Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 475, 2018 г.

**Е. С. Краско, И. Н. Лабутин, Д. Н. Москвин,
А. В. Омельченко, А. И. Храбров**

# О НЕКОТОРЫХ ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ЛЯМБДА-ИСЧИСЛЕНИЯ

## Введение

Лямбда-исчисление представляет собой формальную систему, лежащую в основе функционального программирования и позволяющую простым образом описывать семантику вычислительных процессов. Комбинаторика лямбда-исчисления включает в себя задачи перечисления тех или иных классов основных объектов лямбда-исчисления — так называемых лямбда-термов. Несмотря на то, что само лямбда-исчисление появилось еще в конце тридцатых годов прошлого века, подсчет лямбда-термов остается довольно свежей и актуальной задачей современной дискретной математики. Вызвано это как нетривиальностью формализации соответствующих перечислительных задач, так и сложностью получающихся в результате такой формализации рекуррентных соотношений.

Одной из первых статей в области перечисления бестиповых лямбда-термов была работа [1] (см. также статью [2], авторы которой несколько усовершенствовали подход, описанный в работе [1]). В этой статье было получено рекуррентное соотношение, позволяющее подсчитать количество таких лямбда-термов, содержащих не более чем $m$ свободных переменных. К сожалению, решение этого рекуррентного соотношения так и не было построено. В работах Кристофа Раффали (см. `http://www.research.att.com/~nudges/sequences/A135501`) было построено похожее рекуррентное соотношение для количества лямбда-термов, содержащих в точности $m$ свободных переменных.

В статье [3] изложен альтернативный подход к перечислению таких лямбда-термов. Стоит также отметить появившиеся в последние годы работы [4] и [5], связанные с перечислением более узких классов

*Ключевые слова*: лямбда-термы, перечисление, бестиповое и типизированное лямбда-исчисление.

бестиповых лямбда-термов, а также статьи [6] и [7], посвященные установлению изоморфизма между некоторыми классами лямбда-термов и планарных $r$-валентных карт на поверхностях.

Представленная статья состоит из двух частей. Первая из них посвящена попытке провести анализ количества бестиповых лямбда-термов с использованием аппарата производящих функций. В работе получены некоторые явные формулы, позволяющие быстро подсчитывать коэффициенты полиномов, описывающих количество соответствующих лямбда-термов. Во второй части статьи впервые формулируются комбинаторные задачи, связанные с просто типизированным лямбда-исчислением. Выделяются специальные подклассы таких задач, в которых количество лямбда-термов любого типа конечно, и строятся их явные и асимптотические решения.

## §1. Основные понятия бестипового лямбда-исчисления

Под бестиповым лябмда-исчислением понимается формальная система математической логики, предложенная А. Черчем в тридцатых годах прошлого века и формализующая понятие применения функций. Объекты этого лямбда-исчисления, называемые лямбда-термами, строятся из символов (называемых переменными лямбда-исчисления) $x, y, \ldots$ с использованием двух базовых операций — операции абстракции и операции аппликации. Операция абстракции формализует понятие объявления функции одной переменной $x$ с телом $M$ из обычного программирования на стандартных языках и формально определяется как

$$\lambda x.M,$$

где $x$ — переменная, а $M$ — произвольный лямбда-терм. Операция аппликации, в свою очередь, описывает правило применения функции $M$ к аргументу $N$ и формально записывается как $M\,N$.

Приведем несколько простейших примеров абстракций.

**Пример 1.1.** Тождественная функция

$$(\lambda x.x)$$

принимает на вход аргумент $x$ и тут же возвращает его в теле функции.

**Пример 1.2.** Константная функция

$$(\lambda x.(\lambda y.x))$$

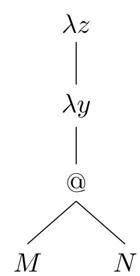
на вход принимает переменную $x$, а на выходе возвращает функцию — абстракцию $\lambda y.x$. Последняя на вход принимает аргумент $y$, а возвращает $x$. Таким образом мы действительно получили константную функцию, то есть функцию, возвращающую одно и то же значение $x$ для любого элемента $y$ из области определения.

Операция применения (аппликации) ассоциативна влево. Именно, если, к примеру, через $F$ обозначить функцию, а через $A_1$, $A_2$, $A_3$ — аргументы, то применение этой функции к трем аргументам выглядит следующим образом:

$$F\,A_1\,A_2\,A_3 = (((F\,A_1)\,A_2)\,A_3).$$

Довольно часто термы представляют графически в виде так называемых *деревьев разбора.*

**Пример 1.3.** Рассмотрим лямбда-терм $\lambda z.\lambda y.(M\,N)$. Для него дерево разбора имеет вид




Здесь значком @ обозначена вершина-аппликация.

Следующие важные понятия лямбда-исчисления — понятия свободных и связанных переменных — будут играть важную роль в данной статье.

**Определение 1.4.** Если в терме $M$ абстракции $\lambda x.M$ встречается переменная $x$, то такая переменная называется *связанной.* Если же $x$ не связана никакой вышестоящей абстракцией, то она называется *свободной.* Если все переменные в терме связаны, то его называют *замкнутым* или комбинатором.

**Пример 1.5.** В термах $\lambda x.\lambda y.x$, $\lambda x.x$ переменная $x$ является связанной, а в термах $\lambda y.x$, $x\,y$ — свободной. С точки зрения обычного программирования роль связанных переменных играют локальные аргументы функции, а роль свободных переменных — внешние (глобальные) аргументы.

С помощью понятия связанных переменных можно определить понятие *$\alpha$-эквивалентности.* Именно, интуитивно ясно, что конкретный выбор связанной переменной не очень важен — например, термы $\lambda x.x$ и $\lambda y.y$ задают одну и ту же тождественную функцию. Про такие термы как раз и говорят, что они являются $\alpha$-эквивалентными. Напротив, термы $x$ и $y$ $\alpha$-эквивалентными не являются, поскольку они не связаны никакой $\lambda$-абстракцией.

Часто на практике встречаются термы, в которых абстракция производится более одного раза по одной и той же переменной. Примером такого терма является выражение

$$\lambda x.\lambda y.\lambda x.x.$$

В такой абстракции переменная $x$ связана с самой правой абстракцией по $x$. Для устранения проблем, связанных с именами локальных переменных, а также для получения канонической формы произвольного терма в лямбда-исчислении используется так называемая *нотация де Брейна.* В этой нотации вместо имени переменной используется натуральное число, описывающее количество абстракций в дереве разбора, на которое нужно подняться, чтобы найти ту лямбду, с которой эта переменная связана. Переменная называется свободной, если ей соответствует число, большее количества абстракций на пути до нее в дереве разбора.

**Пример 1.6.** Перепишем некоторые абстракции в нотации де Брейна:

$$\begin{array}{ccc} \lambda x.x & \Longleftrightarrow & \lambda\,0, \\ \lambda x.\lambda y.x & \Longleftrightarrow & \lambda\,\lambda\,1, \\ \lambda x.\lambda y.\lambda s.\lambda z.x\,s\,(y\,s\,z) & \Longleftrightarrow & \lambda\,\lambda\,\lambda\,\lambda\,3\,1\,(2\,1\,0). \end{array}$$

Для того, чтобы в лямбда-исчислении что-то подсчитать, используется процесс так называемой бета-редукции, представляющий собой, по сути, применение абстракции к некоторому терму (подстановку в функцию $f(x)$ определенного значения $x$). Выражение вида $(\lambda x.M)\,N$ называется *редексом,* а подстановка $M[x := N]$ — *сокращением* этого редекса. Про лямбда-терм, в которых редексы отсутствуют, говорят, что он вычислен или находится *в нормальной форме.*

**Пример 1.7.** Рассмотрим абстракцию $\lambda x.2 \cdot x + 1$ и применим ее к терму $a$. В результате получим

$$(\lambda x.2 \cdot x + 1)\, a = 2 \cdot a + 1.$$

**Пример 1.8.** Рассмотрим абстракцию $\lambda x.\lambda y.x$ и применим ее к терму $\lambda x.x$. В результате получим

$$(\lambda x.\lambda y.x)\, \lambda x.x = \lambda y.\lambda x.x$$

В принципе, в одном и том же выражении может встретиться несколько редексов, и возникает законный вопрос, с какого из них начинать. Существует несколько стратегий, самая популярная из которых — так называемая нормальная стратегия. В ней вычисления начинаются с самого левого внешнего редекса.

**Теорема 1.9** (Х. Карри)**.** *Если у терма существует нормальная форма, то нормальная стратегия приводит к ней.*

**Замечание 1.10.** Не каждый терм имеет нормальную форму — например, терм

$$(\lambda x.x\, x)(\lambda x.x\, x) = [(\lambda x.xx)\,(\lambda x.xx)] = (\lambda x.x\, x)(\lambda x.x\, x),$$

то есть будет на каждом шаге вычислять сам себя.

**Теорема 1.11.** *Если у терма существует нормальная форма, то она единственна.*

## §2. Перечисление лямбда-термов в бестиповом лямбда-исчислении

С точки зрения комбинаторики основной интерес представляет перечисление замкнутых лямбда-термов размера $n$. Размеры термов рассчитываются рекуррентно согласно следующим правилам:

$$\mathrm{size}(x)=1,\ \ \mathrm{size}(\lambda x.M)=\mathrm{size}(M)+1,\ \ \mathrm{size}(M\,N)=\mathrm{size}(M)+\mathrm{size}(N)+1.$$

При таком подходе $n$ представляет собой количество вершин в дереве разбора.

К сожалению, непосредственно подсчитать количество замкнутых лямбда-термов довольно затруднительно — для получения этих чисел приходится решать более общую задачу подсчета количества $a_{n,k}$ лямбда-термов размера $n$, имеющих не более $k$ свободных переменных.

**Утверждение 2.1** (P. Lescanne, [1]). *Количество $a_{n,k}$ количество лямбда-термов размера $n$, имеющих не более $k$ свободных переменных, рассчитывается с помощью следующего рекуррентного соотношения:*

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= a_{n-1,k+1} + \sum_{j=1}^{n-2} a_{j,k} a_{n-1-j,k}, \\ a_{1,k} &= k, \qquad a_{n,k} = 0 \text{ при всех } n \leqslant 0,\ k < 0. \end{aligned} \tag{1}$$

**Доказательство.** Действительно, произвольный терм может быть либо абстракцией $\lambda x.M$, либо аппликацией $M\,N$. Представим такой терм в виде дерева разбора. В первом случае после удаления корневой вершины размер терма $\lambda x.M$ уменьшается на единицу. При этом количество свободных переменных увеличивается на единицу — связанная переменная $x$ в терме $M$ становится свободной. В случае терма $M\,N$ мы после удаления корневой вершины получаем два корневых дерева, суммарное количество вершин в которых равно $n-1$. Перебирая все возможные размеры этих двух деревьев, мы и получаем второе слагаемое в (1). □

Несложно получить явные выражения для $a_{n,k}$ в случае небольших $n$. Так,

$$\begin{aligned} a_{2,k} &= a_{1,k+1} + \sum_{j=1}^{0} a_{j,k} a_{1-j,k} = k+1, \\ a_{3,k} &= a_{2,k+1} + \sum_{j=1}^{1} a_{j,k} a_{2-j,k} = k+2+k^2, \\ a_{4,k} &= a_{3,k+1} + \sum_{j=1}^{2} a_{j,k} a_{3-j,k} = k+3+(k+1)^2+2k(k+1) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 2+(k+1)(3k+2). \end{aligned}$$

Теперь постараемся перейти от рекуррентного соотношения (1) к уравнению на производящую функцию

$$A_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k$$

для чисел $a_{n,k}$. Из рекуррентного соотношения легко увидеть, что $a_{n,k} \leqslant 2^{n^2}(k+1)^n$, поэтому ряд для $A_n(z)$ будет иметь единичный радиус сходимости. Домножая (1) на $z^k$ и суммируя по $k$ от нуля до бесконечности, получаем, что

$$A_n(z) = \frac{A_{n-1}(z) - A_{n-1}(0)}{z} + \sum_{j=1}^{n-2} A_j(z) * A_{n-1-j}(z),$$

где $*$ есть произведение Адамара. Заменим его контурным интегралом.

Пусть $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и $g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ разложение в степенной ряд рациональных функций, а $R_f$ и $R_g$ — радиусы сходимости этих степенных рядов. Зафиксируем достаточно малое по модулю значение $z$ и рассмотрим функцию $f(\zeta)g\left(\frac{z}{\zeta}\right)$. Она представляет собой ряд Лорана по степеням $\zeta$. Этот ряд заведомо сходится в кольце $\frac{|z|}{R_g} < |\zeta| < R_f$, а сама функция рациональна и задана во всей комплексной плоскости. Поскольку $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k$ — коэффициент при нулевой степени $\zeta$ в этом ряде, для $\frac{|z|}{R_g} < \rho < R_f$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta} g\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta.$$

Следовательно, для $|z| < \rho < 1$

$$A_n(z) = \frac{A_{n-1}(z) - A_{n-1}(0)}{z} + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{A_j(\zeta)}{\zeta} A_{n-1-j}\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta. \quad (2)$$

Для небольших $n$ мы можем явно вычислить функции $A_n(z)$. Так,

$$A_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \qquad A_2(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Далее, поскольку $\zeta = z$ оказывается единственной особой точкой у функций $\frac{A_j(\zeta)}{\zeta} A_{n-1-j}\left(\frac{z}{\zeta}\right)$ в круге $|\zeta| < \rho$, по теореме о вычетах имеем

$$\begin{aligned} A_3(z) &= \frac{A_2(z) - A_2(0)}{z} + A_1(z) * A_1(z) = \frac{A_2(z) - 1}{z} + \operatorname*{Res}_{s=z} \frac{zs}{(1-s)^2(s-z)^2} \\ &= \frac{2-z}{(1-z)^2} + \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} = \frac{2(1-z+z^2)}{(1-z)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4(z) &= \frac{A_3(z) - A_3(0)}{z} + 2A_1(z) * A_2(z) = \frac{A_3(z) - 2}{z} + \operatorname*{Res}_{s=z} \frac{2s^2}{(1-s)^2(s-z)^2} \\ &= \frac{2(2-2z+z^2)}{(1-z)^3} + \frac{4z}{(1-z)^3} = \frac{2(2+z^2)}{(1-z)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5(z) &= \frac{A_4(z)-A_4(0)}{z} + 2A_1(z)*A_3(z) + A_2(z)*A_2(z)\\
&= \frac{A_4(z)-4}{z} + \operatorname*{Res}_{s=z}\frac{4s(s^2-zs+z^2)}{(1-s)^2(s-z)^3} + \operatorname*{Res}_{s=z}\frac{s}{(1-s)^2(s-z)^2}\\
&= \frac{2(6-5z+2z^2)}{(1-z)^3} + \frac{4z(2+z^2)}{(1-z)^4} + \frac{1+z}{(1-z)^3} = \frac{13-14z+13z^2}{(1-z)^4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_6(z) &= \frac{A_5(z)-A_5(0)}{z} + 2A_1(z)*A_4(z) + 2A_2(z)*A_3(z)\\
&= \frac{A_5(z)-13}{z} + \operatorname*{Res}_{s=z}\frac{4s(2s^2+z^2)}{(1-s)^2(s-z)^3} + \operatorname*{Res}_{s=z}\frac{4(s^2-sz+z^2)}{(1-s)^2(s-z)^3}\\
&= \frac{38-65z+52z^2-13z^3}{(1-z)^4} + \frac{4z(6+2z+z^2)}{(1-z)^4} + \frac{4(1+2z^2)}{(1-z)^4}\\
&= \frac{(7-z)(6-5z+9z^2)}{(1-z)^4}.
\end{aligned}$$

В принципе, мы можем пойти дальше, вводя производящую функцию двух аргументов

$$A(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z)t^n.$$

Домножая (2) на $t^n$ и суммируя по $n$ от единицы до бесконечности, получаем

$$A(z,t) = t\,\frac{A(z,t)-A(0,t)}{z} + \frac{t}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}\frac{A(\zeta,t)}{\zeta}A\Big(\frac{z}{\zeta},t\Big)\,d\zeta.$$

Однако это выражение мало что дает с точки зрения анализа этой производящей функции.

Попытаемся поступить по-другому. Именно, еще в статье [1] было отмечено, что четные и нечетные значения параметра $n$ отличаются друг от друга. Для нечетных $n$ значения коэффициентов при старших степенях переменной $k$ полиномов $a_{n,k}(k)$ представляют собой числа Каталана, а для четных — биномиальные коэффициенты $\binom{n-1}{n/2}$. Как следствие, можно вместо $A(z,t)$ попытаться ввести производящие функции

$$A^o(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A^o_n(z)t^{2n-1}, \qquad A^e(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A^e_n(z)t^{2n},$$

где

$$A_n^o(z) = \frac{P_n^o(z)}{(1-z)^{n+1}},\ n = 1, 2, \ldots; \quad A_n^e(z) = \frac{P_n^e(z)}{(1-z)^{n+1}},\ n = 1, 2, \ldots,$$

а $P_n^o(z)$ и $P_n^e(z)$ — некоторые полиномы степени $n$. Уравнения для функций $A_n^o(z)$ и $A_n^e(z)$ принимают следующий вид:

$$A_n^o(z) = \frac{A_{n-1}^e(z) - A_{n-1}^e(0)}{z} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j^o(z) * A_{n-j}^o(z) + \sum_{j=1}^{n-2} A_j^e(z) * A_{n-1-j}^e(z), \quad n = 2, 3, \ldots;$$

$$A_n^e(z) = \frac{A_n^o(z) - A_n^o(0)}{z} + 2\sum_{j=1}^{n-1} A_j^o(z) * A_{n-j}^e(z), \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

$$A_1^o(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Теперь можно попытаться избавиться от произведения Адамара. Мы знаем, что произведение Адамара выражается через интеграл Коши, который, в свою очередь, можно сосчитать с помощью вычетов. При этом мы знаем вид входящих в произведение Адамара функций — все они являются рациональными функциями вида $A_n(z) = \frac{P_n(z)}{(1-z)^{n+1}}$. Как следствие,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1} A_j^o * A_{n-j}^o &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{A_j^o(\zeta)}{\zeta} \cdot A_{n-j}^o\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{P_j^o(\zeta)}{\zeta(1-\zeta)^{j+1}} \cdot \frac{P_{n-j}^o(z/\zeta)}{(1-z/\zeta)^{n-j+1}} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{P_j^o(\zeta)}{(1-\zeta)^{j+1}} \cdot \frac{\zeta^{n-j} \cdot P_{n-j}^o(z/\zeta)}{(\zeta - z)^{n-j+1}} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^{n-j}}{d\zeta^{n-j}} \left( \frac{P_j^o(\zeta)}{(1-\zeta)^{j+1}} \cdot \zeta^{n-j} \cdot P_{n-j}^o(z/\zeta) \right) \Bigg|_{\zeta = z}
\end{aligned}$$

Кроме того, зная вид функций $A_n(z)$, мы можем записать, что

$$\frac{A_{n-1}^e(z) - A_{n-1}^e(0)}{z} = \frac{P_{n-1}^e(z) - P_{n-1}^e(0) \cdot (1-z)^n}{z(1-z)^n}.$$

Учитывая все вышесказанное, вместо системы на функции $A_n^o(z)$ и $A_n^e(z)$ мы получаем следующую систему рекуррентных соотношений для полиномов $P_n^o(z)$ и $P_n^e(z)$, позволяющую достаточно быстро сосчитать искомые функции:

$$P_n^o(z) = \frac{P_{n-1}^e(z) - P_{n-1}^e(0)\cdot(1-z)^n}{z(1-z)^n}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^{n-j}}{d\zeta^{n-j}} \left( \frac{P_j^o(\zeta)}{(1-\zeta)^{j+1}} \cdot \zeta^{n-j} \cdot P_{n-j}^o\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)\right)\Bigg|_{\zeta=z}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-2} \frac{d^{n-1-j}}{d\zeta^{n-1-j}} \left( \frac{P_j^o(\zeta)}{(1-\zeta)^{j+1}} \cdot \zeta^{n-1-j} \cdot P_{n-1-j}^o\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)\right)\Bigg|_{\zeta=z}, \quad n = 2, 3, \ldots;$$
$$P_n^e(z) = \frac{P_n^o(z) - P_n^o(0)\cdot(1-z)^{n+1}}{z(1-z)^{n+1}}$$
$$+ 2\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^{n-j}}{d\zeta^{n-j}} \left( \frac{P_j^o(\zeta)}{(1-\zeta)^{j+1}} \cdot \zeta^{n-j} \cdot P_{n-j}^e\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)\right)\Bigg|_{\zeta=z}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Начальным условием для этой системы является полином $P_1^o(z) = z$.

## §3. Просто типизированные системы с одним атомом в стиле Черча

Перейдем теперь к так называемому типизированному лямбда-исчислению. В такой версии лямбда-исчисления любому терму $M$ по некоторому правилу приписывается специальная метка $\sigma$, называемая типом: $M : \sigma$.

В зависимости от правила приписывания таких меток получаются различные системы типизации. В лямбда-исчислении традиционно используют два основных подхода к определению типизированного лямбда-исчисления. В первом подходе, принадлежащем Черчу, любой терм имеет уникальный тип, однозначно выводимый из способа аннотации этого терма. Во втором подходе, принадлежащем Карри, каждый терм обладает множеством различных типов. С точки зрения программирования, в котором термы интерпретируются как программы, а типы – как их частичные спецификации, системам в стиле Черча отвечает явная типизация переменных и функций (большинство типизированных языков), тогда как системам в стиле Карри – неявная типизация (языки Haskell, Ocaml).

Мы в данной статье будем рассматривать системы в стиле Черча, при этом будем рассматривать частный случай таких систем, а именно, просто типизированное лямбда-исчисление в стиле Черча с одним типовым атомом $*$, обозначаемое ниже как $\Lambda^*$. В такой системе типы определяются по индукции следующим образом:

$$\begin{array}{rcr} & & * \in \mathrm{types}(\Lambda^*) \\ \sigma, \tau \in \mathrm{types}(\Lambda^*) & \Rightarrow & (\sigma \to \tau) \in \mathrm{types}(\Lambda^*) \end{array}$$

Иными словами, в таком лямбда-исчислении имеется лишь один базовый тип $*$ (так называемый атомарный тип), из которого с помощью единственного бинарного конструктора $\to$ получаются более сложные типы, называемые стрелочными типами. Произвольные типы мы будем обозначать буквами греческого алфавита в нижнем регистре, а операцию $\to$ будем считать ассоциативной вправо, то есть считать, что $\sigma \to \tau \to \pi$ означает $(\sigma \to (\tau \to \pi))$.

Теперь сформулируем основные правила типизации термов. Прежде всего, будем считать, что связанные переменные в лямбда-абстракциях $\lambda x.M$ явным образом аннотируются типами, что записывается так:

$$\lambda x^\sigma.M, \quad \text{где} \;\; \sigma \in \Lambda^*.$$

Для приписывания типа свободным переменным используется понятие контекста, под которым понимается множество (возможно пустое) различных переменных аннотированных типами, например,

$$\Gamma = \{f : * \to *, g : * \to * \to *, x : *\}.$$

Фигурные скобки при указании контекстов обычно опускаются. Над контекстами задается операция расширения: если $\Gamma$ – контекст, $x$ – переменная, не входящая в $\Gamma$, а $\sigma$ – тип, то $\Gamma, x : \sigma$ также является контекстом. Тот факт, что в контексте $\Gamma$ терм $M$ имеет тип $\sigma$, записывается обычно как

$$\Gamma \vdash M : \sigma \;\; \text{или} \;\; \vdash M : \sigma, \;\; \text{если контекст } \Gamma \text{ пуст.}$$

Теперь мы можем сформулировать следующее определение.

**Определение 3.1.** Говорят, что терм $M$ имеет тип $\sigma$ в контексте $\Gamma$, если существует вывод этого утверждения по следующим правилам:

$$\begin{array}{lcl} x : \rho \in \Gamma & \Rightarrow & \Gamma \vdash x : \rho \\ \Gamma \vdash P : \rho \to \tau, \quad \Gamma \vdash N : \rho & \Rightarrow & \Gamma \vdash PN : \tau \\ \Gamma, x : \rho \vdash P : \tau & \Rightarrow & \Gamma \vdash (\lambda x^\rho.P) : \rho \to \tau \end{array}$$

Первое правило, по сути, говорит нам о том, что если терм является переменной, то мы можем типизировать его произвольным образом, упомянув эту типизацию в контексте. Например,

$$\begin{array}{lcl} y : * \to *, x : * & \vdash & x : * \\ y : * \to *, x : * & \vdash & y : * \to * \end{array}$$

Второе правило утверждает, что в случае аппликации $P\,N$ терм $P$ обязан иметь стрелочный тип $P : \rho \to \tau$, а $N$ иметь тип $\rho$; при этом терм $P\,N$ будет иметь тип результата применения функции, то есть $(P\,N) : \tau$. Например,

$$\begin{array}{lcl} y : * \to *, x : * & \vdash & y\,x : * \\ g : * \to * \to *, x : * & \vdash & g\,x : * \to * \\ g : * \to * \to *, x : * & \vdash & g\,x\,x : * \end{array}$$

Наконец, третье правило говорит нам о том, что в случае абстракции $\lambda x.P$ ее тип должен быть стрелочным, тип аргумента $x$ должен быть $\rho$, а тип тела абстракции — $\tau$. Формально если в контексте $\Gamma$, расширенным утверждением $x : \rho$, выводимо, что $P$ имеет тип $\tau$, то тогда терм $\lambda x^\rho.P$ имеет тип $\rho \to \tau$ в исходном контексте $\Gamma$. При этом утверждение $x : \rho$ включать в контекст абстракции $\lambda x^\rho.P$ уже не надо: переменная $x$ оказывается связанной, поэтому ее типизация в контексте не нужна. Например,

$$\begin{array}{lcl} x : * & \vdash & x : * \\ & \vdash & \lambda x^*.x : * \to * \\ x : *, y : * & \vdash & x : * \\ x : * & \vdash & \lambda y^*.x : * \to * \\ & \vdash & \lambda x^*.\lambda y^*.x : * \to * \to * \end{array}$$

Последний переход здесь иллюстрирует сужение контекста при применении третьего правила вывода.

Пусть теперь у нас терм $M$ имеет в контексте $\Gamma$ тип $\sigma_1 \to \ldots \to \sigma_n \to *$. В принципе, терм $M$ может быть сколь угодно сложным. Мы будем рассматривать термы $M$ специального вида.

**Определение 3.2.** Говорят, что терм $M$ находится в длинной нормальной форме (LNF-форме), если он имеет вид

$$\lambda y_1^{\sigma_1} \ldots y_n^{\sigma_n}.x\,M_1 \ldots M_k,$$

и все $M_j$ $(j = 1 \ldots k)$ также находятся в длинной нормальной форме (см. [8, 9]). При этом $x$ может быть как связанной переменной (то есть найдется такое $i$, что $y_i = x$), так и свободной переменной.

Заметим, что так как терм $M$ имеет в контексте $\Gamma$ тип $\sigma_1 \to \ldots \to \sigma_n \to *$, то тело $x\,M_1 \ldots M_k$ этого терма всегда имеет тип $*$.

Наша основная задача — перечислить все замкнутые лямбда-термы, находящиеся в длинной нормальной форме. При этом мы будем перечислять все типы по их размеру $n$ (общему количеству атомов в типе), а для каждого из типов этого размера $n$ будем перечислять его обитателей. Заметим, что существуют типы, которым не отвечает ни один терм. Такие типы называются необитаемыми (ненаселенными) типами. У обитаемых (населенных) типов могут быть несколько термов этого типа. Мы хотим для каждого типа перечислить его обитателей.

Для подавляющего большинства систем типов последняя задача неразрешима или имеет высокую сложность. К счастью, для простой системы с одним типовым атомом $*$ населенность имеет довольно простую регулярную структуру, описывающуюся следующей теоремой.

**Теорема 3.3** (R. Statman, 1982)**.** *Тип $\sigma = \sigma_1 \to \ldots \to \sigma_n \to *$ в системе $\Lambda^*$ с одним типовым атомом $*$ ненаселен тогда и только тогда, когда все входящие в него $\sigma_i$ населены.*

Доказательство можно посмотреть, например, в [8].

Заметим, что мы перечисляем лишь замкнутые типы. Как следствие, базовый тип $*$, описывающий свободные переменные, необитаем. Этот факт наряду с теоремой 3.3 позволяет анализировать обитаемость типа простой рекурсией по его структуре.

Оказывается, однако, что у многих типов имеется бесконечное число длинных нормальных обитателей. Например, LNF-обитателями типа $(* \to *) \to * \to *$ служат термы, носящие название чисел (или нумералов) Черча

$$\begin{array}{lll} \lambda f^{*\to *}\lambda x^*.\, x, & \lambda f^{*\to *}\lambda x^*.\, f\,x, & \\ \lambda f^{*\to *}\lambda x^*.\, f\,(f\,x), & \lambda f^{*\to *}\lambda x^*.\, f\,(f\,(f\,x)), & \ldots \end{array}$$

Поэтому мы ограничим исследуемые термы классом простейших.

**Определение 3.4.** Длинный нормальный обитатель типа называется *простейшим,* если его невозможно упростить, заменив какой-либо его подтерм на собственный подтерм этого подтерма с сохранением типизации.

Например, для типа $(* \to *) \to * \to *$ терм $\lambda f^{*\to *}\lambda x^*.\, x$ является простейшим обитателем, а термы $\lambda f^{*\to *}\lambda x^*.\, f\,x$ и $\lambda f^{*\to *}\lambda x^*.\, f\,(f\,x)$ — нет, поскольку мы можем заменить тела двух последних термов на переменную $x$. У типа $* \to * \to *$ оба обитателя $\lambda x^*.\, \lambda y^*.\, y$ и $\lambda x^*.\, \lambda y^*.\, x$ простейшие. Единственным простейшим обитателем типа $((* \to *) \to *) \to *$ является $\lambda f^{(*\to *)\to *}.\, f\,(\lambda x^*.\, x)$. Обратим внимание, что тело этого терма (типа $*$) содержит подтерм $x$ того же типа. Тем не менее терм является простейшим: замена всего тела на $x$ недопустима из-за нарушения областей видимости.

## §4. Перечисление населенных и ненаселенных типов

Напомним, что мы определили размер типа как число атомов в нем. Рассмотрим выражение вида

$$\underbrace{* \to * \to * \to * \to \ldots \to *}_{n}$$

Без учета соглашения о правой ассоциативности операции $\to$ это выражение становится некоторым типом $\sigma$, как только мы правильно расставим скобки в нем. Количество способов расстановки скобок в таком выражении, а значит, и количество всех типов размера $n$, равно числу Каталана $C_{n-1}$ (см., например, [10]).

Обозначим через $I_n$ количество населенных типов размера $n$, а через $U_n$ — количество ненаселенных типов того же размера. Заметим, что их сумма дает число Каталана $C_{n-1}$:

$$U_n + I_n = C_{n-1}. \tag{3}$$

Отметим также, что $I_1 = 0$ и $U_1 = 1$, поскольку единственный тип размера 1 (тип $*$) не населен. Нам в дополнение к (3) нужно получить еще одно рекуррентное соотношение, связывающее числа $U_n$ и $I_n$. Для этого отделим в произвольном типе

$$\rho = \sigma_1 \to \ldots \to \sigma_n \to *$$

размера $n$ первый аргумент $\sigma_1$ и предположим, что размер $\sigma_1$ равен $k$. Размер типа

$$\tau := \sigma_2 \to \ldots \to \sigma_n \to *$$

при этом оказывается равным $n - k$. Допустим, что тип $\rho$ необитаем. Согласно теореме 3.3, тип $\rho$ ненаселен, если все входящие в него $\sigma_i$ населены. Как следствие, тип $\sigma_1$ населен, а тип $\tau$ — ненаселен. Эти соображения позволяют нам с учетом (3) записать следующее рекуррентное соотношение на числа $U_n$:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n-1} I_k U_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} (C_{k-1} - U_k) U_{n-k}. \tag{4}$$

На языке производящих функций $f(z) = \widetilde{f}(z)/z$,

$$\widetilde{f}(z) = U_1 z + U_2 z^2 + \ldots + U_n z^n + \ldots,$$

это рекуррентное соотношение можно переписать в виде

$$f(z) - 1 = zh(z)f(z) - zf^2(z), \qquad \text{где} \qquad h(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$$

представляет собой производящую функцию для чисел Каталана $C_n$. Решая последнее уравнение, получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(z) &= \frac{\sqrt{2+12z+2\sqrt{1-4z}} - 1 - \sqrt{1-4z}}{4} \\ &= z + z^3 + z^4 + 5z^5 + 11z^6 + 41z^7 + 120z^8 + \ldots\end{aligned}$$

Данная числовая последовательность представляет собой последовательность $A055113$ на сайте `oeis.org`, описывающую количество способов расстановки скобок, обеспечивающих истинность выражения $f \Rightarrow f \Rightarrow \ldots \Rightarrow f$, где $f$ это false, а $\Rightarrow$ представляет собой импликацию. Данный факт находится в полном согласии с соответствием Карри–Говарда и тем фактом, что для логической системы с одной пропозициональной переменной нет различия между интуиционистскими и классическими тавтологиями.

Получим приближенные значения чисел $U_n$ и $I_n$ при больших значениях параметра $n$.

**Теорема 4.1.** *Количество ненаселенных и населенных типов размера $n$ при $n \to \infty$ равно*

$$U_n = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2^{2n-3}}{n^{3/2}\sqrt{\pi}} + o\left(\frac{2^{2n}}{n^2}\right), \quad I_n = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2^{2n-3}}{n^{3/2}\sqrt{\pi}} + o\left(\frac{2^{2n}}{n^2}\right).$$

Для доказательства нам понадобятся две леммы, первая из которых получается применением формул Стирлинга и Эйлера–Гаусса к формуле для коэффициентов ряда Тейлора для степенной функции (см. также [11, лемма 1]), а вторая заимствована из [11, лемма 2].

**Лемма 4.2.** *Пусть*

$$(1-z)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{p,n} z^n$$

*есть разложение функции* $(1-z)^p$ *по формуле Тейлора в точке* $z=0$. *Тогда*

$$\lambda_{1/2,n} = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}} + O\Big(\frac{1}{n^{5/2}}\Big), \quad \lambda_{3/2,n} = O\Big(\frac{1}{n^{5/2}}\Big),$$

$$\lambda_{1/4,n} = \frac{-1}{4\Gamma\big(\frac{3}{4}\big)n^{5/4}} + O\Big(\frac{1}{n^{5/2}}\Big), \ \ \lambda_{3/4,n} = O\Big(\frac{1}{n^{7/4}}\Big) \ \text{и}\ \lambda_{5/4,n} = O\Big(\frac{1}{n^{9/4}}\Big).$$

**Лемма 4.3.** *Пусть функция*

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n$$

*голоморфна в круге* $|z|<1$. *Если* $h(z)$, $h'(z)$ *и* $h''(z)$ *допускают непрерывное продолжение на круг* $|z| \leqslant 1$, *то* $\mu_n = o(1/n^2)$.

**Доказательство теоремы 4.1.** Функция $F(z) = \widetilde{f}(z/4)$ голоморфна в круге $|z| < 1$ и имеет единственную нерегулярную точку $z = 1$. Переходя от переменной $z$ к переменной $w = \sqrt{1-z}$, мы получаем функцию

$$\frac{\sqrt{5+2w-3w^2}-1-w}{4} =: G(w),$$

голоморфную в круге $|w| < 1$. Раскладывая $G(w)$ в ряд Тейлора внутри этого круга, получаем

$$G(w) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \Big(\frac{1}{4\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\Big)w - \frac{2}{5\sqrt{5}}w^2 - \frac{2}{25\sqrt{5}}w^3 + G_1(w)w^4,$$

где $G_1(w)$ также представляет собой функцию, голоморфную в круге $|w| < 1$. Непосредственным вычислением легко проверить, что функция $G_1(\sqrt{1-z})(1-z)^2$, а также первые две ее производные продолжаются до непрерывной функции в точке $z = 1$. Поэтому по лемме 4.3 коэффициенты при $z^n$ функции

$$H(z) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{2}{5\sqrt{5}}(1-z) + G_1(\sqrt{1-z})(1-z)^2$$

имеют порядок $o(1/n^2)$. Как следствие, числа $U_n 4^{-n}$, являющиеся коэффициентами при $z^n$ функции $F(z)$, отличаются от соответствующих коэффициентов функции

$$\Big(\frac{1}{4\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\Big)(1-z)^{1/2} - \frac{2}{25\sqrt{5}}(1-z)^{3/2}$$

на $o(1/n^2)$. Следовательно, из леммы 4.2 имеем

$$U_n 4^{-n} = \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{5}}\Big)\frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}} + O\Big(\frac{1}{n^{5/2}}\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

откуда и получаем утверждение теоремы для чисел $U_n$. Поскольку $C_{n-1} = \frac{2^{2n-2}}{\sqrt{\pi}n^{3/2}} + o(n^{-2})$, доля ненаселенных типов равна $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \approx 0{,}276$. $\square$

## §5. Перечисление простейших обитателей типов для $\Lambda^*$

Перейдем теперь к задаче определения количества простейших обитателей в населенных типах. Важным моментом, упрощающим процедуру перечисления, является наличие теоремы о единственности типа в системе $\Lambda^*$, утверждающей, что любой замкнутый терм имеет ровно один тип. Эта теорема гарантирует, что, генерируя LNF-обитателей последовательно по каждому из возможных типов, мы не посчитаем какой-то терм несколько раз.

Определим функцию inhabs, возвращающую по переданному типу множество его простейших замкнутых LNF-обитателей. Как мы уже несколько раз отмечали, $\mathrm{inhabs}(*) = \emptyset$. Рассмотрим тип

$$\rho = \sigma \to \tau, \qquad \sigma = \sigma_1 \to \ldots \to \sigma_r \to *, \qquad \tau = \tau_1 \to \ldots \to \tau_m \to *.$$

Возможны 4 случая.

(I) Тип $\sigma$ обитаем, тип $\tau$ необитаем. Тогда, на основании теоремы 3.3, тип $\rho$ необитаем.

(II) Типы $\sigma$ и $\tau$ обитаемы. Тогда тип $\rho$ обитаем, а его простейшие обитатели получаются из простейших обитателей $\tau$ добавлением абстрактора:

$$\forall M \in \mathrm{inhabs}(\tau) \qquad \lambda x^\sigma . M \in \mathrm{inhabs}(\rho).$$

При этом число простейших обитателей $\rho$ совпадает с числом простейших обитателей $\tau$:

$$|\,\mathrm{inhabs}(\rho)| = |\,\mathrm{inhabs}(\tau)|.$$

(III) Типы $\sigma$ и $\tau$ необитаемы. Мы выше сказали, что

$$\sigma = \sigma_1 \to \ldots \to \sigma_r \to *.$$

Из теоремы 3.3 следует, что все $\sigma_i$ обитаемы. Выбирая для каждого $\sigma_i$ произвольного обитателя $N_i \in \mathrm{inhabs}(\sigma_i)$, получаем одного из простейших обитателей $\rho$:

$$\lambda x^\sigma y_1^{\tau_1} \dots y_m^{\tau_m}.x\, N_1 \dots N_r \in \mathrm{inhabs}(\rho)$$

Перебирая все $N_i$, получаем

$$|\,\mathrm{inhabs}(\rho)| = \prod_{i=1}^{r} |\,\mathrm{inhabs}(\sigma_i)|.$$

(IV) Тип $\sigma$ необитаем, тип $\tau$ обитаем. Тогда тип $\rho$ обитаем, а населить его простейшими обитателями можно с помощью рассуждений, описанных в двух предыдущих пунктах:

$$|\,\mathrm{inhabs}(\rho)| = |\,\mathrm{inhabs}(\tau)| + \prod_{i=1}^{r} |\,\mathrm{inhabs}(\sigma_i)|. \tag{5}$$

Несложно убедиться в том, что формула (5) описывает все четыре рассмотренные выше случая. Действительно, необитаемость $\tau$ обнуляет первое слагаемое, а обитаемость $\sigma$ приводит к обязательному наличию в произведении $\prod_{i=1}^{r} |\,\mathrm{inhabs}(\sigma_i)|$ нулевого сомножителя.

Может показаться, что во втором и в четвертом случаях мы можем использовать переменную $x$ для конструирования новых термов, населяющих $\rho$. Оказывается, однако, что эти термы не будут простейшими. Именно, справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.1.** (а) *Пусть тип $\sigma$ необитаем. Тогда LNF-обитатель типа $\sigma \to \tau$ вида $\lambda x^\sigma. M$, построенный с использованием переменной $x$ не в головной позиции тела $M$, не является простейшим.*

(б) *Пусть тип $\sigma$ обитаем. Тогда LNF-обитатель типа $\sigma \to \tau$ вида $\lambda x^\sigma. M$, построенный с использованием переменной $x$ в $M$, не является простейшим.*

**Доказательство.** По сути, теорема утверждает, что любой простейший LNF-обитатель имеет головные переменные, связанные в ближайшем внешнем абстракторе. Назовем другие вхождения переменных *нелокальными.* Таких вхождений в LNF-обитателе может быть несколько. Не ограничивая общности, мы можем рассматривать ситуацию с таким вхождением некоторой нелокальной переменной в голову LNF-подтерма, у которого список термов, следующих за головой, уже не содержит никаких нелокальных вхождений.

Пусть в $M$ есть вхождение $x$ и тип этой переменной $\sigma = \sigma_1 \to \ldots \to \sigma_r \to *$. Тогда тело этого вхождения в силу требования LNF должно иметь вид

$$x\, M_1 \ldots M_r \tag{6}$$

где $M_i : \sigma_i$ для каждого $i = 1 \ldots r$ и $r \geq 0$.

Предположим вначале, что $\sigma$ необитаем. Отметим, что при этом все $\sigma_i$ обитаемы. Предположим, что терм (6) не совпадает с телом $M$, то есть вхождение $x$ нелокально. Покажем, что в этом случае $\lambda x^\sigma.\, M$ не является простейшим. По договоренности никакой $M_i$ не содержит нелокальных переменных. Это значит, что каждый $M_i$ замкнут, то есть является замкнутым обитателем $\sigma_i$. Но тогда единственной свободной переменной (6) служит $x$, то есть мы можем безопасно заменить тело терма $M$ на выражение (6).

Рассмотрим теперь случай, когда $\sigma$ обитаем. При этом (6) может совпадать с телом $M$. Тогда по крайней мере один $\sigma_i$ необитаем, а значит, нет возможности построить для $M_i$ замкнутого обитателя. Но тогда в нем должно присутствовать нелокальное вхождение какой-то внешней для него переменной. Если ее тип опять обитаем, то один из аргументов обязан быть необитаемым, и в теле соответствующего LNF-подтерма опять должно присутствовать нелокальное вхождение. Таким образом из конечности выражения получаем, что самое правое нелокальное вхождение всегда должно иметь необитаемый тип. □

Приведем пример, поясняющий приведенное доказательство. Для типа

$$(* \to *) \to ((* \to *) \to *) \to *$$

LNF-обитателем, содержащим оба класса нелокальных переменных, служит

$$\lambda f^{* \to *} \lambda g^{(* \to *) \to *}.\, g\, (\lambda x^*.\, f\, x).$$

Тип $f$ обитаем (а тип его аргумента нет), и нелокальное вхождение $f$ в терме с необходимостью сопровождается наличием нелокального вхождения терма $x$ необитаемого типа $*$. Замена $f\, x$ на $x$ безопасна и порождает простейшего LNF-обитателя приведенного типа.

Получим теперь рекуррентное соотношение для суммарного количества $a_n$ простейших обитателей всех типов размера $n$. Так как единственный тип $*$ размера 1 необитаем, то $a_1 = 0$. У единственного типа $* \to *$ размера 2 есть только один простейший обитатель $\lambda x.x$, поэтому $a_2 = 1$.

**Теорема 5.2.** *Количество $a_n$ простейших обитателей типов размера $n$ определяется из следующей системы рекуррентных соотношений:*

$$\begin{cases} b_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}, & b_1 = 1 \\ a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} C_{k-1}(a_{n-k} + b_{n-k}), & a_1 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

*Здесь $C_{k-1}$ — числа Каталана.*

**Доказательство.** Числа $a_n$ можно получить, просуммировав (5) по всем типам $\rho : \sigma \to \tau$ размера $|\rho| = n$:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{|\rho|=n} \Big( |\operatorname{inhabs}(\tau)| + \prod_{i=1}^{r} |\operatorname{inhabs}(\sigma_i)| \Big) \\ &= \sum_{|\rho|=n} |\operatorname{inhabs}(\tau)| + \sum_{|\rho|=n} \prod_{i=1}^{r} |\operatorname{inhabs}(\sigma_i)|. \end{aligned} \tag{8}$$

Зафиксируем размер $|\sigma| = k$, $k = 1, \ldots, n-1$ типа $\sigma$; тогда размер $|\tau| = n - k$. При любом фиксированном $\sigma$ размера $|\sigma| = k$ имеем

$$\sum_{|\tau|=n-k} |\operatorname{inhabs}(\tau)| = a_{n-k}.$$

Так как $\sigma$ при этом может быть как обитаемыми, так и необитаемыми, то общее количество таких $\sigma$ равно $C_{k-1}$. Суммируя по всем $k$, находим первую часть входящей в правую часть (8) суммы:

$$\sum_{|\rho|=n} |\operatorname{inhabs}(\tau)| = \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1} a_{n-k}.$$

Зафиксируем теперь все размеры $k_i$ типов $\sigma_i$, $k_1+k_2+\ldots+k_r = k-1$. Тогда произведение

$$\prod_{i=1}^{r} |\operatorname{inhabs}(\sigma_i)| = \prod_{i=1}^{r} a_{k_i}.$$

Так как при этом тип $\tau$ может вновь быть как обитаемым, так и необитаемым, то

$$\sum_{|\rho|=n} \prod_{i=1}^{r} |\operatorname{inhabs}(\sigma_i)| = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-k-1} \Big( \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_r=k-1} \prod_{i=1}^{r} a_{k_i} \Big).$$

Упростим полученное выражение. Введя числа

$$b_n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_r=n-1} \prod_{i=1}^{r} a_{k_i},$$

мы из (8) получаем для $a_n$ выражение

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1} a_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1}(a_{n-k} + b_{n-k}).$$

При этом рекуррентное соотношение

$$b_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}, \qquad b_1 = 1$$

мы получаем, зафиксировав тип $\sigma_1$ размера $|\sigma_1|{=}k$, $k{=}1,\ldots,n{-}1$. $\square$

Для решения системы (7) введем производящие функции $f(z)$, $g(z)$ и $h(z)$ для числовых последовательностей $a_n$, $b_n$ и $C_n$ соответственно. Тогда из (7) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} g(z) = f(z)g(z) + z, \\ f(x) = zh(z)(f(z) + g(z)), \end{cases}$$

решение которой дает для $f(z)$ выражение вида

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1 - \sqrt{2\sqrt{1-4z} - (1-4z)}}{2} \\ &= z^2 + 2z^3 + 6z^4 + 18z^5 + 58z^6 + 192z^7 + 653z^8 + 2262z^9 + \ldots. \end{aligned}$$

Получим приближенные значения коэффициентов $a_n$ производящей функции при больших значениях параметра $n$.

**Теорема 5.3.** *Количество $a_n$ простейших обитателей типов размера $n$ при $n \to \infty$ равно*

$$a_n = \frac{4^{n-1}}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) n^{5/4}} + O\Big(\frac{4^n}{n^{7/4}}\Big).$$

**Доказательство.** Функция $F(z) = f(z/4)$ голоморфна в круге $|z| < 1$ и имеет единственную нерегулярную точку $z = 1$. Переходя от $z$ к переменной $w = \sqrt[4]{1-z}$, получаем голоморфную в круге $|w| < 1$ функцию

$$\frac{1 - w\sqrt{2 - w^2}}{2} =: G(w).$$

Раскладывая ее в ряд Тейлора, получаем

$$G(w) = \frac{1}{2} - \frac{w}{\sqrt{2}} - \frac{w^3}{4\sqrt{2}} - \frac{w^5}{32\sqrt{2}} + G_1(w)w^7,$$

где $G_1(w)$ также голоморфна в круге $|w| < 1$. Непосредственным вычислением легко проверить, что функция $G_1(\sqrt[4]{1-z})(1-z)^{7/4}$, а также первые две ее производные продолжаются до непрерывных в точке $z = 1$ функций. Тогда по лемме 4.3 коэффициенты при $z^n$ функции

$$H(z) = \frac{1}{2} + G_1(\sqrt[4]{1-z})(1-z)^{7/4}$$

имеют порядок $o(1/n^2)$. Поэтому числа $a_{n-2}4^{-n}$, являющиеся коэффициентами при $z^n$ функции $F(z)$, отличаются от соответствующих коэффициентов функции

$$-\frac{(1-z)^{1/4}}{\sqrt{2}} - \frac{(1-z)^{3/4}}{4\sqrt{2}} - \frac{(1-z)^{5/4}}{32\sqrt{2}}$$

на $o(1/n^2)$. Теперь из леммы 4.2 следует, что

$$a_{n-2}4^{-n} = \frac{1}{4\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)n^{5/4}} + O\Big(\frac{1}{n^{7/4}}\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

откуда и получается утверждение теоремы. □

## Список литературы


1. P. Lescanne, *On counting untyped lambda terms.* — Theor. Comput. Sci., **474** (2013), 80–97.
2. K. Grygiel, P. Lescanne, *Counting and generating lambda terms.* — J. Funct. Programming, **23(5)** (2013), 594–628.
3. J. Tromp, *Binary lambda calculus and combinatory logic.* — In: Kolmogorov Complexity and Applications, volume 06051 of Dagstuhl Seminar Proceedings. Internationales Begegnungs- und Forschungszentrum fuer Informatik (IBFI), Schloss Dagstuhl, Germany, 2006.
4. O. Bodini, D. Gardy, B. Gittenberger, *Lambda-terms of bounded unary height.* — 2011 Proceedings of the Eighth Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO), 2011.
5. K. Grygiel, P. Lescanne, *Counting and generating terms in the binary lambda calculus.* — J. Funct. Programming, **25**, No. e24 (2015).
6. N. Zeilberger, A. Giorgetti, *A correspondence between rooted planar maps and normal planar lambda terms.* — Logical Methods in Computer Science, **11** (2015), 1–39.
7. N. Zeilberger, *Linear lambda terms as invariants of rooted trivalent maps.* — J. Functional Programming, **26**, No. 24 (2016). `arXiv:1512.06751`, 2015.

8. H. Barendregt, W. Dekkers, R. Statman, *Lambda Calculus with Types.* Cambridge University Press, New York, 2013.
9. J. R. Hindley, *Basic Simple Type Theory.* Cambridge University Press, New York, 1997.
10. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции.* М., Мир, 2005.
11. P. Flajolet, E. Fusy, X. Gourdon, D. Panario, N. Pouyanne, *A Hybrid of Darboux's Method and Singularity Analysis in Combinatorial Asymptotics.* — The electronic journal of combinatorics, **13**, 2006, #R103.

Krasko E. S., Labutin I. N., Moskvin D. N., Omelchenko A. V., Khrabrov A. I. On some enumerative problems of lambda calculus.

The article considers combinatorial problems associated with the enumeration of lambda-terms in a untyped lambda calculus, as well as in simply typed systems with a single atom in the style of Church. For the case of untyped lambda calculus a system of equations for generating functions is constructed which describes the number of lambda terms. In the case of typed lambda calculus, both the inhabited types and the simplest inhabitants in them are enumerated.

Национальный
исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
ул. Союза Печатников, д. 16,
Санкт-Петербург 190008, Россия
*E-mail*: krasko.evgeniy@gmail.com
labutin.igorl@gmail.com
dmoskvin@gmail.com
avo.travel@gmail.com
aikhrabrov@mail.ru

Поступило 21 ноября 2018 г.