует, что $v(G) \leqslant 6$ и при этом вершины u и v смежны. Такие графы были описаны в первой части нашей работы (см. [8]). Из доказанного в [8] следует, что в этом случае граф G имеет вид, изображенный на рисунке 2.

Далее мы не будем рассматривать этот тривиальный случай и будем считать, что $m > 0$.

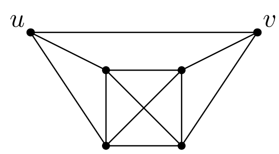

Рис. 2. Случай $m = 0$.

Лемма 16. *Пусть $i < k < j$. Тогда $S_i \cap S_j \subset S_k$ (т. е. любая вершина или ребро, общая для S_i и S_j, лежит и в S_k).*

Доказательство. Пусть x – вершина, общая для S_i и S_j. Тогда $x \in L_i \subset L_k$ и $x \in R_j \subset R_k$. Следовательно, $x \in L_k \cap R_k = V_0(S_k)$.

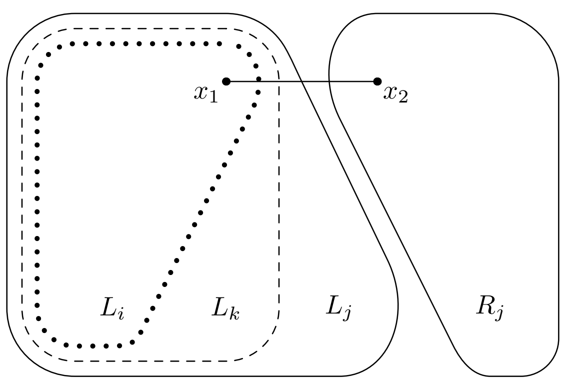

Рис. 3. Части L_i, L_k, L_j и R_j.

Далее, пусть x_1x_2 – общее для S_i и S_j ребро. Не умаляя общности будем считать, что $x_1 \in L_i$. Тогда $x_1 \in L_k$ и $x_1 \in L_j$. Поскольку $x_1x_2 \in S_j$, из $x_1 \in L_j$ следует, что $x_2 \in R_j$ и $x_2 \notin L_j$. Но тогда и $x_2 \notin L_k$ (см. рис. **??**). Рассуждая аналогично, из $x_2 \in R_j$ выведем, что $x_2 \in R_k$ и $x_1 \notin R_k$. Но такое возможно только если $x_1x_2 \in S_k$. □

2.2.1. *Соседние множества в* $\mathfrak{M}^*(G)$. Пусть $0 \leqslant i \leqslant m$. Введем обозначение $H_{i,i+1} = R_i \cap L_{i+1}$.

Лемма 17. *Пусть* $0 \leqslant i \leqslant m$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $H_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(\mathfrak{M}^*(G))$;
2) $\mathrm{Int}(H_{i,i+1}) = \varnothing$;
3) $H_{i,i+1} \subset P_{i+1} \cup Q_i$.

Доказательство. 1) Заметим сначала, что $H_{i,i+1}$ является квазичастью. Действительно, по теореме 1 имеем $R_j \supset R_i$ при $j < i$ и $L_{i+1} \subset L_j$ при $j > i+1$. Следовательно,

$$H_{i,i+1} = R_0 \cap \ldots \cap R_i \cap L_{i+1} \cap \ldots \cap L_{m+1},$$

что и является определением квазичасти.

Далее, рассмотрим квазичасть F, содержащую $H_{i,i+1}$. Нам нужно доказать, что $F = H_{i,i+1}$, тогда по определению $H_{i,i+1}$ будет частью $\mathfrak{M}^*(G)$-разбиения графа G. Пусть $F = \cap_{j=0}^{m+1} F_j$, где $\forall j\ F_j \in \mathrm{Part}(S_j)$. Докажем, что $F_j = R_j$ при $j \leqslant i$ (то, что $F_j = L_j$ при $j > i$, доказывается аналогично).

Пусть $j \leqslant i$. Рассмотрим вершину $x \in L_{i+1} \setminus L_i$. Такая вершина существует, поскольку $L_i \subsetneq L_{i+1}$ по теореме 1. Тогда $x \in R_i$, следовательно, $x \in H_{i,i+1} \subset F$. С другой стороны, поскольку $x \notin L_i$ и $L_j \subset L_i$, мы получаем, что $F_j \neq L_j$. Следовательно, $F_j = R_j$.

2,3) Очевидно, что $\mathrm{Int}(H_{i,i+1}) = \mathrm{Int}(R_i) \cap \mathrm{Int}(L_{i+1})$. Предположим, что это множество непусто и $x \in \mathrm{Int}(H_{i,i+1})$. Поскольку G – критический трехсвязный граф, вершина x принадлежит некоторому 3-разделяющему множеству T, которое можно дополнить до максимального множества S_j. Тогда, поскольку $V(S_j)$ содержит внутреннюю вершину части R_i, мы получаем, что $j > i$. С другой стороны, поскольку $V(S_j)$ содержит внутреннюю вершину части L_{i+1}, имеем $j < i$. Полученное противоречие доказывает пункт 2 леммы. Пункт 3 непосредственно следует из пункта 2 и того, что граничные вершины части $H_{i,i+1}$ являются граничными для хотя бы одной из частей R_i и L_{i+1}. □

Следствие 3. *Пусть* $0 \leqslant i \leqslant m$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $H_{i,i+1} = (P_{i+1} \cap R_i) \cup (Q_i \cap L_{i+1})$;
2) $x \in (P_{i+1} \cup Q_i) \setminus H_{i,i+1}$ *тогда и только тогда, когда существует инцидентное* x *ребро* $e \in S_i \cap S_{i+1}$;

3) $L_{i+1} \setminus L_i \subset H_{i,i+1}$ *и* $R_i \setminus R_{i+1} \subset H_{i,i+1}$.

Доказательство. 1) Поскольку $P_{i+1} \subset L_{i+1}$, в $H_{i,i+1}$ входят те и только те вершины множества P_{i+1}, которые входят в R_i. Аналогично, в $H_{i,i+1}$ входят те и только те вершины множества Q_i, которые входят в L_{i+1}. По пункту 3 леммы 17 других вершин в $H_{i,i+1}$ нет.

2) Пусть $x \in (P_{i+1} \cup Q_i) \setminus H_{i,i+1}$. Не умаляя общности будем считать, что $x \in P_{i+1}$. Тогда по предыдущему пункту $x \notin R_i$ и, следовательно, $x \notin R_{i+1}$. Таким образом, x – граничная вершина части L_{i+1}, не лежащая в части R_{i+1}. Это означает, что x является концом одного из ребер разреза S_{i+1}. Обозначим это ребро через $e = xt$. Далее, поскольку $x \notin R_i$, мы получаем, что $x \in L_i$, причем x – граничная вершина этой части, поскольку $t \notin L_{i+1} \supset L_i$. Следовательно, $e = xt \in S_i$.

Обратно, пусть $e = xt \in S_i \cap S_{i+1}$. Не умаляя общности, будем считать, что $x \in L_i$. Тогда $x \in L_{i+1}$ и $t \notin L_{i+1}$. Следовательно, $x \in P_{i+1}$. С другой стороны, поскольку $x \in L_i$ и $xt \in S_i$ получаем $x \notin R_i$. Таким образом, $x \in (P_{i+1} \cup Q_i) \setminus H_{i,i+1}$.

3) Пусть $x \in L_{i+1} \setminus L_i$. Тогда $x \in L_{i+1}$ и $x \in R_i$, то есть $x \in H_{i,i+1}$. Следовательно, $L_{i+1} \setminus L_i \subset H_{i,i+1}$. То, что $R_i \setminus R_{i+1} \subset H_{i,i+1}$, доказывается аналогично. □

Замечание 13. По лемме 2 множества S_i и S_{i+1} не могут иметь более одного общего ребра. Тогда возможны следующие две ситуации: либо S_i и S_{i+1} общих ребер не имеют и тогда $H_{i,i+1} = P_{i+1} \cup Q_i$, либо они имеют одно общее ребро и тогда в каждом из множеств P_{i+1}, Q_i есть ровно по одной вершине, не принадлежащей $H_{i,i+1}$.

Лемма 18. *Множество* S_1 *содержит ровно одно ребро, инцидентное с* u *(и, соответственно, входящее в* S_0*). При этом,* $Q_0 \cap P_1 = \varnothing$ *и можно ввести обозначения так, что* $Q_0 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $P_1 = \{u, y_2, z_2\}$, $S_0 \cap S_1 = \{ux_1\}$, $\{y_1z_1, y_1z_2, z_1y_2, y_1y_2, z_1z_2\} \subset E(G)$, $x_1y_1 \notin E(G)$, $x_1z_1 \notin E(G)$. *Более того, вершины* y_2 *и* z_2 *могут быть несмежны только в том случае, если* $S_1 \in \mathfrak{M}_1(G)$ *(см. рис. 4).*

Аналогичные утверждения выполнены и для разрезов S_{m+1} *и* S_m *(см. рис. 5).*

Доказательство. Докажем утверждение леммы для разрезов S_0 и S_1. Для S_{m+1} и S_m доказательство аналогично.

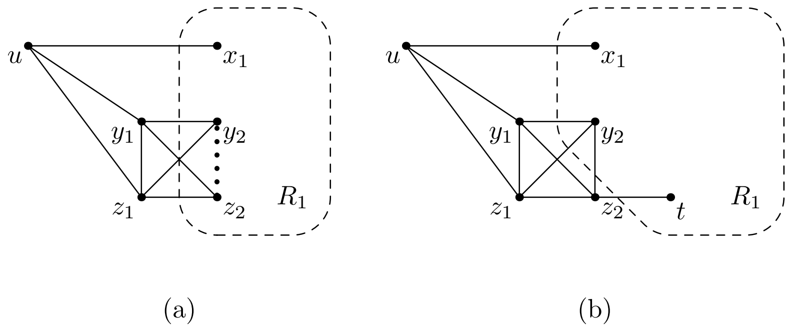

Рис. 4. Разрезы S_0 и S_1: (a) случай, когда разрез S_1 содержит единственное ребро ux_1, вершины y_2 и z_2 могут быть как смежны, так и несмежны; (b) случай, когда в S_1 более одного ребра, вершины y_2 и z_2 смежны.

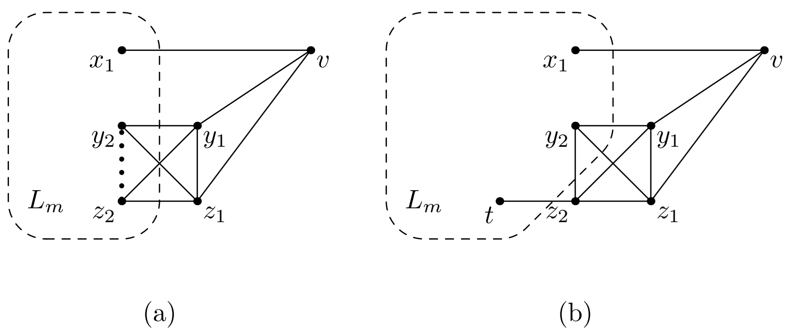

Рис. 5. Разрезы S_{m+1} и S_m.

Поскольку G – критический трехсвязный граф, в нем есть 3-разделяющее множество T, содержащее вершину u. Очевидно, что T зависимо с $Q_0 = N_G(u)$. Тогда в одной из компонент графа $G - T$ будет ровно одна вершина из $N_G(u)$. Обозначим эту вершину через x_1, а оставшиеся две вершины $N_G(u)$ – через y_1 и z_1. Тогда множество T можно дополнить ребром ux_1. Дополнив полученный разрез до максимального, получим разрез S_i, где $i > 0$. Тогда по лемме 16 ребро

ux_1 входит также и в разрез S_1. Следовательно, $u \in P_1$. Отметим также, что разрез S_1 нетривиален и поэтому не может содержать других ребер, инцидентных u.

Пусть $Q_0 \cap P_1 \neq \varnothing$. Тогда эти два множества порождают ромашку и вершина u является ее лепестком, к которому примыкают две пустые части. Но по лемме 12 ромашка в графе G не может содержать двух соседних пустых частей. Полученное противоречие доказывает, что $Q_0 \cap P_1 = \varnothing$. Обозначим отличные от u вершины множества P_1 через y_2 и z_2.

Докажем, что $\mathrm{Int}(L_1) = \{y_1, z_1\}$. Действительно, разрез S_1 не содержит ребер uy_1, uz_1, следовательно, вершины y_1 и z_1 лежат в части L_1. Кроме того, $\{y_1, z_1\} \cap \mathrm{Bound}(L_1) \subset Q_0 \cap P_1 = \varnothing$, то есть $\{y_1, z_1\} \subset \mathrm{Int}(L_1)$. С другой стороны, по лемме 17 имеем

$$H_{0,1} = R_0 \cap L_1 \subset P_1 \cup Q_0.$$

Тогда, поскольку $R_0 = V(G) \setminus \{u\}$, мы получаем, что $L_1 = \{y_1, z_1, y_2, z_2, u\}$. Следовательно, других вершин, кроме y_1 и z_1, в $\mathrm{Int}(L_1)$ нет.

Таким образом, вершины y_1 и z_1 могут быть смежны только с вершинами части $L_1 = \{y_1, z_1, u, y_2, z_2\}$. Но степени вершин y_1 и z_1 хотя бы 4, то есть каждая из них должна быть смежна со всеми остальными вершинами части L_1. Из доказанного выше следует, что

$$\{y_1z_1, y_1z_2, z_1y_2, y_1y_2, z_1z_2\} \subset E(G), \quad x_1y_1 \notin E(G) \ \text{ и } \ x_1z_1 \notin E(G).$$

Предположим теперь, что разрез S_1 содержит более одного ребра. Это означает, что множество P_1 можно дополнить как минимум одним ребром, отличным от ux_1. Не умаляя общности будем считать, что это ребро z_2t (см. рисунок 4b). Очевидно, что вершина t лежит в той же компоненте связности графа $G - P_1$, что и x_1. Более того, t является единственной смежной с z_2 вершиной этой компоненты. Кроме нее смежными с z_2 могут быть только вершины части L_1. Но при этом z_2 не смежна с u, то есть $N_G(z_2) \subset \{y_1, y_2, z_1, t\}$. Поскольку $d(z_2) > 3$, все перечисленные вершины должны быть смежны с z_2 и, в частности, $y_2z_2 \in E(G)$. □

Далее мы рассмотрим соседние множества из $\mathfrak{M}^*(G)$, ни одно из которых не тривиально (т. е. не совпадает с S_0 и S_{m+1}).

Лемма 19. *Пусть* $1 \leqslant i \leqslant m-1$. *Тогда*

$$Q_{i+1} \cap \mathrm{Int}(R_i) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad P_i \cap \mathrm{Int}(L_{i+1}) \neq \varnothing.$$

Доказательство. Докажем первое из двух утверждений, второе доказывается аналогично. Рассмотрим вершину $x \in R_i \setminus R_{i+1}$. Такая вершина существует, поскольку $R_i \supsetneq R_{i+1}$ по теореме 1. Тогда множество Q_{i+1} отделяет вершину x от $\mathrm{Int}(R_{i+1})$, то есть Q_{i+1} разделяет R_i. Но множество, разделяющее часть R_i, очевидно должно содержать как минимум одну внутреннюю вершину этой части. □

2.2.2. *Разрезы, содержащие общее ребро.*

Лемма 20. *Если разрезы S_i и S_j имеют общее ребро, то они не имеют других общих элементов.*

Доказательство. Согласно лемме 16 достаточно доказать утверждение для пары соседних разрезов S_i и S_{i+1}. Для пар S_0, S_1 и S_m, S_{m+1} утверждение следует из леммы 18. Поэтому достаточно рассмотреть случай $1 \leqslant i \leqslant m-1$.

Итак, пусть разрезы S_i и S_{i+1}, где $1 \leqslant i \leqslant m-1$, имеют общее ребро x_1x_2. Согласно лемме 2 они не могут иметь других общих ребер. Поэтому предположим, что разрезы S_i и S_{i+1} имеют общую вершину y. Не умаляя общности будем считать, что $x_1 \in L_i$. Тогда $x_1 \in L_{i+1}$. Поскольку каждый из разрезов S_i и S_{i+1} разделяет вершины x_1 и x_2, имеем $x_1 \notin R_i$, $x_1 \notin R_{i+1}$, $x_2 \in R_i$, $x_2 \in R_{i+1}$, $x_2 \notin L_i$, $x_2 \notin L_{i+1}$.

Рассмотрим множества P_i и P_{i+1}. Из сказанного выше очевидно, что оба эти множества содержат вершины x_1 и y. То есть эти множества имеют вид $P_i = \{x_1, y, z_1\}$ и $P_{i+1} = \{x_1, y, z_2\}$.

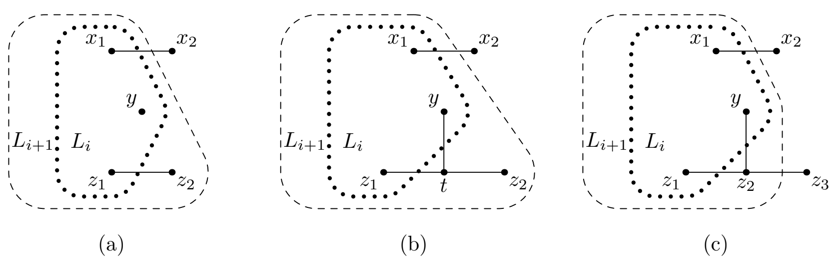

Рис. 6. Разрезы, содержащие общее ребро x_1x_2 и общую вершину y.

Докажем, что $S_i \in \mathfrak{M}_2(G)$. Действительно, пусть $S_i = \{x_1x_2, y, z_1\} \in \mathfrak{M}_1(G)$. Тогда $Q_i = \{x_2, y, z_1\}$, откуда по следствию 3 получаем $H_{i,i+1} = \{y, z_1, z_2\}$ и $L_{i+1} \setminus L_i = \{z_2\}$ (см. рисунок 6a). Заметим, что вершина

z_1 является граничной для части L_i, но по лемме 19 она является внутренней для части L_{i+1} (вершины x и y_1 внутренними для L_{i+1}, очевидно, не являются). Тогда все смежные с z_1 вершины лежат в L_{i+1}, но по лемме 4 вершина z_1 должна быть смежна с вершиной, не лежащей в L_i. Следовательно, вершина z_1 смежна ровно с одной вершиной не лежащей в L_i – с вершиной z_2. По лемме 1 это означает, что разрез S_i можно дополнить ребром z_1z_2, что противоречит его максимальности.

Далее докажем, что $S_i = \{x_1x_2, y, z_1z_2\}$. Предположим противное: пусть $S_i = \{x_1x_2, y, z_1t\}$, где $t \neq z_2$ (см. рисунок 6b). Тогда $Q_i = \{x_2, y, t\}$, откуда по следствию 3 получаем что $H_{i,i+1} = \{y, t, z_2\}$ и $L_{i+1} \setminus L_i = \{t, z_2\}$. В этом случае, $t \in \mathrm{Int}(L_{i+1})$, то есть t может быть смежна только с вершинами z_1, z_2, y и $d(t) \leqslant 3$, что невозможно.

Итак $S_i = \{x_1x_2, y, z_1z_2\}$. Это в частности означает, что $z_2 \in R_i$ и $Q_i = \{x_2, y, z_2\}$. Пусть $Q_{i+1} = \{x_2, y, z_3\}$ (см. рисунок 6c). Рассуждая аналогично, можно доказать, что $S_{i+1} = \{x_1x_2, y, z_2z_3\}$. Но это означает, что вершина z_2 может быть смежна только с тремя вершинами: z_1, z_3 и y, что невозможно, поскольку z_2, очевидно, не совпадает с u и v. Противоречие. □

Замечание 14. В предыдущей лемме мы доказали, что разрезы S_i и S_{i+1}, имеющие общее ребро x_1x_2, не имеют других общих элементов (вершин или ребер). Однако, при этом множество $V(S_i) \cap V(S_{i+1})$ может содержать и другие вершины, помимо x_1 и x_2. А именно, ребро разреза S_i может быть инцидентно вершине разреза S_{i+1} и наоборот ребро разреза S_{i+1} может быть инцидентно вершине разреза S_i. Эта ситуация будет описана более подробно в следующей лемме.

Лемма 21. *Пусть* $1 \leqslant i < m$ *и* S_i, S_{i+1} *– разрезы, имеющие общее ребро* x_1x_2*, где* $x_1 \in L_i$*. Тогда выполняется ровно один из следующих двух случаев.*

1° *Если* $P_{i+1} \cap Q_i = \varnothing$*, то можно ввести обозначения так, что* $P_{i+1} = \{x_1, y_2, z_2\}$*,* $Q_i = \{x_2, y_1, z_1\}$*,* $H_{i,i+1} = \{y_1, y_2, z_1, z_2\}$ *и* $\{y_1y_2, y_1z_2, z_1y_2, z_1z_2\} \subset E(G)$*. Вершины* y_1 *и* z_1 *могут быть несмежны только если* $S_i \in \mathfrak{M}_1(G)$*. Аналогично, вершины* y_2 *и* z_2 *могут быть несмежны только если* $S_{i+1} \in \mathfrak{M}_1(G)$ *(см. рисунок 7a).*

2° *Если* $P_{i+1} \cap Q_i \neq \varnothing$*, то можно ввести обозначения так, что* $S_i = \{x_1x_2, y_1y_2, z_1\}$ *и* $S_{i+1} = \{x_1x_2, y_2, z_1z_2\}$*. При этом,* $H_{i,i+1} = \{y_2, z_1\}$ *и вершины* z_1 *и* y_2 *смежны (см. рисунок 7c).*

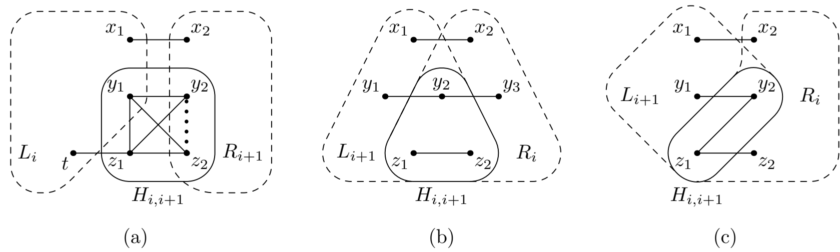

Рис. 7. Разрезы S_i и S_{i+1}, имеющие общее ребро x_1x_2: (a) случай, когда $P_{i+1} \cap Q_i = \varnothing$, здесь вершины y_1 и z_1 смежны, поскольку $tz_1 \in S_i$, а вершины y_2 и z_2 могут быть как смежны, так и несмежны; (b) невозможный случай, когда вершина y_2 инцидентна ребрам обоих разрезов S_i и S_{i+1}; (c) случай, когда $P_{i+1} \cap Q_i \neq \varnothing$, здесь $S_i = \{x_1x_2, y_1y_2, z_1\}$, $S_{i+1} = \{x_1x_2, y_2, z_1z_2\}$ и вершины z_1 и y_2 смежны.

Доказательство. Рассмотрим два случая:

$$P_{i+1} \cap Q_i = \varnothing \quad \text{и} \quad P_{i+1} \cap Q_i \neq \varnothing.$$

1. Пусть $P_{i+1} \cap Q_i = \varnothing$. Введем обозначения $P_{i+1} = \{x_1, y_2, z_2\}$, $Q_i = \{x_2, y_1, z_1\}$. Тогда по следствию 3 имеем $H_{i,i+1} = \{y_1, y_2, z_1, z_2\}$.

Рассмотрим вершину z_1. Она является граничной для части R_i и, следовательно, по лемме 4 должна быть смежна хотя бы с одной внутренней вершиной этой части. С другой стороны, $z_1 \in \mathrm{Int}(L_{i+1})$, то есть z_1 может быть смежна только с вершинами части L_{i+1}. Таким образом, внутренними вершинами части R_i, с которыми может быть смежна z_1, могут быть только вершины y_2 и z_2. Предположим, что z_1 смежна только с одной из них: не умаляя общности, пусть это z_2. Тогда множество Q_i можно дополнить ребром z_1z_2 и получившийся разрез будет разделять вершины z_1 и z_2. Но тогда и содержащий его максимальный разрез будет разделять эти вершины. То есть найдется разрез из $M^*(G)$, разделяющий $H_{i,i+1}$. Но это невозможно, так как $H_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(M^*(G))$ по лемме 17. Итак, мы доказали, что $\{z_1y_2, z_1z_2\} \subset E(G)$. Аналогично доказывается, что $\{y_1y_2, y_1z_2\} \subset E(G)$.

Предположим, что $S_i \notin \mathfrak{M}_1(G)$. Тогда в разрезе S_i должно быть ребро, инцидентное одной из вершин y_1, z_1. Пусть не умаляя общности $tz_1 \in S_i$. Докажем, что тогда $y_1z_1 \in E(G)$. Для этого рассмотрим вершину z_1. В части L_i она может быть смежна только с вершиной t, а за пределами этой части – только с вершинами из $H_{i,i+1}$. То есть $N_G(z_1) \subset \{t, y_1, y_2, z_2\}$. Тогда, поскольку $d(z_1) \geqslant 4$, вершина z_1 должна быть смежна со всеми указанными вершинами. В частности, $y_1z_1 \in E(G)$.

2. Пусть $y_2 \in P_{i+1} \cap Q_i$. Поскольку по лемме 20 разрезы S_i и S_{i+1} не имеют других общих элементов, кроме ребра x_1x_2, как минимум для одного из этих двух разрезов вершина y_2 является концом входящего в этот разрез ребра. Тем самым, данный случай распадается на два подслучая: ребра, инцидентные вершине y_2 могут быть либо в обоих разрезах S_i и S_{i+1}, либо ровно в одном из них (не умаляя общности, пусть в S_i).

2.1. Пусть $y_1y_2 \in S_i$ и $y_2y_3 \in S_{i+1}$ (см. рисунок 7b). Тогда вершина y_2 может быть смежна только с вершиной y_1 в части L_i, только с вершиной y_3 части P_{i+1} и кроме этого еще с вершинами из $H_{i,i+1}$. Введем обозначения $P_{i+1} = \{x_1, y_2, z_2\}$, $Q_i = \{x_2, y_2, z_1\}$. Тогда $H_{i,i+1} = \{y_2, z_1, z_2\}$. Поскольку $d(y_2) \geqslant 4$, вершины z_1 и z_2 различны. Но тогда z_2 – единственная внутренняя вершина части R_i, которая может быть смежна с z_1. Следовательно, $\{x_2, y_2, z_1z_2\}$ – разрез, разделяющий $H_{i,i+1}$. Но это противоречит лемме 17. Таким образом, данный подслучай невозможен.

2.2. Пусть $y_1y_2 \in S_i$ и $y_2 \in S_{i+1}$ (см. рисунок 7c). Введем обозначения $P_{i+1} = \{x_1, y_2, z_1'\}$, $Q_i = \{x_2, y_2, z_1\}$ и докажем, что вершины z_1 и z_1' совпадают. Действительно, в противном случае, $H_{i,i+1} = \{y_2, z_1, z_1'\}$ и z_1' – единственная внутренняя вершина части R_i, которая может быть смежна с z_1. Следовательно, $\{x_2, y_2, z_1z_1'\}$ – разрез, разделяющий $H_{i,i+1}$, что невозможно по лемме 17. Итак, $P_{i+1} = \{x_1, y_2, z_1\}$, $Q_i = \{x_2, y_2, z_1\}$ и $H_{i,i+1} = \{y_2, z_1\}$. Тогда вершина z_1 должна быть инцидентна ребру разреза S_{i+1}, иначе разрез S_{i+1} содержится в разрезе S_i и не является максимальным. Следовательно, мы можем ввести обозначения так, что $S_{i+1} = \{x_1x_2, y_2, z_1z_2\}$. Ранее мы доказали (см. случай **2.1.**), что различные ребра разрезов S_i и S_{i+1} не могут иметь общих концов. Следовательно, $z_1 \in S_i$ и тогда $S_i = \{x_1x_2, y_1y_2, z_1\}$. Наконец, вершины z_1 и y_2 должны быть смежны, поскольку в противном случае оба разреза S_i и S_{i+1} будут содержаться в разрезе $\{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\}$ и не будут максимальными. $\square$

Определение 20. Назовем *куском* максимальную по включению последовательность разрезов $(S_k, S_{k+1}, \ldots, S_l)$, где $k < l$, содержащих общее ребро. Кусок, начинающийся с разреза S_k и заканчивающийся S_l, мы будем обозначать через $\mathfrak{S}_{k,l}$, а общее ребро разрезов из $\mathfrak{S}_{k,l}$ – через $e_{k,l}$.

Замечание 15. 1) В рассмотренном в предыдущей части данной работы (см. [8]) случае смежных вершин u и v все максимальные разрезы графа G образовывали один кусок. В случае несмежных u и v кусков как минимум два: по лемме 18 каждая из пар разрезов S_0, S_1 и S_m, S_{m+1} содержит общее ребро и эти ребра – разные. Следовательно, последовательность (S_i) начинается и заканчивается куском.

2) Рассмотрим кусок $\mathfrak{S}_{k,l}$. Пусть $e_{k,l} = x_1x_2$, причем $x_1 \in L_k$ и $x_2 \in R_l$. Для всех $i \in \{k, k+1, \dots, l\}$ введем обозначения

$$V_i = V(S_i) \setminus \{x_1, x_2\}, \quad P'_i = P_i \setminus \{x_1\} \ \text{ и } \ Q'_i = Q_i \setminus \{x_2\}.$$

Тогда все множества P'_i и Q'_i (кроме P'_0 и Q'_{m+1} в случае, если рассматриваемый кусок является крайним) двухэлементны. Из леммы 21 следует, что две вершины множества P'_i или Q'_i могут быть несмежны только в двух случаях: либо если это множество является одним из крайних в данном куске (т.е. P_k или Q_l), либо если $S_i \in \mathfrak{M}_1(G)$ (в этом случае $P'_i = Q'_i$). Отметим также, что $V_i = P'_i \cup Q'_i$ при $k \leqslant i \leqslant l$ и $H_{i,i+1} = Q'_i \cup P'_{i+1}$ при $k \leqslant i < l$.

Построим граф $G_{k,l}$ следующим образом. Рассмотрим индуцированный подграф $G(\bigcup\limits_{i=k}^{l} V_i)$ и соединим ребрами пары вершин в тех множествах P'_i и Q'_i, в которых они не были соединены в графе G.

Далее мы опишем структуру куска $\mathfrak{S}_{k,l}$ в обозначениях и терминах из замечания 15.

Лемма 22. *Рассмотрим кусок $\mathfrak{S}_{k,l}$ и будем использовать обозначения из замечания* 15. *Тогда выполняются следующие свойства.*

1) *Множество V_i (где $k \leqslant i \leqslant l$) может состоять из двух, трех или четырех вершин. Если $|V_i| > 2$, то индуцированный подграф $G_{k,l}(V_i)$ является простым циклом.*

2) *Множество $H_{i,i+1}$ (где $k \leqslant i < l$) может состоять из двух или четырех вершин.*

3) *Если $|H_{i,i+1}| = 4$, то разрезы S_i и S_{i+1} образуют конфигурацию, описанную в случае 1° леммы* 21. *При этом, индуцированный подграф $G_{k,l}(H_{i,i+1})$ изоморфен K_4.*

4) *Если* $|H_{i,i+1}| = 2$, *то* $S_i, S_{i+1} \in \mathfrak{M}_2(G)$ *и эти разрезы образуют конфигурацию, описанную в случае* 2° *леммы* 21.

Доказательство. 1) Заметим, что $|V_i| = |V(S_i)| - 2 \leqslant 4$. При $S_i \in \mathfrak{M}_1(G)$ имеем $|V_i| = 2$. То же самое верно для крайних разрезов S_0 и S_{m+1}, если они попадают в $\mathfrak{S}_{k,l}$. В остальных случаях при $S_i \in \mathfrak{M}_3(G)$ имеем $|V_i| = 4$ и $G_{k,l}(V_i)$ является циклом длины 4, образованным ребрами разреза S_i, отличными от $e_{k,l}$, и ребрами, соединяющими вершины из P_i' и Q_i'. В случае $S_i \in \mathfrak{M}_2(G)$ аналогично получаем, что $|V_i| = 3$ и $G_{k,l}(V_i)$ является циклом длины 3.

2) Непосредственно следует из леммы 21: в случае 1° этой леммы имеем $|H_{i,i+1}| = 4$, а в случае 2° получаем $|H_{i,i+1}| = 2$.

3) Как было показано в случае 1° леммы 21, можно ввести обозначения так, чтобы $P_{i+1}' = \{y_2, z_2\}$, $Q_i' = \{y_1, z_1\}$, $H_{i,i+1} = \{y_1, y_2, z_1, z_2\}$ и $\{y_1y_2, y_1z_2, z_1y_2, z_1z_2\} \subset E(G) \subset E(G_{k,l})$. Кроме того, $\{y_1z_1, y_2z_2\} \subset E(G_{k,l})$ по построению графа $G_{k,l}$.

4) Непосредственно следует из случая 2° леммы 21. $\square$

Лемма 23. *Пусть* $\mathfrak{S}_{k,l}$ *– кусок,* $k \leqslant i < l$ *и* $|H_{i,i+1}| = 4$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *При всех* $j > i$ *имеем* $Q_i' \cap V_j = Q_i' \cap H_{j,j+1} = \varnothing$.

2) *При всех* $j < i$ *имеем* $P_{i+1}' \cap V_j = P_{i+1} \cap H_{j,j+1} = \varnothing$.

Доказательство. Докажем утверждение 1 (утверждение 2 доказывается аналогично). Поскольку $|H_{i,i+1}| = 4$, из пункта 3 леммы 22 и случая 1° леммы 21 следует, что $P_{i+1}' \cap Q_i' = \varnothing$. Тогда $Q_i' \subset \mathrm{Int}(L_{i+1})$ и, следовательно, $Q_i' \cap \mathrm{Nb}(R_{i+1}) = \varnothing$. Но при $j > i$ мы получаем $H_{j,j+1} \subset R_j \subset \mathrm{Nb}(R_{i+1})$ и $V_j \subset \mathrm{Nb}(R_j) \subset \mathrm{Nb}(R_{i+1})$. Таким образом, $Q_i' \cap V_j = Q_i' \cap H_{j,j+1} = \varnothing$. $\square$

Теорема 2. *Множество* $V(G_{k,l})$ *можно представить в виде объединения подмножеств*

$$V(G_{k,l}) = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_s,$$

обладающих следующими свойствами.

1) *Каждый индуцированный подграф* $B_j = G_{k,l}(F_j)$ *является либо полным графом на четырех вершинах, либо простым циклом на трех или четырех вершинах. При этом цикл на четырех вершинах в данной последовательности может быть соседним только с* K_4.

2) *Любое ребро графа* $G_{k,l}$ *входит либо в один, либо в два подграфа* B_j.

3) *Пусть* $1 \leqslant j < s$ *и* $T_{j,j+1} = F_j \cap F_{j+1}$. *Тогда* $|T_{j,j+1}| = 2$. *Более того, две вершины множества* $T_{j,j+1}$ *смежны в графе* $G_{k,l}$. *В графе* G *эти вершины могут быть несмежны только в том случае, если оба подграфа* B_j *и* B_{j+1} *изоморфны* K_4.

4) *Множество* $T_{j,j+1}$ *является* 2*-разделяющим в графе* $G_{k,l}$. *Оно отделяет* F_p *от* F_q *при* $p \leqslant j < j+1 \leqslant q$.

5) *Пусть* $1 \leqslant j < s-1$. *Тогда* $|F_j \cap F_{j+2}| \leqslant 1$. *Более того,* $|F_j \cap F_{j+2}| = 1$ *тогда и только тогда, когда подграф* B_{j+1} *является треугольником.*

6) *При* $t - j > 2$ *множества* F_t *и* F_j *не пересекаются.*

Доказательство. Рассмотрим следующую последовательность множеств: $V_k, H_{k,k+1}, V_{k+1}, \ldots, H_{l-1,l}, V_l$. По лемме 22 каждое из этих множеств может содержать от двух до четырех вершин. Докажем, что в этой последовательности нет двух идущих подряд двухэлементных множеств, а также что любое двухэлементное множество этой последовательности содержится в любом из своих соседей. Действительно, из леммы 22 следует, что $|H_{i,i+1}| = 2$ только в одном случае: если $S_i, S_{i+1} \in \mathfrak{M}_2(G)$. Но в этом случае $|V_i| = |V_{i+1}| = 3$ и $H_{i,i+1} = P'_{i+1} = Q'_i = V_i \cap V_{i+1}$. Если же $|V_i| = 2$, то $S_i \in \mathfrak{M}_1(G)$. В этом случае множества $H_{i-1,i}$ и $H_{i,i+1}$ четырехэлементны и содержат V_i (точнее говоря, речь здесь идет о тех из множеств $H_{i-1,i}$ и $H_{i,i+1}$, что входят в нашу последовательность, то есть при $i \in \{k, l\}$ мы будем рассматривать только одно множество, а не два).

Выкинем из этой последовательности все двухэлементные множества, а оставшиеся занумеруем натуральными числами 1, 2, $\ldots$, s в том порядке, в котором они записаны в этой последовательности и обозначим их через $F_1, F_2, \ldots, F_s$. Докажем, что получившаяся последовательность удовлетворяет всем указанным условиям.

1) По лемме 22 если $|V_i| > 2$, то индуцированный подграф $G_{k,l}(V_i)$ является простым циклом. Если же $|H_{i,i+1}| > 2$, то по той же лемме $|H_{i,i+1}| = 4$, и индуцированный подграф $G_{k,l}(H_{i,i+1})$ изоморфен K_4.

Далее заметим, что если B_j является циклом длины 4, то B_j соответствует множеству V_i, такому, что $S_i \in \mathfrak{M}_3(G)$. Поскольку $S_i \notin \mathfrak{M}_2(G)$, для пары из S_i и соседнего с ним разреза $S_{i\pm1}$ не может выполняться утверждение 4 леммы 22. Но тогда из утверждений 2 и 3 той же леммы следует, что соседнее с B_j элементы нашей последовательности должны быть изоморфны K_4.

2) Очевидно, что любое ребро графа G либо входит в один из разрезов S_i, либо оба его конца принадлежат одной из частей разбиения

$H_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(\mathfrak{M}^*(G))$. Это же верно и для ребер графа $G_{k,l}$: его ребро может быть либо ребром графа G, либо быть добавленным ребром, соединяющим вершины одного из множеств P'_i или Q'_i, где $k \leqslant i \leqslant l$. Но каждое такое множество содержится в одной из частей разбиения.

Ребро графа $G_{k,l}$, входящее в разрез S_i, очевидно, принадлежит ровно одному из подграфов B_j, а именно тому, для которого $F_j = V_i$. Рассмотрим ребро e, оба конца которого принадлежат части $H_{i,i+1} = P'_{i+1} \cup Q'_i$. По пункту 2 леммы 22 возможны два случая: **1.** $|H_{i,i+1}| = 2$ и **2.** $|H_{i,i+1}| = 4$. Рассмотрим эти случаи более подробно.

1. Пусть $|H_{i,i+1}| = 2$. Тогда по пункту 4 леммы 22 имеем $|V_i| = |V_{i+1}| = 3$ и e входит ровно в два подграфа B_j и B_{j+1}, где $F_j = V_i$ и $F_{j+1} = V_{i+1}$.

2. Пусть $|H_{i,i+1}| = 4$. Тогда e заведомо входит в подграф B_j, такой, что $F_j = H_{i,i+1}$. Далее, заметим, что при $p > j$ множество F_p имеет вид V_t или $H_{t,t+1}$, где $t > i$. Следовательно, по лемме 23 получаем, что, $Q'_i \cap F_p = \varnothing$ при $p > j$. Аналогично, $P'_{i+1} \cap F_p = \varnothing$ при $p < j$. Таким образом, если ребро e входит в какой-либо еще подграф B_p, где $p \neq j$, то оно должно соединять две вершины одного из множеств Q'_i или P'_{i+1}.

Предположим, что e соединяет две вершины множества Q'_i (случай множества P'_{i+1} аналогичен). Тогда e может лежать только в подграфах F_p, где $p \leqslant j$. Нам требуется доказать, что это возможно только при $p \geqslant j-1$, то есть что $Q'_i \not\subset F_p$ при $p < j-1$. Отметим, что в случае $i = k$ доказываемое утверждение очевидно, поскольку тогда $j \leqslant 2$ и подграфов B_p, где $p < j-1$, просто не существует. Так что далее мы будем считать, что $i > k$. Рассмотрим два подслучая: $S_i \in \mathfrak{M}_1(G)$ и $S_i \notin \mathfrak{M}_1(G)$.

2.1. Пусть $S_i \in \mathfrak{M}_1(G)$. Тогда $P'_i = Q'_i = V_i$ и $|V_i| = 2$. Следовательно, по лемме 22 имеем $|H_{i-1,i}| = 4$ и $F_{j-1} = H_{i-1,i}$. Но тогда, аналогично доказанному выше, из леммы 23 следует, что $Q'_i \cap F_p = P'_i \cap F_p = \varnothing$ при $p < j-1$.

2.2. Пусть $S_i \notin \mathfrak{M}_1(G)$. Тогда $|V_i| > 2$ и $F_{j-1} = V_i$. Но в этом случае $Q'_i \not\subset L_i$ и $F_p \subset L_i$ при $p < j-1$. Таким образом, и в этом случае получаем $Q'_i \not\subset F_p$ при $p < j-1$.

3) Из доказанного выше очевидно, что множество $T_{j,j+1}$ совпадает с одним из множеств P'_i или Q'_i. Следовательно, это множество двухэлементно и его вершины смежны в графе $G_{k,l}$. Заметим также, что это множество не может быть крайним (то есть совпадать с P_k или Q_l). Из

леммы 21 следует (см. также замечание 15), что вершины множества P_i' или Q_i' могут быть несмежны только в случае, если $S_i \in \mathfrak{M}_1(G)$. Но тогда $F_j = H_{i-1,i}$ и $F_{j+1} = H_{i,i+1}$. Поскольку $S_i \notin \mathfrak{M}_2(G)$, по пунктам 2 и 4 леммы 22 мы получаем, что $|H_{i-1,i}| = |H_{i,i+1}| = 4$ и тогда по пункту 3 той же леммы подграфы B_j и B_{j+1} изоморфны K_4.

4) Не умаляя общности, пусть $T_{j,j+1} = P_i'$. Тогда в графе G множество P_i является 3-разделяющим и отделяет F_p от F_q при $p \leqslant j < j+1 \leqslant q$. Следовательно, P_i' отделяет F_p от F_q в графе $G_{k,l}$.

5) Рассмотрим множество F_{j+1}. По построению, оно совпадает либо с $H_{i,i+1}$, либо с V_i при некотором i.

В первом случае имеем $T_{j,j+1} = Q_i'$, $T_{j+1,j+2} = P_{i+1}'$. Кроме того, в этом случае $|H_{j,j+1}| = 4$ и тогда по лемме 21 имеем $Q_i' \cap P_{i+1}' = \varnothing$. Поскольку каждое из множеств Q_i' и P_{i+1}' отделяет F_j от F_{j+2}, мы получаем $F_j \cap F_{j+2} = Q_i' \cap P_{i+1}' = \varnothing$.

Во втором случае $T_{j,j+1} = P_i'$ и $T_{j+1,j+2} = Q_i'$ и, рассуждая аналогично, мы получим $F_j \cap F_{j+2} = P_i' \cap Q_i'$. Но $P_i' \cap Q_i' \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $|V_i| = 3$, а это равносильно тому, что B_j – треугольник.

6) По пункту 4 данной теоремы, каждое из множеств $T_{j,j+1}, T_{j+1,j+2}, T_{j+2,j+3}$ отделяет F_t от F_j. Тогда для того, чтобы $F_t \cap F_j \neq \varnothing$ необходимо $T_{j,j+1} \cap T_{j+1,j+2} \cap T_{j+2,j+3} \neq \varnothing$. Но, рассуждая аналогично доказательству предыдущего пункта, получим, что $T_{j,j+1} \cap T_{j+1,j+2} \neq \varnothing$ возможно только при $F_{j+1} = V_i$, где $S_i \in \mathfrak{M}_2(G)$. Аналогично, $T_{j+1,j+2} \cap T_{j+2,j+3} \neq \varnothing$ возможно только при $F_{j+2} = V_{i+1}$, где $S_{i+1} \in \mathfrak{M}_2(G)$. Но тогда $T_{j,j+1} = P_i'$ и $T_{j+2,j+3} = Q_{i+1}'$, а из леммы 21 следует, что в таком случае $P_i' \cap Q_{i+1}' = \varnothing$. Противоречие. $\square$

Замечание 16. Описанная выше структура графа $G_{k,l}$ очень похожа на структуру, описанную в первой части данной работы (см. [8]). Там фигурировала такая же последовательность из K_4 и циклов длины 3 и 4. Отличие состояло только в том, какие блоки могут быть на концах данной последовательности.

2.2.3. *Пересекающиеся куски.* В этом разделе мы изучим ситуацию, когда два куска содержат общий разрез.

Лемма 24. *Два различных куска могут содержать не более одного общего разреза. Если разрез S_l входит в два куска, то эти куски имеют вид $\mathfrak{S}_{k,l}$ и $\mathfrak{S}_{l,n}$, где $k < l < n$. При этом ребра $e_{k,l}$ и $e_{l,n}$ различны, а разрез S_l содержит минимум два ребра.*

Доказательство. Заметим сначала, что различные куски имеют различные общие ребра, поскольку, если ребро e является общим для каких-либо разрезов, то мы можем обозначить наименьший номер разреза, содержащего e, через k и наибольший такой номер – через l. Тогда по лемме 16 ребро e входит во все разрезы S_i, где $k \leqslant i \leqslant l$. То есть все разрезы, содержащие ребро e, образуют один единственный кусок.

Далее, предположим, что два различных куска $\mathfrak{S}_{k,l}$ и $\mathfrak{S}_{t,n}$ содержат два различных разреза S_i и S_j. Тогда каждый из этих разрезов содержит как ребро $e_{k,l}$, так и ребро $e_{t,n}$, и эти ребра различны. То есть разрезы S_i и S_j имеют два общих ребра, что невозможно по лемме 2. Противоречие.

Итак, любые два куска имеют не более одного общего разреза. Следовательно, если S_l – их единственный общий разрез, то он должен находиться в начале одного из кусков и в конце другого. То есть, эти куски имеют вид $\mathfrak{S}_{k,l}$ и $\mathfrak{S}_{l,n}$, где $k < l < n$, а их общие ребра – соответственно $e_{k,l}$ и $e_{l,n}$. Как уже было доказано выше, эти ребра различны и разрез S_l содержит их оба. Таким образом, разрез S_l содержит минимум два ребра. □

Замечание 17. Из леммы 24, в частности, следует, что все куски можно упорядочить по номеру первого входящего в кусок разреза. Тогда для любых двух кусков $\mathfrak{S}_{k,l}$ и $\mathfrak{S}_{t,n}$ верно, что если $t > k$, то $t \geqslant l$. Соответственно, если эти куски являются соседними при данном упорядочении, то возможны следующие две ситуации: либо $t = l$ и S_l – общий разрез этих кусков, либо $t > l$ и между кусками находится последовательность $S_l, S_{l+1}, \dots, S_t$ разрезов, никакие два из которых не имеют общих ребер. В следующем разделе мы займемся описанием таких разрезов.

2.2.4. *Соседние множества из $\mathfrak{M}^*(G)$, не имеющие общих ребер.* Рассмотрим множества $S_i, S_{i+1} \in \mathfrak{M}^*(G)$, не имеющие общих ребер. Отметим, что в этом случае множества S_i и S_{i+1} не обязательно являются разрезами: одно из них или даже они оба могут быть 3-разделяющими множествами, которые невозможно дополнить никаким ребром. Заметим также, что множества Q_i и P_{i+1} в этом случае могут быть либо совпадающими, либо независимыми. Кроме того, по следствию 3 имеем $H_{i,i+1} = Q_i \cup P_{i+1}$.

Теорема 3. *Пусть множества S_i и S_{i+1} не имеют общих ребер. Тогда выполнены следующие утверждения.*

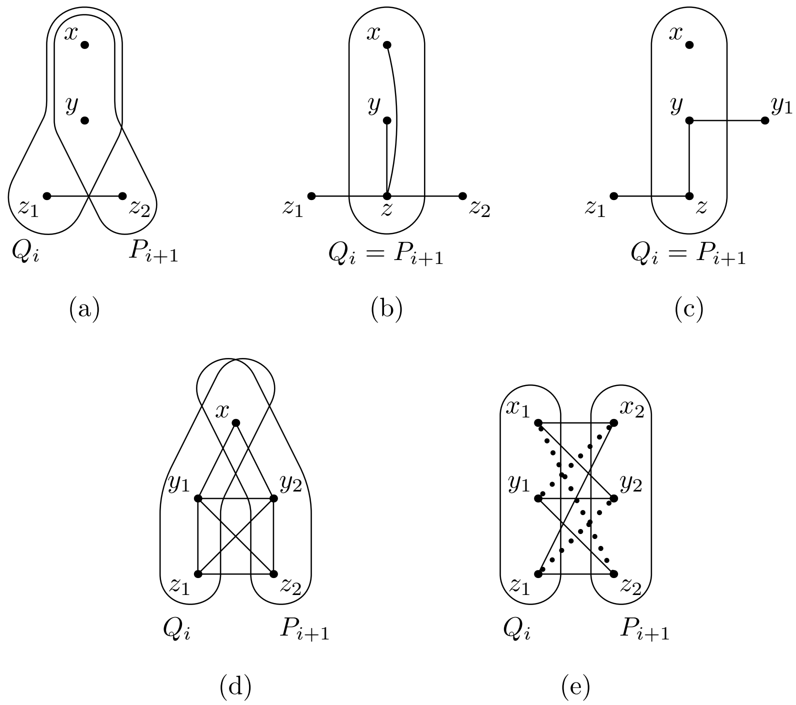

Рис. 8. S_i и S_{i+1} не имеют общих ребер: (a) невозможный случай, когда $|Q_i \cap P_{i+1}| = 2$; (b) $Q_i = P_{i+1}$ и вершина z инцидентна ребрам обоих разрезов S_i и S_{i+1}; (c) $Q_i = P_{i+1}$, вершина z инцидентна ребру разреза S_i, а y – S_{i+1}; (d) случай $|Q_i \cap P_{i+1}| = 1$; (e) случай $Q_i \cap P_{i+1} = \varnothing$.

1) $|Q_i \cap P_{i+1}| \neq 2$.

2) *Если* $Q_i = P_{i+1}$, *то оба множества* S_i *и* S_{i+1} *являются разрезами. Если при этом какая-либо вершина множества* Q_i *инцидентна ребрам обоих разрезов* S_i *и* S_{i+1}, *то она смежна с обеими оставшимися вершинами множества* Q_i. *Если же две вершины множества* Q_i *инцидентны ребрам различных разрезов* (*одна из них инцидентна ребру* S_i, *а другая – ребру* S_{i+1}), *то эти вершины смежны* (*см. рисунки* 8b *и* 8c).

3) *Если* $|Q_i \cap P_{i+1}| = 1$*, то можно ввести обозначения так, что* $Q_i = \{x, y_1, z_1\}$*,* $P_{i+1} = \{x, y_2, z_2\}$ *и* $\{y_1y_2, y_1z_2, z_1y_2, z_1z_2\} \subset E(G)$ *(см. рисунок* 8d*).*

4) *Если* $Q_i \cap P_{i+1} = \varnothing$*, то можно ввести обозначения так, что* $Q_i = \{x_1, y_1, z_1\}$*,* $P_{i+1} = \{x_2, y_2, z_2\}$ *и* $\{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2, x_1y_2, y_1z_2, z_1x_2\} \subset E(G)$ *(см. рисунок* 8e*).*

Доказательство. 1) Предположим противное: пусть $Q_i = \{x, y, z_1\}$ и $P_{i+1} = \{x, y, z_2\}$ (см. рисунок 8a). Тогда единственной вершиной из $\mathrm{Int}(R_i)$, которая может быть смежна с z_1, является z_2. Но в этом случае множество $\{x, y, z_1z_2\}$ является разрезом, разделяющим z_1 и z_2, что невозможно.

2) Пусть $Q_i = P_{i+1} = \{x, y, z\}$. Поскольку множества S_i и S_{i+1} различны, как минимум одно из них не совпадает с $\{x, y, z\}$. Но тогда и другое тоже не совпадает с $\{x, y, z\}$, иначе оно не будет максимальным.

Предположим, что $z_1z \in S_i$ и $zz_2 \in S_{i+1}$ (см. рисунок 8b). Тогда z_1 – единственная смежная с z вершина, не лежащая в P_i, а z_2 – единственная смежная с z вершина, не лежащая в L_{i+1}. Кроме этих двух вершин z может быть смежна только с вершинами из $H_{i,i+1}$, то есть с вершинами x и y. Тогда, поскольку $d(z) \geqslant 4$, вершина z должна быть смежна со всеми перечисленными вершинами и, в частности, $\{xz, yz\} \subset E(G)$.

Далее, предположим, что $z_1z \in S_i$ и $yy_2 \in S_{i+1}$ (см. рисунок 8c). Тогда $yz \in E(G)$, поскольку в противном случае мы получим разрез $M = \{x, yy_2, z_1z\}$, не совпадающий ни с S_i, ни с S_{i+1} и имеющий общие ребра с каждым из этих разрезов, причем эти общие ребра – разные. Это невозможно, поскольку в противном случае разрез M можно дополнить до максимального разреза S_j, имеющего различные общие ребра с соседними разрезами S_i и S_{i+1}. Но тогда S_j будет общим разрезом кусков, содержащих S_i и S_{i+1}, и тогда по лемме 24 имеем $i < j < i + 1$. Противоречие.

3) Пусть x – единственная общая вершина множеств Q_i и P_{i+1}. Обозначим остальные вершины этих множеств через y_1, z_1, y_2, z_2 так, чтобы $Q_i = \{x, y_1, z_1\}$ и $P_{i+1} = \{x, y_2, z_2\}$ (см. рисунок 8d). Нам нужно доказать, что $\{y_1y_2, y_1z_2, z_1y_2, z_1z_2\} \subset E(G)$. Предположим противное: пусть, не умаляя общности, $z_1y_2 \notin E(G)$. Тогда $\{x, y_1, z_1z_2\}$ – разрез, разделяющий множество $H_{i,i+1} = \{x, y_1, y_2, z_1, z_2\}$, что невозможно.

4) Пусть $Q_i \cap P_{i+1} = \varnothing$ (см. рисунок 8e). Рассмотрим ребра, соединяющие множества Q_i и P_{i+1}. Заметим, что каждая вершина множества Q_i должна быть смежна как минимум с двумя вершинами множества

P_{i+1}, в противном случае, множество Q_i можно дополнить одним из ребер до разреза, разделяющего $H_{i,i+1}$, что невозможно. Аналогично, каждая вершина множества P_{i+1} должна быть смежна как минимум с двумя вершинами множества Q_i. Тогда легко видеть, что в множествах Q_i и P_{i+1} поровну вершин, смежных со всем тремя вершинами противоположного множества. Разбив такие вершины на пары и удалив в каждой паре соединяющее ее ребро, мы получим двудольный граф с долями Q_i и P_{i+1}, в котором каждая вершина имеет степень 2. Очевидно, что этот граф есть простой цикл длины 6. Тогда мы можем ввести обозначения $Q_i = \{x_1, y_1, z_1\}$, $P_{i+1} = \{x_2, y_2, z_2\}$ так, чтобы найденный выше цикл имел вид $(x_2, x_1, y_2, y_1, z_2, z_1)$, что и требовалось. $\square$

Замечание 18. В ситуации, описанной в пункте 3 теоремы 3, вершина x может входить в любое число разрезов. Так что, в отличие от случая смежных вершин u и v, здесь $\Delta(G)$ не ограничен. Пример такого графа изображен на рисунке 9.

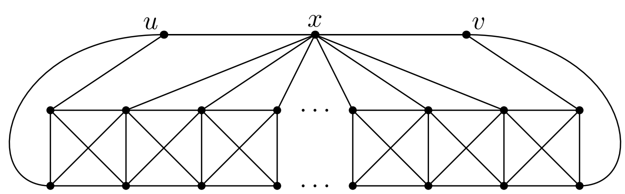

Рис. 9. Пример графа, котором вершина x может иметь сколь угодно большую степень.

2.3. Представление графа G в виде объединения трех независимых uv-путей. В заключении мы докажем теорему, которая сделает описание структуры графа G более наглядной.

Определение 21. Пусть $u, v \in V(G)$. *Независимыми uv-путями* называются простые пути с началом в u и концом v, не имеющие общих внутренних вершин.

Теорема 4. *Множество вершин графа G можно представить в виде объединения трех независимых uv-путей $C_x = (u, x_1, x_2, \ldots, x_p, v)$, $C_y = (u, y_1, y_2, \ldots, y_q, v)$, $C_z = (u, z_1, z_2, \ldots, z_r, v)$ (см. рис. 10), обладающих следующими свойствами.*

1) *Любое из множеств S_i (а, следовательно, и любое множество из $\mathfrak{M}^+(G)$) содержит ровно по одному элементу (вершине или ребру) каждого из путей C_x, C_y, C_z.*

2) *Если $i \geqslant j$, то элемент каждого из путей, входящий в S_i может либо совпадать с элементом S_j, входящим в тот же путь, либо быть ближе при движении по данному пути к вершине v.*

Доказательство. Будем строить такие пути, добавляя по очереди множества S_i. Сначала рассмотрим тривиальный разрез S_0, состоящий из всех ребер, инцидентных вершине u. Обозначив смежные с u вершины через x_1, y_1, z_1, как это было сделано в лемме 18, мы получим начальные ребра наших путей.

Опишем очередной шаг построения. Пусть мы уже построили пути $C_{x,a} = (u, x_1, x_2, \ldots, x_a)$, $C_{y,b} = (u, y_1, y_2, \ldots, y_b)$, $C_{z,c} = (u, z_1, z_2, \ldots, z_c)$, где $Q_i = \{x_a, y_b, z_c\}$ и для множеств $S_0, \ldots, S_i$ выполнялись свойства 1 и 2 из условия. Наша цель состоит в том, чтобы продлить эти пути так, чтобы их концы составляли множество Q_{i+1} и для множества S_{i+1} выполнялось свойство 1. Отметим, что свойство 2 будет выполнено автоматически, поскольку если множество S_{i+1} имело общий элемент с каким-либо более ранним множеством, то по лемме 16 этот же элемент есть и в S_i и тогда он будет находиться в самом конце построенного на данный момент пути. А те элементы S_{i+1}, которые не встречались в предыдущих множествах, будут добавлены в конец соответствующих путей. Далее мы рассмотрим два случая: множества S_i и S_{i+1} могут иметь или не иметь общее ребро.

1. Пусть у разрезов S_i и S_{i+1} есть общее ребро. Не умаляя общности будем считать, что это ребро $x_{a-1}x_a$. Тогда продлевать путь C_x нам не нужно. Рассмотрим вершины y_b и z_c. В терминологии замечания 15, они образуют множество Q'_i. Далее возможны два подслучая. Если $Q'_i = P'_{i+1}$, то по лемме 21 имеем $S_{i+1} \in \mathfrak{M}_2(G)$ и нам нужно продлить ровно один из путей C_y и C_z единственным отличным от $x_{a-1}x_a$ ребром этого разреза. Если же $Q'_i \neq P'_{i+1}$, то по лемме 21 каждая из вершин множества Q'_i смежна с каждой вершиной множества P'_{i+1}. Тогда мы можем продлить каждый из путей C_y и C_z одним ребром до различных вершин множества P'_{i+1}, после чего продлить те из путей, которые пришли в вершины, инцидентные ребрам разреза S_{i+1}, еще и этими ребрами.

2. Пусть у разрезов S_i и S_{i+1} нет общих ребер. Тогда во всех описанных в теореме 3 случаях можно установить такую биекцию между множествами Q_i и P_{i+1}, чтобы соответствующие друг другу вершины либо совпадали, либо были смежны. Так что мы можем продлить пути так, чтобы их концы попали в различные вершины множества P_{i+1}. После этого можно добавить к нашим путям ребра разреза S_{i+1}.

Итак, мы описали процесс построения требуемых путей. Этот процесс будем продолжать до тех пор, пока не будет добавлен тривиальный разрез S_{m+1}, после чего все пути придут в вершину v. $\square$

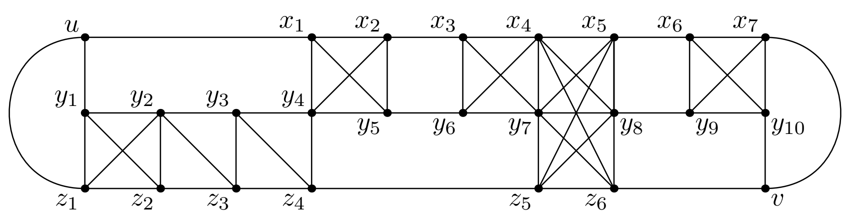

Рис. 10. Разбиение графа G на независимые uv-пути.

Список литературы

1. Д. В. Карпов, *Блоки в k-связных графах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
2. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
3. Д. В. Карпов, *Дерево разбиения двусвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 86–105.
4. Д. В. Карпов, *Дерево разрезов и минимальный k-связный граф.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **427** (2014), 22–40.
5. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
6. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *Структура разбиения трехсвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 90–148.
7. А. В. Пастор, *О разбиении трехсвязного графа на циклически реберно-четырехсвязные компоненты.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **450** (2016), 109–150.
8. А. В. Пастор, *О критических трехсвязных графах ровно с двумя вершинами степени 3. Часть 1.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **464** (2017), 95–111.
9. G. Chartrand, A. Kaugars, and D. R. Lick, *Critically n-connected graphs.* — Proc. Amer. Math. Soc. **32** (1972), 63–68.
10. R. C. Entringer and P. J. Slater, *A theorem on critically* 3*-connected graphs.* — Nanta Math. **11** no. 2, (1978), 141–145.
11. Y. O. Hamidoune, *On critically h-connected simple graphs.* — Discr. Math. **32** (1980), 257–262.

12. W. Hohberg, *The decomposition of graphs into k-connected components.* — Discr. Math. **109** (1992), 133–145.
13. L. Nebeský, *On induced subgraphs of a block.* — J. Graph Theory **1** (1977), 69–74.
14. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
15. H. J. Veldman, *Non-κ-critical vertices in graphs.* — Discr. Math. **44** (1983), 105–110.

Pastor A. V. On critically 3-connected graphs with exactly two vertices of degree 3. Part 2.

A graph G is *critically* 3-*connected*, if G is 3-connected and for any vertex $v \in V(G)$ the graph $G - v$ isn't 3-connected. R. C. Entringer and P. J. Slater proved that any critically 3-connected graph contains at least two vertices of degree 3. In the previous paper we classify all such graphs with one additional condition: two vertices of degree 3 are adjacent. In this paper we will consider the case of nonadjacent vertices of degree 3.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023;
С.-Петербургский политехнический
университет Петра Великого (СПбПУ),
ул. Политехническая 29,
195251 С.-Петербург, Россия
E-mail: pastor@pdmi.ras.ru

Поступило 28 ноября 2018 г.