

Д. В. Карпов

ОБ ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЯХ БЕЗ ВЕРШИН СТЕПЕНИ 2 В ПЛОСКИХ ТРИАНГУЛЯЦИЯХ

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество – через $v(G)$. Везде в работе графы не содержат петель. Кратные рёбра допускаются.

Плоский граф – это изображение графа на плоскости, в котором вершины изображены точками, а рёбра – несамопересекающимися ломаными, причем разные рёбра не имеют общих внутренних точек. Части, на которые граф разбивает плоскость, называются *гранями*. Если плоский граф двусвязен, то граница каждой его грани – простой цикл. Верно и обратное: если граница каждой грани плоского графа – простой цикл, то граф, очевидно, двусвязен.

Триангуляция – плоский граф, граница каждой грани которого – треугольник. Известно, что любой плоский граф без петель с хотя бы тремя вершинами можно триангулировать, то есть, добавить рёбер (но не вершин) так, чтобы получилась триангуляция. Триангуляции занимают важное место в теории графов, особенно в работах, касающихся раскрасок планарных графов – стоит упомянуть различные подходы к доказательству теоремы 4 красок и работы Томассена по списочным раскраскам плоских графов [1, 2]. В индукционных доказательствах часто появляются *почти триангуляции*.

Определение 1. *Почти триангуляция* – это двусвязный плоский граф, в котором не более чем одна грань – не треугольник.

Триангуляция является частным случаем почти триангуляции. В этой заметке мы предлагается простое и несколько неожиданное свойство почти триангуляций, никак не связанное с предыдущими исследованиями.

Ключевые слова: плоский граф, триангуляция, остовное дерево.

Исследования выполнены при поддержке правительства РФ (грант 14.Z50.31.0030), гранта Президента РФ НШ-3856.2014.1 и гранта РФФИ 14-01-00156.

Теорема 1. Пусть G – почти триангуляция, $v(G) > 3$. Тогда G имеет остовное дерево без вершин степени 2.

Есть немало статей, в которых обсуждаются различные вопросы об остовных деревьях связных графов и свойствах этих деревьев. Никаких результатов по остовным деревьям без вершин степени 2 автору не известно.

Из нашей теоремы следует, что в плоской почти триангуляции G есть остовное дерево, в котором более $\frac{v(G)}{2}$ листьев. В плоской триангуляции на n вершинах не более $3n - 6$ рёбер, то есть, средняя степень вершин менее 6, а минимальная степень вершины – от 2 до 5. Интересно сравнить наш результат с доказанным в [3] – в связном графе минимальной степени не менее 5 есть остовное дерево, в котором более половины вершин – листья. Впрочем, этот результат имеет лишь отдаленное сходство с теоремой 1.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Начнем с несложной леммы.

Лемма 1. Пусть $m \geq 5$, а плоский граф представляет собой цикл $v_1v_2 \dots v_m$, внутренняя область которого триангулирована непересекающимися диагоналями. Тогда выполнено одно из двух следующих утверждений.

1° Проведена диагональ v_iv_{i+3} (отрезающая четырёхугольник).

2° Проведены две диагонали v_iv_{i-2} и v_iv_{i+2} (отрезающие треугольники).

Доказательство. Хорошо известно, что граф T , вершины которого – треугольники разбиения, а две вершины смежны, если и только если соответствующие треугольники имеют общую сторону – дерево. Подвесим дерево T за любую из его вершин w (то есть, разобьем вершины на уровни $L_0 = \{w\}$, $L_1, \dots, L_k$, где вершины из L_i имеют расстояние i до w). Таким образом, у любой вершины не более одного предка (смежной с ней вершины из предыдущего уровня) и от 0 до 2 потомков (смежных с ней вершин из следующего уровня).

Пусть k – максимальное такое число, что $L_k \neq \emptyset$. Рассмотрим вершину $a \in L_k$ и ее предка $b \in L_{k-1}$. Очевидно, a – лист дерева T . Предположим, что b не имеет отличных от a потомков. Так как $m \geq 5$,

тогда b имеет предка, а диагональ, отрезающая b от ее предка, отрезает ровно два треугольника: a и b (см. рисунок 1а). Таким образом, выполнено 1°.

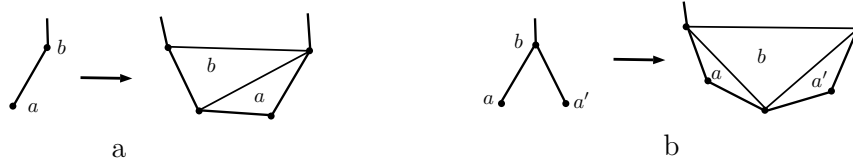


Рис. 1. Триангуляция цикла и соответствующее дерево.

Предположим, что b имеет еще одного потомка $a' \in L_k$. Тогда a и a' – листья дерева T . Следовательно, каждый из треугольников a и a' отрезан диагональю от остальных, и эти две диагонали имеют общую вершину (одну из вершин треугольника b , см. рисунок 1б). Таким образом, выполнено 2°. $\square$

Доказательство теоремы 1. Не умаляя общности можно считать, что единственная грань G , которая может быть не треугольником – внешняя, а цикл $C = a_1 \dots a_n$ – ее граница (нумерация вершин – циклическая). Доказывая утверждение для почти триангуляции G , будем считать, что для всех меньших почти триангуляций (то есть, имеющих меньше чем G вершин или столько же вершин, но меньше рёбер) оно уже доказано. Базу для графов на 4 или 5 вершинах несложно проверить: все такие графы и их остовные деревья без вершин степени 2 изображены на рисунке 2. Далее считаем, что $v(G) \geq 6$ и рассмотрим два случая.

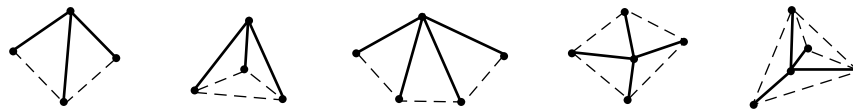


Рис. 2. Почти триангуляции с 4 и 5 вершинами и их остовные деревья.

1. Существует грань $a_i a_{i+1} x$, где $x \notin V(C)$.

Тогда граф $G' = G - a_i a_{i+1}$ двусвязен, так как вершины a_i и a_{i+1} лежат на цикле $C' = a_{i+1} C a_i x$. Очевидно, G' – почти триангуляция с внешним циклом C' (см. рисунок 3), $v(G') = v(G)$ и $e(G') < e(G)$. Тогда G' имеет остовное дерево T без вершин степени 2, оно же подойдет и для G .

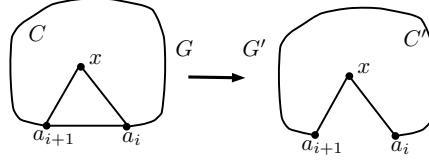


Рис. 3. Графы G и G' .

2. Для каждого ребра $a_i a_{i+1}$ цикла C третья вершина внутренней грани-треугольника, содержащей $a_i a_{i+1}$, лежит на C .

Пусть $H = G(V(C))$ – индуцированный подграф G на вершинах цикла C . Рассмотрим H как плоский граф с внешним циклом C . Очевидно, H двусвязен, а все внутренние грани H , содержащие рёбра внешнего цикла C – треугольные грани G . Тогда случай $n = 3$ невозможен, а в случае $n = 4$ мы имеем $G = H$ и доказываемое утверждение очевидно.

Границы нетреугольных внутренних граней H – циклы, не имеющие общих рёбер с C . Произвольно триангулируем все такие грани диагоналями и получим триангуляцию H' внутренней области цикла C (см. рисунок 4). Применим к графу H' лемму 1. Рассмотрим два случая: выполнено утверждение 1° или утверждение 2° леммы 1.

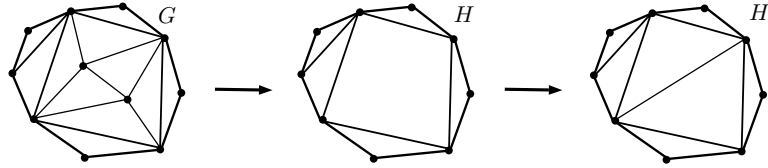


Рис. 4. Графы G , H и H' .

2.1. В H' проведена диагональ $a_i a_{i+3}$.

Диагональ $a_i a_{i+3}$ делит C на четырёхугольник $M = a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3}$ и цикл Z . M разрезан в H' диагональю на два треугольника, содержащих рёбра цикла C . Значит, оба этих треугольника – грани графа G . Тогда внутри M вершин графа G нет. Таким образом, граф $G' = G - \{a_{i+1}, a_{i+2}\}$ – почти триангуляция с внешним циклом Z (см. рисунок 5а). Так как $v(G') = v(G) - 2 \geq 4$, для G' можно применить индукционное предположение и построить остовное дерево T' без вершин степени 2.

Внутри M должна быть проведена одна из диагоналей $a_i a_{i+2}$ и $a_{i+1} a_{i+3}$ (разрезающая M на два треугольника) – пусть, скажем, $a_i a_{i+2}$. Вспомним, что $a_i \in V(T')$ и добавим к дереву T' вершины a_{i+1} и a_{i+2} , а также рёбра $a_i a_{i+1}$ и $a_i a_{i+2}$ – получится остовное дерево T графа G без вершин степени 2 (новые вершины a_{i+1} и a_{i+2} – листья T , а степень вершины a_i увеличена на 2, а значит, не менее 3).

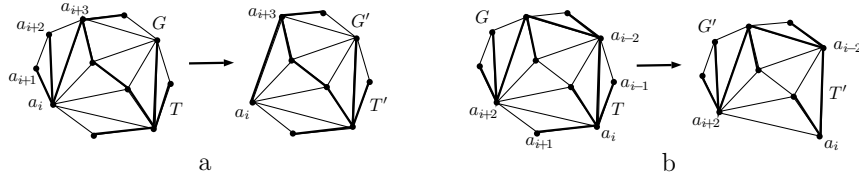


Рис. 5. Графы G и G' , а также их остовные деревья T и T' (выделены жирными линиями).

2.2. В H' проведены диагонали $a_i a_{i+2}$ и $a_i a_{i-2}$.

Эти две диагонали разрезают C на треугольники $a_i a_{i+1} a_{i+2}$ и $a_i a_{i-1} a_{i-2}$, а также цикл Z . Оба треугольника содержат рёбра цикла C , а значит, они – грани графа G . Таким образом, граф $G' = G - \{a_{i+1}, a_{i-1}\}$ – почти триангуляция с внешним циклом Z (см. рисунок 5b). Так как $v(G') = v(G) - 2 \geq 4$, для G' можно применить индукционное предположение и построить остовное дерево T' без вершин степени 2. Вспомним, что $a_i \in V(T')$ и добавим к дереву T' вершины a_{i-1} и a_{i+1} , а также рёбра $a_i a_{i-1}$ и $a_i a_{i+1}$ – получится остовное дерево T графа G без вершин степени 2 (новые вершины a_{i-1} и a_{i+1} – листья T , а степень вершины a_i увеличена на 2, а значит, не менее 3). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. Thomassen, *Every planar graph is 5-choosable*. — J. Comb. Theory, Ser. B, **62** (1994), 180–181.
2. C. Thomassen, *A short list color proof Grötzsch's theorem*. — J. Comb. Theory, Ser. B, **88** (2003), 189–192.
3. J. R. Griggs, M. Wu. *Spanning trees in graphs of minimum degree 4 or 5*. — Discrete Math. **104** (1992), 167–183.

Karpov D. V. On spanning trees without vertices of degree 2 in plane triangulations.

Let G be a 2-connected plane graph such that at most one its face is not a triangle. It is proved that G has a spanning tree without vertices of degree 2.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург;
С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28
198504 Старый Петергоф,
С.-Петербург, Россия
E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 26 ноября 2018 г.