

Д. В. Карпов

О СТРУКТУРЕ ТРЁХСВЯЗНОГО ГРАФА. 2

§1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Обозначения и определения. В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество – через $v(G)$. Множество рёбер графа G мы будем обозначать через $E(G)$.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$.

Окрестность вершины x в графе G (то есть, множество всех вершин, смежных с x) мы будем обозначать через $N_G(x)$.

Будем говорить, что вершина $v \in V(G)$ *смежна* с множеством $U \subset V(G)$, если $v \notin U$ и существует вершина $u \in U$, смежная с v .

Для $U \subset V(G)$ через $G(U)$ обозначается *индуцированный подграф* графа G на множестве U .

Определение 1. Пусть $R \subset V(G)$.

1) Через $G - R$ мы обозначим граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и рёбер из R , а также всех рёбер, инцидентных вершинам из R .

2) Назовем множество R *разделяющим*, если граф $G - R$ несвязен.

3) Граф G называется *k -связным*, если $v(G) > k$ и G остается связным при удалении любого множества из не более чем $k - 1$ вершины.

4) Будем называть k -вершинные разделяющие множества просто *k -разделяющими*. Через $\mathfrak{R}_k(G)$ обозначим множество из всех k -разделяющих множеств графа G .

5) Пусть $X, Y \subset V(G)$. Будем говорить, что R *отделяет* X от Y , если $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$ и в графе $G - R$ нет пути из $X \setminus R$ в $Y \setminus R$.

Ключевые слова: связность, трёхсвязный граф, разделяющее множество.

Исследования выполнены при поддержке правительства РФ (грант 14.Z50.31.0030).

1.2. Об истории вопроса и основных задачах. Классическое дерево блоков и точек сочленения, описывающее структуру разбиения связного графа точками сочленения (см., например, [2]), широко применяется в теории графов.

Структура разбиения двусвязного графа 2-разделяющими множествами уже не так проста, но тоже может быть описана с помощью дерева. Впервые такая структура описана Таттом [1] в 1966 году. К сожалению, приуманная Таттом структура почти не нашла применения за долгие годы, возможно, по причине того, что ее непросто понять. Однако, эта структура чрезвычайно полезна! Несколько более простое описание структуры разбиения двусвязного графа его 2-разделяющими множествами можно найти в [7]. Примерами применения этой структуры для доказательства различных задач о связности могут быть статьи [8,9]. Автор уверен, что структура двусвязного графа в ближайшем будущем окажется полезным инструментом для изучения графов связности 2.

К сожалению, со структурой разбиения трёхсвязного графа дело обстоит значительно сложнее. Автор и А. В. Пастор описали ее в 2008-2011 годах [4]. Увы, это описание получилось весьма сложным. Тем не менее, хочется продолжить исследования, начатые в [4]. Все 3-разделяющие множества трёхсвязного графа в [4] были разбиты на структурные единицы – *комплексы* ромашек, разрезов, одиночных множеств и тривиальные комплексы. Разбиение графа каждым комплексом подробно описано.

В этой статье мы немного изменим определения комплексов – в основном, в сторону упрощения. Мы постараемся сделать определения комплексов такими, чтобы их легче было запомнить. А в качестве бонуса получим новый результат.

Для новых определений комплексов мы доказываем свойства, аналогичные доказанным в [4]. А именно, в **теореме 2** доказано, что каждое 3-разделяющее множество входит хотя бы в один комплекс. В **теореме 3** доказано, что для любых двух комплексов C_1 и C_2 трёхсвязного графа G существует единственная часть разбиения графа комплексом C_1 , содержащая C_2 . В **теореме 4** доказано, что структура взаимного расположения комплексов описывается с помощью *гипердерева* – гиперграфа, в котором любой цикл – подмножество одного из гиперребер.

Новые определения комплексов помогают доказать новый результат о представлении непустых частей разбиения графа G множеством $\mathfrak{R}_3(G)$ через разбиения графа его комплексами (теорема 5). Главный смысл этого представления в том, что разбиения трёхсвязного графа G его комплексами достаточно просто выглядят и полностью описаны в статье. Тем самым, упорядочена структура непустых частей разбиения трёхсвязного графа. В прежнем определении комплексов [4] аналогичный результат был бы неверен.

Отметим, что А. В. Пастор в 2016 году также предпринял попытку несколько нового описания структуры разбиения трёхсвязного графа [10], правда, идущую в другом направлении – через части, на которые разбивают граф трёхрёберные разрезы.

1.3. Структура статьи. В разделе 2 описаны понятия, необходимые для формулировок результатов, и инструменты, необходимые для доказательств. В первую очередь это понятия *разбиения графа набором разделяющих множеств* [5] и *гиперграфа разбиения* [6]. Сформулирована *теорема о разбиении* [6] – критерий того, что гиперграф разбиения является гипердеревом.

В разделе 3 определяются основные структурные единицы трёхсвязного графа – *ромашки* и *разрезы* и описываются их простейшие свойства (большинство из них доказаны в статье [4]).

В разделе 4 определяются все виды комплексов и доказываются некоторые их свойства. Наконец, в разделе 5 изучается взаимное расположение комплексов, там же формулируются и доказываются основные результаты статьи – теоремы 3, 4 и 5. Все доказательства последних двух разделов – новые, хотя ряд формулировок имеет аналогичные в статье [4]. Основная причина этого в том, что определения комплексов изменились, а большинство названий – сохранилось.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ

2.1. Разбиение графа набором разделяющих множеств. Отметим, что мы используем не совсем классическое определение *компоненты связности* – в нашей работе это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

В этом разделе $k \geq 2$, а G – k -связный граф. Мы все время будем иметь дело с разбиениями одного и того же графа G и не будем дополнительно указывать на это.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(G)$.

1) Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью разбиения* графа G набором $\mathfrak{S}$, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Множество всех частей разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ мы будем обозначать через $\text{Part}(\mathfrak{S})$.

2) Вершины части $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ назовем *внутренними*, если они не входят ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Множество таких вершин назовем *внутренностью* части A и будем обозначать через $\text{Int}(A)$.

Вершины, входящие в какие-либо множества набора $\mathfrak{S}$, мы будем называть *граничными*, а все их множество – *границей* и обозначать через $\text{Bound}(A)$.

Для $S \in \mathfrak{R}_k(G)$ мы будем писать $\text{Part}(S)$ вместо $\text{Part}(\{S\})$.

Лемма 1. Пусть G – k -связный граф, а $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) Пусть $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда $\text{Bound}(A)$ состоит из всех вершин части A , имеющих смежные вне A . Если $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, то $\text{Bound}(A)$ отделяет $\text{Int}(A)$ от остальных вершин графа.

2) Пусть $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ и $A \in \text{Part}(\mathfrak{T})$. Тогда граница A как части $\text{Part}(\mathfrak{S})$ совпадает с границей A как части $\text{Part}(\mathfrak{T})$.

3) Если $|\text{Bound}(A)| = k$ и $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, то каждая вершина из $\text{Bound}(A)$ смежна с $\text{Int}(A)$.

Доказательство. 1) Это теорема 2 из [6].

2) Пункт 1 дает определение границы части A , не зависящее от набора k -разделяющих множеств.

3) Если вершина $x \in \text{Bound}(A)$ несмежна с $\text{Int}(A)$, то $\text{Bound}(A) \setminus \{x\}$ отделяет $\text{Int}(A)$ от $V(G) \setminus A$, что противоречит k -связности графа G . $\square$

Лемма 2. [6, Теорема 1] Пусть $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{R}(G)$, а $\mathfrak{S} = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{S}_i$.

Рассмотрим все множества вершин вида

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_i, \quad (1)$$

где $A_i \in \text{Part}(\mathfrak{S}_i)$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Любая часть $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ представляется в виде (1).

2) Из всех множеств вершин графа G , представимых в виде (1), частями $\text{Part}(\mathfrak{S})$ являются в точности максимальные по включению.

3) Если множество вершин A представимо в виде (1) и $A \notin \text{Part}(\mathfrak{S})$, то A является подмножеством одного из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Лемма 3. [6, Следствие 1] Пусть $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}(G)$, а часть $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ такова, что ни одно из множеств набора $\mathfrak{T}$ ее не разделяет. Тогда $A \in \text{Part}(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T})$.

Замечание 1. В [6] в теореме 1 было дополнительное условие о том, что множества $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$ попарно не пересекаются. Там же в следствии 1 было дополнительное условие $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{T} = \emptyset$. Эти условия не использовались в доказательствах. В нашей работе утверждения лемм 2 и 3 понадобятся без этих лишних условий.

2.2. Зависимые и независимые разделяющие множества.

Определение 3. Два множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ называются *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S . В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

В работе [3] доказано, что для k -связного графа G и множеств $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ возможны два варианта: либо S и T независимы, либо каждое из них разделяет другое. Доказательство этого факта – очень простое.

Лемма 4. [6, Лемма 1] Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ независимы, а часть $A \in \text{Part}(S)$ содержит T . Тогда в $\text{Part}(T)$ есть часть, содержащая все отличные от A части из $\text{Part}(S)$, а все остальные части $\text{Part}(T)$ являются подмножествами A .

Определение 4. Назовем множество $T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *одиночным*, если оно независимо со всеми остальными множествами из $\mathfrak{R}_k(G)$. Обозначим через $\mathfrak{D}(G)$ множество, состоящее из всех одиночных k -разделяющих множеств.

Далее перейдем к случаю трёхсвязного графа. Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$. Разбиение графа парой зависимых разделяющих множеств описано в [6, Лемма 7]. Мы процитируем эту лемму для трёхсвязного графа G и приведем ее следствия.

Лемма 5. Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы, $\text{Part}(S) = \{F_1, \dots, F_n\}$, а $\text{Part}(T) = \{H_1, \dots, H_m\}$. Для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, m\}$

введем обозначения

$$P = S \cap T, \quad S_j = S \cap \text{Int}(H_j), \quad T_i = T \cap \text{Int}(F_i), \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j.$$

Тогда

$$\text{Part}(\{S, T\}) = \{G_{i,j}\}_{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}}, \quad \text{Bound}(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j,$$

причем $T_i \neq \emptyset$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и $S_j \neq \emptyset$ для всех $j \in \{1, \dots, m\}$.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_3(G)$, $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$.

1) Мы будем называть часть A *малой*, если $|A| < 3$.

2) Мы будем называть часть A *пустой*, если $\text{Int}(A) = \emptyset$ и *непустой* в противном случае.

Замечание 2. Если часть A – малая, то понятно, что $|A| = 2$. В силу леммы 1, $\text{Int}(A) = \emptyset$. Таким образом, малая часть всегда пуста.

Следующая лемма – это следствие 2 из [4], дополненное пунктом 2, который не был сформулирован в [4], но является частью приведенного там доказательства.

Лемма 6. Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы, $S \cap T = \emptyset$. Тогда выполнены следующие утверждения.

1) В $\text{Part}(\{S, T\})$ есть хотя бы одна малая часть.

2) Пусть $F \in \text{Part}(S)$ и $H \in \text{Part}(T)$. Тогда часть $F \cap H \in \text{Part}(\{S, T\})$ – малая, если и только если $|F \cap T| = 1$ и $|H \cap S| = 1$.

3) Любая малая часть $G_{i,j} \in \text{Part}(\{S, T\})$, состоит из двух смежных вершин $u \in T$ и $v \in S$. Более того, v – единственная вершина части H_j , смежная с u , а u – единственная вершина части F_i , смежная с v .

Лемма 7. [4, Следствие 3] Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы, а $S \cap T = \{p\}$. Тогда выполнены следующие утверждения.

1) $|\text{Part}(S)| = |\text{Part}(T)| = 2$ и в $\text{Part}(\{S, T\})$ нет малых частей.

2) Пусть $G_{i,j} \in \text{Part}(\{S, T\})$, $\text{Int}(G_{i,j}) = \emptyset$. Тогда $G_{i,j} = \{u, v, p\}$, где $u \in S \setminus T$ и $v \in T \setminus S$, причем вершины u и v смежны.

Далее мы исключим из рассмотрения случай

$$|\text{Part}(\{S\})| = |\text{Part}(\{T\})| = 3,$$

поскольку в этом случае $P = \emptyset$ и $|T_1| = |T_2| = |T_3| = |S_1| = |S_2| = |S_3| = 1$. Тогда все части $\text{Part}(\{S, T\})$, очевидно, являются малыми, а значит, $v(G) = |S \cup T| = 6$. Такие графы мы рассматривать не будем. (Нетрудно заметить, что в этом случае $G \simeq K_{3,3}$.)

Далее для любой пары зависимых множеств графа G будем считать, что каждое из них делит граф не более чем на три части и хотя бы одно делит граф ровно на две части.

2.3. Гипердерево разбиения. Начнем с определения гипердерева и ряда его несложных свойств.

Определение 6. Пусть H – гиперграф.

1) Будем называть гиперграф H *гипердеревом*, если он связан, ни одно его гиперребро не является подмножеством другого и для любого цикла в этом графе существует гиперребро, содержащее все его вершины.

2) По гиперграфу H построим двудольный граф $T(H)$, вершины одной доли которого – вершины H , а вершины другой доли – гиперребра H . Каждое гиперребро R соединим со всеми вершинами, которые оно содержит.

Гипердерево имеет множество свойств, аналогичных свойствам обычного дерева. Докажем три из них.

Лемма 8. Пусть H – гипердерево, $v(H) \geq 2$. Тогда выполняются следующие утверждения.

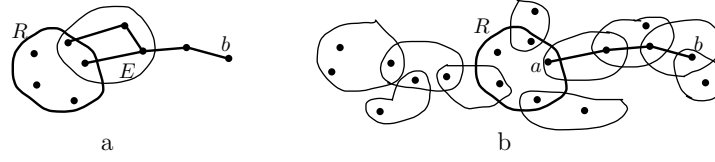
- 1) Граф $T(H)$ – дерево.
- 2) Никакие два гиперребра H не имеют двух общих вершин.
- 3) Пусть R – гиперребро H , $b \in V(H) \setminus R$. Тогда существует единственная такая вершина $a \in R$, что a отделяет b от R .

Доказательство. 1) Связность $T(H)$ очевидна. Предположим, что в графе $T(H)$ есть простой цикл $a_1 R_1 a_2 \dots a_n R_n$, где $a_1, \dots, a_n \in V(H)$, а $R_1, \dots, R_n \in E(H)$. Тогда $R_i \ni a_i, a_{i+1}$ (мы считаем, что $n+1 = 1$). Положим

$$R'_k = R_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} R_i \cup \{a_1, \dots, a_n\} \right).$$

Выпишем вершины в таком порядке: сначала a_1 , затем все вершины из R'_1 , затем a_2 , затем все вершины из R'_2 , ..., затем a_n и, наконец, все вершины из R'_n . Мы получили цикл в гипердереве H , содержащий все вершины гиперребер $R_1, \dots, R_n$, а значит, существует гиперребро R , содержащее все вершины этого цикла. Но тогда $R \supsetneq R_1$, что невозможно.

2) Если оба гиперребра E_1 и E_2 содержат вершины a и b , то в графе $T(H)$ есть цикл, что противоречит пункту 1.

Рис. 1. Гипердерево H и его гиперребро R .

3) Рассмотрим все пути в H от b до гиперребра R , внутренние вершины которых не входят в R , и отметим множество всех их концов в гиперребре R . Пусть мы отметили хотя бы две вершины из R . Тогда в H существует цикл Z , содержащий две отмеченные вершины и хотя бы одну вершину не из R (см. рисунок 1a), а следовательно, существует и гиперребро E , содержащее все вершины Z . Это гиперребро не совпадает с R и $|E \cap R| \geq 2$, что противоречит пункту 2.

Значит, каждый путь в H от b до гиперребра R , внутренние вершины которого не входят в R , имеет концом одну и ту же вершину $a \in R$. Это означает, что a отделяет b от R (см. рисунок 1b). $\square$

Определим абстрактную конструкцию гипердерева разбиения, которая помогает описывать взаимное расположение k -разделяющих множеств в k -связном графе.

Определение 7. 1) Рассмотрим конечное множество вершин V . Пусть каждой вершине $w \in V$ соответствует разбиение V_w множества $V \setminus \{w\}$ на несколько *классов* (возможно, такой класс всего один). Будем говорить, что вершина w *разделяет* вершины v_1 и v_2 , если v_1 и v_2 лежат в разных классах V_w .

2) Назовем вершины $v_1, v_2 \in V$ *соседними*, если их не разделяет никакая отличная от них вершина множества V .

Построим *гиперграф разбиения* $\text{Str}(V)$ на вершинах множества V , гиперребра которого – это максимальные по включению множества попарно соседних вершин.

Приведем пример множества вершин и гиперграфа разбиения, показывающий, какое отношение эта конструкция имеет к теории связности. Пусть F – связный граф, $\mathfrak{R}_1(F)$ – множество всех его точек

сочленения, а для каждой точки сочленения $a \in \mathfrak{R}_1(F)$ классы разбиения $(\mathfrak{R}_1(F))_a$ состоят из точек сочленения, лежащих в одной компоненте связности графа $F - a$. Именно древовидная структура взаимного расположения точек сочленения связного графа подсказывает нам утверждения *теоремы о разбиении*.

Теорема 1. [6, Теорема 3] *Пусть для любых $a, b, c \in V$ если a разделяет b и c , то b не разделяет a и c . Тогда выполняются следующие утверждения.*

- 1) *Гиперграф $\text{Str}(V)$ является гипердеревом.*
- 2) *Пусть для некоторой вершины $a \in V$ гиперграф $\text{Str}(V) - a$ распадается на компоненты связности $W_1, \dots, W_\ell$. Тогда $V_a = \{W_1, \dots, W_\ell\}$.*

§3. ОСНОВНЫЕ СТРУКТУРНЫЕ ЕДИНИЦЫ ТРЁХСВЯЗНОГО ГРАФА

Далее в статье рассматривается трёхсвязный граф G , имеющий не менее чем 7 вершин. Основными объектами изучения будут 3-разделяющие множества из $\mathfrak{R}_3(G)$.

В этом разделе мы определим основные структурные единицы трёхсвязного графа – ромашки и разрезы. Мы сформулируем их свойства, в основном, доказанные в статье [4].

3.1. Разрезы в трёхсвязном графе.

Определение 8. 1) Будем называть *разрезом* трёхэлементное разделяющее множество из вершин и рёбер графа G , содержащее хотя бы одно ребро. Множество всех разрезов графа G обозначим через $\mathfrak{T}(G)$.

2) Для разреза $M \in \mathfrak{T}(G)$ обозначим через $V(M)$ множество всех входящих в M вершин, а через $W(M)$ – множество, состоящее из всех вершин, входящих в разрез M и всех вершин, инцидентных рёбрам M .

Пусть U_1 и U_2 – компоненты связности графа $G - M$. Назовем множества $A_i = U_i \cup V(M)$ *частями разбиения* графа G разрезом M . Мы будем использовать обозначение

$$\text{Part}(M) = \{A_1, A_2\}.$$

Границами разреза M мы будем называть множества вершин

$$R(A_1) = A_1 \cap W(M) \quad \text{и} \quad R(A_2) = A_2 \cap W(M).$$

Окрестностью части A_i назовём множество $O(A_i) = A_i \cup W(M)$.

Внутренностью части A_i назовем множество $\text{Int}(A_i) = A_i \setminus V(M)$.

Обозначим через $\mathfrak{T}_i(G)$ (где $i \in \{0, 1, 2, 3\}$) множество, состоящее из всех разделяющих множеств, содержащих i ребер и $3 - i$ вершин графа G . Тогда $\mathfrak{T}_0(G) = \mathfrak{R}_3(G)$, а $\cup_{i=1}^3 \mathfrak{T}_i(G) = \mathfrak{T}(G)$. Пусть $\mathfrak{T}^+(G) = \mathfrak{T}(G) \cup \mathfrak{T}_0(G)$.

Для каждого разреза $M \in \mathfrak{T}(G)$ мы синхронизируем обозначения частей разбиения и ребер. А именно, будем применять обозначения $\text{Part}(M) = \{G_1^M, G_2^M\}$, $\text{Int}(G_i^M) = H_i$ так, что для каждого ребра $x_1x_2 \in M$ выполнено $x_1 \in H_1$ и $x_2 \in H_2$. Будем использовать обозначение $T_i = R(G_i^M)$.

Определение 9. Пусть $M, N \in \mathfrak{T}^+(G)$. Если множество N содержит все вершины множества M и для каждого ребра $e \in M$ содержит либо e , либо один из его концов, то будем говорить, что M *содержит* N (или N *содержится* в M).

Если разрез $M \in \mathfrak{T}(G)$ не содержится ни в одном другом разрезе из $\mathfrak{T}(G)$, назовем его *максимальным*.

Будем говорить, что множество $M \in \mathfrak{T}^+(G)$ можно *дополнить* ребром ab , если при замене вершины $a \in M$ на ребро ab получается разрез из $\mathfrak{T}(G)$.

Замечание 3. 1) Никакая вершина разреза $M \in \mathfrak{T}(G)$ не может быть инцидентна никакому ребру из M .

2) Разрез является максимальным, если и только если его нельзя дополнить ребром.

3) Если два ребра разреза $M \in \mathfrak{T}(G)$ имеют общий конец x , то x является единственной вершиной одной из компонент связности графа $G - M$. Действительно, в противном случае, заменив в разрезе M эти два ребра вершиной x , мы получим разделяющее множество из двух элементов, что противоречит трехсвязности G .

Лемма 9. [4, Лемма 5] Пусть $x \in M \in \mathfrak{T}^+(G)$, $xy \in E(G)$ и H – компонента связности графа $G - M$, содержащая y . Тогда множество M можно дополнить ребром xy , если и только если y – единственная вершина из H , смежная с x .

Определение 10. Назовем разрез $M \in \mathfrak{T}(G)$ *невыврожденным*, если $G_1^M \neq T_1$ и $G_2^M \neq T_2$ и *выврожденным* в противном случае.

Назовем разделяющее множество $M \in \mathfrak{T}^+(G)$ *тривиальным*, если одна из компонент связности графа $G - M$ состоит из единственной вершины и *нетривиальным* в противном случае.

Замечание 4. Очевидно, тривиальные множества из $\mathfrak{R}_3(G)$ – это в точности окрестности всех вершин степени 3.

Случай, когда одновременно $G_1^M = T_1$ и $G_2^M = T_2$, нам неинтересен, поскольку в этом случае граф G содержит не более 6 вершин. Так что мы будем считать, что для любого вырожденного разреза выполнено ровно одно из этих двух равенств.

Замечание 5. 1) Вырожденный разрез, содержащий ровно одно ребро, является тривиальным. Действительно, если разрез $M = \{u, v, x_1x_2\}$ вырожден ($G_1^M = T_1$), то из трехсвязности графа G понятно, что $N_G(x_1) = \{x_2, u, v\} = T_2^M$. При этом, множества $\{x_1u, x_1v, x_1x_2\}$ и $\{u, x_1v, x_1x_2\}$ также являются тривиальными разрезами.

2) Если два ребра разреза имеют общие концы, то этот разрез тривиален.

3) Структура вырожденного нетривиального разреза также может быть легко описана. Как следует из сказанного выше, такой разрез должен содержать хотя бы два ребра. Если разрез $M = \{u, x_1x_2, y_1y_2\}$ вырожден ($G_1^M = T_1^M$) и нетривиален, то

$$N_G(x_1) = \{y_1, x_2, u\} \text{ и } N_G(y_1) = \{x_1, y_2, u\}.$$

Если же разрез $M = \{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\}$ является вырожденным и нетривиальным (опять же $G_1^M = T_1^M$), то вершины x_1, y_1, z_1 попарно смежны.

Лемма 10. [4, Лемма 6] Пусть $M \in \mathfrak{T}(G)$ – нетривиальный разрез. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Пусть R – трехвершинное множество, содержащее все вершины из M и ровно по одному концу всех ребер из M , но не совпадающее с T_1^M и T_2^M . Тогда $R \in \mathfrak{R}_3(G)$. Более того, R делит граф ровно на две части, одна из которых содержит G_1^M , а другая – G_2^M .

2) Если $G_2^M \neq T_2^M$, то множество T_2^M является разделяющим, причем $O(G_1^M) \in \text{Part}(T_2^M)$, а G_2^M – объединение остальных частей $\text{Part}(T_2^M)$. Если разрез M невырожден, то оба множества T_1^M и T_2^M являются разделяющими.

Определение 11. Множества, описанные в пункте 1 леммы 10, мы будем называть *внутренними множествами* разреза M . Набор, состоящий из всех внутренних множеств разреза M , будем обозначать через $\mathfrak{R}(M)$.

Лемма 11. [4, Лемма 11] Для нетривиального разреза $M \in \mathfrak{T}(G)$ выполнены следующие утверждения.

- 1) Если $M \ni x_1x_2$, то не существует множества $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, содержащего x_1 и x_2 .
- 2) Если $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ таково, что $S \subset W(M)$, то S содержится в разрезе M (то есть, S – внутреннее множество разреза M или его граница).

Определение 12. Назовем ребро $e \in E(G)$ особым, если существуют различные вершины $u, v, t, w \in V(G)$ такие, что $\{u, v, e\}, \{t, w, e\} \in \mathfrak{T}(G)$.

Лемма 12. [4, Теорема 2] Для вершин x_1, x_2 трёхсвязного графа G следующие два условия эквивалентны.

- 1° Вершины x_1 и x_2 смежны, x_1x_2 – особое ребро.
- 2° Существуют зависимые множества $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ такие, что $x_1 \in S$, $x_2 \in T$ и $\{x_1, x_2\} \in \text{Part}(\{S, T\})$.

3.2. Тройные разрезы.

Определение 13. Пусть $T = N_G(a) \in \mathfrak{R}_3(G)$ – тривиальное множество, а множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, содержащее вершину a , таково, что $|\text{Part}(S)| = 3$ и внутренность каждой части $\text{Part}(S)$ содержит по вершине множества T . Тогда будем говорить, что тривиальное множество T подчинено множеству S . Обозначим через $\mathfrak{D}$ набор, состоящий из всех 3-разделяющих множеств, для которых существует подчиненное тривиальное множество.

Замечание 6. Из определения нетрудно понять, что если $S \in \mathfrak{D}$, то $|\text{Part}(S)| = 3$ и существует вершина $a \in S$ степени 3.

Лемма 13. [4, Лемма 9] 1) Если множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ делит граф более, чем на три части, то $S \in \mathfrak{D}(G)$. Если множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ делит граф на три части и зависимо с $T \in \mathfrak{R}_3(G)$, то $S \in \mathfrak{D}$, а T – тривиальное и подчинено S .

2) Тривиальное множество может быть подчинено не более, чем одному разделяющему множеству.

Далее в этом разделе мы будем рассматривать множество $S \in \mathfrak{D}$. Пусть $\text{Part}(S) = \{A_1, A_2, A_3\}$, $a \in S$, $d_G(a) = 3$ и $N_G(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$, где $a_i \in \text{Int}(A_i)$ (для всех $i \in \{1, 2, 3\}$).

Очевидно, множество S можно дополнить любым ребром вида aa_i . Обозначим через M_i разрез, получающийся из S заменой всех вершин степени 3 на ребра, соединяющие эти вершины с вершинами их окрестностей, лежащими в $\text{Int}(A_i)$. Из сказанного выше следует, что $M_1, M_2, M_3 \in \mathfrak{T}(G)$.

Замечание 7. Разрезы M_1, M_2, M_3 могут быть не максимальными.

Очевидно, что $W(M_i) \subset A_i$, а множество S является одной из границ разреза M_i . Из леммы 10 следует, что $A_{i+1} \cup A_{i+2} \in \text{Part}(M_i)$ (нумерация – циклическая по модулю 3). Обозначим *другую* часть $\text{Part}(M_i)$ через B_i , пусть $T_i = R(B_i)$.

Замечание 8. 1) У B_i как у части $\text{Part}(M_i)$ определена окрестность – легко видеть, что $O(B_i) = A_i$.

2) Разрез M_i может быть тривиальным.

Определение 14. Множество $F = \{M_1, M_2, M_3\}$ мы будем называть *тройным разрезом с осью S* . Все внутренние разделяющие множества разрезов M_i , множество S и все подчиненные ему множества будем называть *внутренними множествами* тройного разреза F . Множества T_i будем называть *границами* тройного разреза F . Определим $W(F) = W(M_1) \cup W(M_2) \cup W(M_3)$ и $\text{Part}(F) = \{B_1, B_2, B_3\}$.

Лемма 14. [4, Лемма 12] Пусть F – тройной разрез, а $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ таково, что $S \subset W(F)$. Тогда S является внутренним множеством F или его границей.

Лемма 15. [4, Лемма 17] Пусть тройной разрез F с осью S и множество $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ таковы, что $T \not\subset W(F)$ и T разделяет $W(F)$. Тогда $|\text{Part}(T)| = 2$ и множество T содержится в одной из частей $A_i \in \text{Part}(S)$.

3.3. Ромашки в трехсвязном графе. В общем виде (для k -связного графа при произвольном $k \geq 2$) ромашки определены в статье [6]. Мы приведем это определение с учетом специфики трёхсвязного графа.

Рассмотрим набор $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ вершин графа G (где $m \geq 4$), в котором вершины $q_1, \dots, q_m$ считаются *циклически упорядоченными* (то есть, циклическая перестановка множества $q_1, \dots, q_m$ не меняет набора F). Наборы $(p; q_1, \dots, q_m)$ и $(p; q_m, \dots, q_1)$ также считаются одинаковыми.

Введем обозначение $Q_{i,j} = \{q_i, q_j, p\}$. Пусть $\mathfrak{R}(F)$ – набор, состоящий из множеств $Q_{i,j}$ для всех пар различных несоседних в циклическом порядке индексов i и j .

Определение 15. Набор $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ будем называть *ромашкой*, если существует такое множество $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(F) \cap \mathfrak{R}_3(G)$, что

$$\text{Part}(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}, \quad \text{причем} \\ \text{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1} \quad \text{для всех} \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Вершину p мы будем называть *центром*, а вершины $q_1, \dots, q_m$ – *лепестками* этой ромашки. Множество $V(F) = \{p, q_1, \dots, q_m\}$ назовем *множеством вершин* ромашки F . Все множества $Q_{i,j} = \{q_i, q_j, p\}$ мы будем называть *множествами ромашки* F .

Будем говорить, что набор $\mathfrak{S}$ *порождает* ромашку F .

Замечание 9. Разные наборы 3-разделяющих множеств могут порождать ромашки с одним и тем же центром и набором лепестков. В [6] доказано, что у всех таких ромашек одинаковый циклический порядок лепестков, то есть, эти ромашки совпадают.

Далее мы зафиксируем нумерацию лепестков ромашки F для удобства. Введенные выше обозначения будем считать стандартными для ромашки. Лепестки ромашки всегда будем указывать в циклическом порядке и рассматривать их индексы, как вычеты по модулю количества лепестков. Введем обозначение $G_{i,j} = \cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$ (индекс x пробегает значения от i до $j-1$ в циклическом порядке). Мы считаем, что $G_{x,x} = \emptyset$.

Лемма 16. [6, теорема 6 и следствие 5] 1) При $j \notin \{i, i+1, i-1\}$ $Q_{i,j} \in \mathfrak{R}_3(G)$ и $\text{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

2) Если $\text{Int}(G_{i,i+1}) \neq \emptyset$, то $Q_{i,i+1} \in \mathfrak{R}_3(G)$, $G_{i+1,i} \in \text{Part}(Q_{i,i+1})$, а $G_{i,i+1}$ – объединение всех отличных от $G_{i+1,i}$ частей $\text{Part}(Q_{i,i+1})$.

Множества $Q_{1,2}, Q_{2,3}, \dots, Q_{m,1}$ называются *границами*, а остальные множества $Q_{i,j}$ – *внутренними множествами* ромашки F .

Напомним, что $\text{Part}(F) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}$. Очевидно, что ни одна из этих частей не может быть малой.

Замечание 10. 1) Если часть $G_{i,i+1}$ пуста, то по лемме 7 вершины q_i и q_{i+1} смежны.

2) Если обе части $G_{i-1,i}$ и $G_{i,i+1}$ пусты, то $N_G(q_i) = \{p, q_{i-1}, q_{i+1}\}$.

3) Если множества $S = \{a, u, v\}$, $T = \{a, x, y\} \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы, то из леммы 7 нетрудно понять, что эти два множества образуют ромашку с центром a и лепестками u, x, v, y (следующими именно в таком циклическом порядке).

Таким образом, ромашка в трехсвязном графе напоминает колесо, от которого, согласно книге Татта [1], произошли все трехсвязные графы.

Определение 16. Будем говорить, что ромашка F *содержит* ромашку F' , если у них общий центр и $V(F') \subset V(F)$. Назовем ромашку F *максимальной*, если она не содержится ни в какой другой ромашке.

Лемма 17. [4, Лемма 4] Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ – максимальная ромашка. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Не существует множества $S \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(F)$, содержащего p и зависящего хотя бы с одним из множеств ромашки F .
- 2) Для любой вершины $v \in \text{Int}(G_{i,i+1})$ существует $q_i q_{i+1}$ -путь, не проходящий через v , внутренние вершины которого лежат в $\text{Int}(G_{i,i+1})$.

Лемма 18. [4, Лемма 10 и Следствие 9] Множество, состоящее из трех лепестков ромашки F , не является разделяющим. Любое 3-разделяющее множество, содержащееся в множестве вершин ромашки F , содержит ее центр, то есть, является либо внутренним множеством ромашки F , либо ее границей.

3.4. Связь между ромашками и разрезами. В этом разделе мы рассмотрим вопрос о том, в каких случаях множества вершин ромашки и разреза могут совпадать или содержаться одно в другом.

Определение 17. Будем говорить, что ромашка F *содержится* в разрезе M , если $V(F) \subset W(M)$. Будем говорить, что разрез M *содержится* в ромашке F , если $W(M) \subset V(F)$.

Лемма 19. [4, Лемма 13] Ромашка, содержащаяся в разрезе, содержит ровно 4 лепестка и имеет две несоседние пустые части.

Легко видеть, что для любого нетривиального разреза из $\mathfrak{T}_2(G)$ два его внутренних множества порождают ромашку с 4 лепестками, множество вершин которой совпадает с множеством вершин разреза. Для любого нетривиального разреза $M \in \mathfrak{T}_3(G)$ в нем содержатся 6 разрезов из $\mathfrak{T}_2(G)$, каждому из которых соответствует ромашка, содержащаяся в M .

Определение 18. Назовем ромашку F *невыврожденной*, если она не содержится ни в каком разрезе $M \in \mathfrak{T}_3(G)$, и *выврожденной* в противном случае.

Теперь рассмотрим более часто встречающуюся ситуацию, когда разрез содержится в ромашке.

Лемма 20. [4, Следствие 11] 1) Пусть нетривиальный разрез M и ромашка $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ таковы, что $W(M) \subset V(F)$. Тогда $p \in M$ и любое ребро разреза M имеет вид $q_j q_{j+1}$, где часть $G_{j,j+1}$ пуста.

2) Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ – ромашка и $\text{Int}(G_{i,i+1}) = \emptyset$. Тогда $\{q_j, p, q_i q_{i+1}\} \in \mathfrak{T}_1(G)$ для всех $j \notin \{i, i+1\}$. Если, кроме того, $\text{Int}(G_{j,j+1}) = \emptyset$ и $i \neq j$, то $\{q_{j+1} q_j, p, q_i q_{i+1}\} \in \mathfrak{T}_2(G)$.

Замечание 11. Тривиальный разрез также может содержаться в ромашке, если в ней есть две соседние пустые части. Тогда ребра, соединяющие их общий лепесток с соседними лепестками и центром, образуют тривиальный разрез. Нетрудно проверить, что любой максимальный тривиальный разрез, содержащийся в максимальной ромашке, имеет такой вид.

Определение 19. Пусть $G_{i,i+1} \in \text{Part}(F)$ – непустая часть. Определим множество $M_{i,i+1}$ следующим образом.

1° $p \in M_{i,i+1}$;

2° $q_{i-1} q_i \in M_{i,i+1}$, если $\text{Int}(G_{i-1,i}) = \emptyset$, и $q_i \in M_{i,i+1}$ в противном случае;

3° $q_{i+2} q_{i+1} \in M_{i,i+1}$, если $\text{Int}(G_{i+1,i+2}) = \emptyset$, и $q_{i+1} \in M_{i,i+1}$ в противном случае.

Если хотя бы одна из частей $G_{i-1,i}$ и $G_{i+1,i+2}$ пуста, назовем $M_{i,i+1}$ *граничным разрезом* части $G_{i,i+1}$.

Замечание 12. 1) По лемме 20 мы имеем $M_{i,i+1} \in \mathfrak{T}^+(G)$.

2) Заметим, что граничный разрез части может не быть максимальным. Если x – единственная вершина части $G_{i,i+1}$, смежная с p , то множество $M_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px .

3) Отметим также, что если $M_{i,i+1} \in \mathfrak{T}(G)$, то $G_{i,i+1} \in \text{Part}(M_{i,i+1})$.

Лемма 21. [4, Лемма 15] Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ – максимальная невырожденная ромашка, а $\text{Int}(G_{i,i+1}) \neq \emptyset$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Если множество $Q_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px , то $x \in \text{Int}(G_{i,i+1})$.

2) Если $M_{i,i+1} \in \mathfrak{T}(G)$, то разрез $M_{i,i+1}$ нельзя дополнить никаким ребром, кроме, возможно, ребра px , где $x \in \text{Int}(G_{i,i+1})$ и x – единственная вершина части $G_{i,i+1}$, смежная с p .

Лемма 22. [4, Лемма 16] Пусть максимальный нетривиальный разрез M и $S \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(M)$ таковы, что S разделяет $W(M)$. Тогда $|\text{Part}(S)| = 2$ и выполняется одно из следующих двух утверждений.

1° Разрез M содержится в ромашке, порожденной набором $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}(M) \cup \{S, T_1^M, T_2^M\}$.

2° Множество S содержится в окрестности одной из частей $\text{Part}(M)$ (пусть, скажем, $S \subset O(G_1^M)$). Существует такое ребро $x_1x_2 \in M$, что S отделяет вершину $x_1 \in T_1^M$ от остальных вершин множества $W(M) \setminus S$, при этом, $S \setminus G_1^M = \{x_2\}$.

3.5. Множества, разделяющие ромашку. В этом разделе мы опишем свойства множеств, разделяющих ромашку. Следующая лемма – это лемма 18 из [4]. К сожалению, в статье [4] в доказательстве этой леммы содержался небольшой пробел. Здесь лемма приведена с исправленным доказательством.

Лемма 23. Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ – максимальная невырожденная ромашка, а $T \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(F)$. Предположим, что T разделяет $V(F)$. Тогда $|\text{Part}(T)| = 2$ и выполняется одно из следующих двух утверждений.

1° Множество T отделяет одну из вершин множества $V(F)$ от остальных вершин этого множества.

2° Множество T отделяет два соседних лепестка q_{i+1}, q_{i+2} от остальных вершин множества $V(F)$. При этом

$$\text{Int}(G_{i,i+1}) = \text{Int}(G_{i+2,i+3}) = \emptyset \quad \text{и} \quad T = \{q_i, x, q_{i+3}\},$$

где $x \in \text{Int}(G_{i+1,i+2})$ – единственная вершина части $G_{i+1,i+2}$, смежная с p .

Доказательство. Заметим, что по лемме 17 мы имеем $p \notin T$. Если T не разделяет множество $L = \{q_1, \dots, q_m\}$, то оно отделяет p от L , следовательно, выполнено утверждение 1°. Таким образом, далее достаточно рассмотреть случай, когда T разделяет L .

Докажем, что $T \cap L \neq \emptyset$. Действительно, при $\text{Int}(G_{i,i+1}) \neq \emptyset$ и $|T \cap \text{Int}(G_{i,i+1})| \leq 1$ по лемме 17 вершины q_i и q_{i+1} связаны в $G - T$. Если же $\text{Int}(G_{i,i+1}) = \emptyset$, то лепестки q_i и q_{i+1} смежны. Так как существует не более одной такой части $G_{j,j+1}$, что $|T \cap \text{Int}(G_{j,j+1})| \geq 2$,

все пары соседних лепестков (кроме, возможно, одной) не разделены множеством T . Следовательно, если $T \cap L = \emptyset$, то все вершины множества L связаны в $G - T$. Противоречие.

Заметим, что $|T \cap L| \leq 2$ по лемме 18. Рассмотрим следующие два случая.

1. $T \cap L = \{q_i\}$.

В этом случае обе оставшиеся вершины множества T должны лежать в одной части $\text{Part}(F)$, иначе, аналогично доказанному выше, множество T не разделяет L . Пусть эта часть — $G_{j,j+1}$. Тогда очевидно, что множество T разбивает L на $L_1 = \{q_{i+1}, \dots, q_j\}$ и $L_2 = \{q_{j+1}, \dots, q_{i-1}\}$.

Не умаляя общности предположим, что T отделяет p от L_1 . Докажем, что тогда $i + 1 = j$. Действительно, в противном случае $T \cap \text{Int}(G_{i,j}) = \emptyset$ (см. рисунок 2а), следовательно, множество T не разделяет часть $G_{i,j}$, то есть, вершины p и $q_{i+1} \in \text{Int}(G_{i,j})$ связаны в $G - T$. Противоречие.

Если T отделяет p и от L_2 , то аналогично получаем, что $i - 1 = j + 1$. Но тогда F имеет всего 3 лепестка: q_i , q_j и q_{j+1} , что невозможно. Значит, T не разделяет множество $L_2 \cup \{p\} = V(F) \setminus \{q_j\}$ и отделяет от него лепесток q_j . Таким образом, выполняется утверждение 1°.

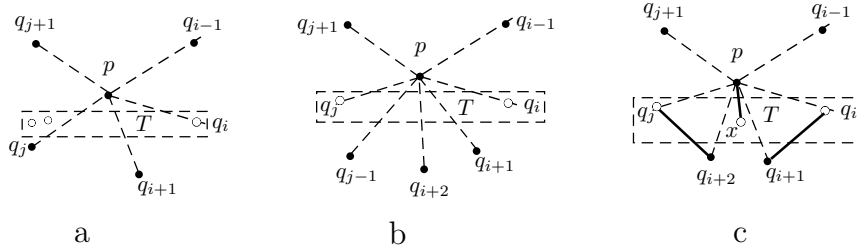


Рис. 2. Множество T разделяет $V(F)$.

2. $T \cap V(M) = \{q_i, q_j\}$.

В этом случае очевидно, что множество T разбивает L на множества $L_1 = \{q_{i+1}, \dots, q_{j-1}\}$ и $L_2 = \{q_{j+1}, \dots, q_{i-1}\}$. Можно не умаляя общности считать, что третья вершина множества T не лежит в части $G_{j,i}$. Тогда $T \cap \text{Int}(G_{j,i}) = \emptyset$, следовательно, T не разделяет $L_2 \cup \{p\}$.

Докажем, что тогда $|L_1| \leq 2$. Действительно, в противном случае $q_{j-1} \in \text{Int}(G_{i+2,j})$, $q_{i+1} \in \text{Int}(G_{i,i+2})$ и $\text{Int}(G_{i,i+2}) \cap \text{Int}(G_{i+2,j}) = \emptyset$ (см. рисунок 2б). Множество T , отделяющее p и от q_{i+1} , и от q_{j-1} , должно

пересекаться с внутренностями обеих этих частей, что невозможно. Противоречие.

Если $j = i + 2$, то множество T отделяет лепесток q_{i+1} от остальных вершин ромашки F . Рассмотрим случай $j = i + 3$. Тогда T отделяет лепестки q_{i+1}, q_{i+2} от остальных вершин множества $V(F)$. Следовательно, среди частей $G_{i,i+1}, G_{i+1,i+2}, G_{i+2,i+3}$ не более одной непустой (поскольку в каждой непустой части есть путь, соединяющий ее лепесток с центром ромашки, и проходящий по внутренним вершинам этой части) и нет двух соседних пустых частей (поскольку по замечанию 10 их общий лепесток смежен с центром). Это возможно только если $\text{Int}(G_{i,i+1}) = \text{Int}(G_{i+2,i+3}) = \emptyset$ и $\text{Int}(G_{i+1,i+2}) \neq \emptyset$ (см. рисунок 2с). Тогда очевидно, что $T = \{q_i, x, q_{i+3}\}$, где $x \in \text{Int}(G_{i+1,i+2})$. Кроме того, множества T и $Q_{i+1,i+2}$ зависимы и $\{p, x\} \in \text{Part}(\{T, Q_{i+1,i+2}\})$. Следовательно, x – единственная вершина части $G_{i+1,i+2}$, смежная с p . Таким образом, выполняется утверждение 2°.

Во всех случаях очевидно, что $|\text{Part}(T)| = 2$, поскольку множество T зависимо с некоторыми множествами ромашки F и делит каждое из них ровно на 2 части. $\square$

Лемма 24. [4, Лемма 19] Пусть максимальная невырожденная ромашка $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ и множество $T \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(F)$ таковы, что T отделяет лепесток q_i от остальных вершин множества $V(F)$. Тогда ровно одна из частей $\text{Part}(F)$, содержащих q_i , пуста, и множество T состоит из второго лепестка этой части и двух вершин другой части, содержащей q_i .

Следующая лемма – это переформулированная и дополненная новым утверждением лемма 20 из [4].

Лемма 25. Пусть разделяющее множество $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ отделяет центр невырожденной ромашки $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ от остальных вершин множества $V(F)$. Тогда выполнены следующие утверждения.

- 1) В $\text{Part}(F)$ не более трех непустых частей, а $m \leq 6$.
- 2) Пусть $G_{i,i+1} \in \text{Part}(F)$ – непустая часть. Тогда

$$|\text{Int}(G_{i,i+1}) \cap T| = 1, \quad \text{и} \quad Q_{i,i+1} \cap T = \emptyset.$$

- 3) Если $|\text{Int}(G_{i,i+1}) \cap T| = \{x\}$, то множество $M_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px .

- 4) $d_G(p) = 3$ и $T = N_G(p)$.

Доказательство. 1) Пусть в $\text{Part}(F)$ ровно k непустых и ℓ пустых частей. Если $\text{Int}(G_{i,i+1}) \neq \emptyset$, то $Q_{i,i+1}$ – разделяющее множество, зависимое с T . Следовательно, $T \cap \text{Int}(G_{i,i+1}) \neq \emptyset$. Таким образом, $k \leq 3$. Далее, если $\text{Int}(G_{j-1,j}) = \text{Int}(G_{j,j+1}) = \emptyset$, то по замечанию 10 вершины p и q_j смежны, следовательно, $q_j \in T$. Заметим, что пустые части $\text{Part}(F)$ разбиваются на не более, чем k последовательностей, что дает нам не менее $\ell - k$ лепестков, смежных с p . Таким образом, $3 = |T| \geq k + (\ell - k) = \ell$, следовательно, $m = k + \ell \leq 6$.

2) Пусть $\text{Int}(G_{i,i+1}) \neq \emptyset$ и $|T \cap G_{i,i+1}| = 2$. Тогда $|T \cap \text{Int}(G_{i+1,i})| = 1$, пусть $T \cap \text{Int}(G_{i+1,i}) = \{x\}$. Поскольку $m \geq 4$, то $G_{i+1,i}$ является объединением как минимум трёх частей $\text{Part}(F)$. Так как T содержит внутреннюю вершину каждой непустой части $\text{Part}(F)$ и общий лепесток двух соседних пустых частей, равенство $|T \cap \text{Int}(G_{i+1,i})| = 1$ возможно только в случае, когда $m = 4$, $\text{Int}(G_{i+1,i+2}) = \text{Int}(G_{i+3,i}) = \emptyset$ и $x \in \text{Int}(G_{i+2,i+3})$ (и мы имеем один из случаев, изображенных на рисунке 3ab). Тогда $T \cap G_{i+2,i+3} = \{x\}$ и $\{p, x\} \in \text{Part}(\{T, Q_{i+2,i+3}\})$. Следовательно, по лемме 9 множество $Q_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px – противоречие с леммой 21 (в этом случае ромашка F содержится в трёхрёберном разрезе $\{q_{i+1}q_{i+2}, px, q_iq_{i+3}\}$).

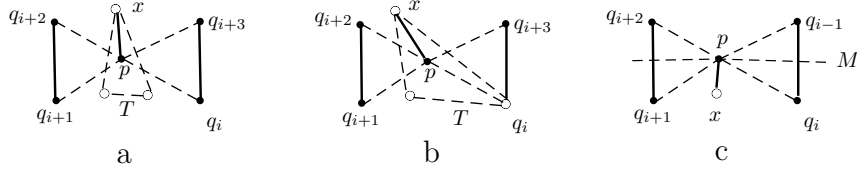


Рис. 3. Множество T отделяет центр p .

3) Из пункта 2 следует, что $G_{i,i+1} \cap T = \{x\}$, и, так как T отделяет p от $\{q_i, q_{i+1}\}$, x – единственная вершина части $G_{i,i+1} \in \text{Part}(M_{i,i+1})$, смежная с вершиной $p \in M_{i,i+1}$ (см. рисунок 3c). Следовательно, по лемме 9 множество $M_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px .

4) Итак, если $\text{Int}(G_{i,i+1}) \neq \emptyset$, то $|T \cap \text{Int}(G_{i,i+1})| = 1$ и $T \cap Q_{i,i+1} = \emptyset$. Кроме того, если $T \cap \text{Int}(G_{i,i+1}) = \{u\}$, то $\{p, u\} \in \text{Part}(\{T, Q_{i,i+1}\})$ по следствию 6, то есть, множество T отделяет p от всех остальных вершин части $G_{i,i+1}$. Поскольку это верно для всех непустых частей и T содержит все лепестки, не входящие в непустые части, то множество T отделяет p от остальных вершин графа G , то есть, $T = N_G(p)$. $\square$

3.6. Особые ромашки. В этом разделе мы опишем ромашки, центр которых можно отделить от остальных вершин множеством из $\mathfrak{R}_3(G)$.

Определение 20. 1) Невырожденную ромашку $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ назовем *особой*, если $d_G(p) = 3$ и *неособой* в противном случае.

2) Назовем *окрестностью особой ромашки* F множество

$$O(F) = V(F) \cup N_G(p).$$

Замечание 13. 1) Если существует множество $T \in \mathfrak{R}_3(G)$, отделяющее центр p невырожденной ромашки F от остальных вершин из $V(F)$, то по лемме 25 ромашка F – особая и $T = N_G(p)$,

2) Наоборот, если p – центр особой ромашки, то $N_G(p) \in \mathfrak{R}_3(G)$. По лемме 25 внутренность любой непустой части $\text{Part}(F)$ содержит ровно одну вершину множества $N_G(p)$, а ее граница не пересекается с $N_G(p)$.

3) Из леммы 23 следует, что окрестность центра особой ромашки делит граф ровно на две части.

Определение 21. Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ – особая ромашка, а $G_{i,i+1} \in \text{Part}(F)$ – непустая часть.

1) Обозначим через $u_{i,i+1}$ единственную вершину из $\text{Int}(G_{i,i+1})$, смежную с p .

2) По пункту 3 леммы 25, множество $M_{i,i+1}$ можно дополнить ребром $pu_{i,i+1}$. Обозначим полученный в результате дополнения разрез через $M'_{i,i+1}$. Будем использовать обозначения $G'_{i,i+1} = G_{i,i+1} \setminus \{p\}$ и $Q'_{i,i+1} = \text{Bound}(G'_{i,i+1}) = \{q_i, q_{i+1}, u_{i,i+1}\}$.

Множества $Q'_{i,i+1}$ (где $\text{Int}(G'_{i,i+1}) \neq \emptyset$) назовем *границами окрестности особой ромашки* F .

Замечание 14. Очевидно, $G'_{i,i+1} \in \text{Part}(M'_{i,i+1})$.

Опишем более детально, как может выглядеть особая ромашка $F = (p; q_1, \dots, q_m)$. Рассмотрим несколько случаев.

1. В $\text{Part}(F)$ три непустые части.

Тогда $N_G(p)$ содержит по вершине во внутренности каждой из этих частей, следовательно, центр p не смежен ни с одним из лепестков F . Отсюда по замечанию 10 следует, что две соседние части $\text{Part}(F)$ не могут быть пустыми. Таким образом, в $\text{Part}(F)$ от четырех до шести частей. Три вида особых ромашек с тремя непустыми частями изображены на рисунке 4.

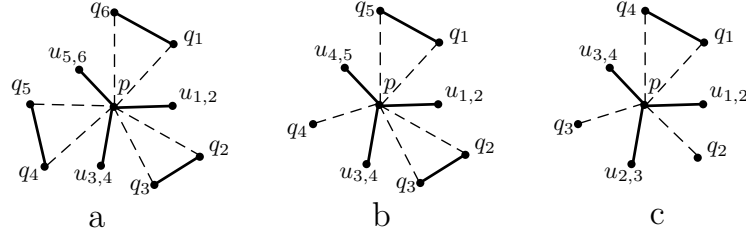


Рис. 4. Особые ромашки с тремя непустыми частями.

2. В $\text{Part}(F)$ две непустые части.

Тогда внутренность каждой из них содержит ровно по одной вершине множества $N_G(p)$, а третья вершина $N_G(p)$ – лепесток q_i , не входящий в непустые части $\text{Part}(F)$ (то есть, $\text{Int}(G_{i-1,i}) = \text{Int}(G_{i,i+1}) = \emptyset$). Поскольку все вершины, смежные с p , лежат в $N_G(p)$, в $\text{Part}(F)$ кроме четырех указанных частей может быть только одна пустая часть, причем соседняя с двумя непустыми. Таким образом, в $\text{Part}(F)$ четыре или пять частей.

Если частей четыре, то их можно занумеровать так, что $\text{Int}(G_{3,4}) = \text{Int}(G_{4,1}) = \emptyset$ (пустые части должны быть соседними!), части $G_{1,2}$ и $G_{2,3}$ – непустые, а $N_G(p) = \{u_{1,2}, u_{2,3}, q_4\}$ (рисунок 5а). Отметим, что в этом случае $F' = (q_4; u_{1,2}, q_2, u_{2,3}, p)$ – особая ромашка точно такого же типа, ее центр q_4 от остальных вершин графа отделяется множеством $\{q_1, p, q_3\}$. Легко видеть, что $O(F) = O(F')$. Назовем особые ромашки F и F' *двойственными*.

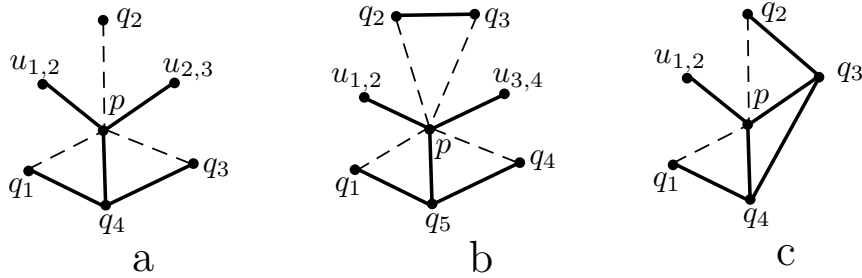


Рис. 5. Особые ромашки с двумя и одной непустыми частями.

Если в $\text{Part}(F)$ пять частей, то их можно занумеровать так, что $G_{4,5}$ и $G_{5,1}$ – две соседние пустые части, $G_{1,2}$ и $G_{3,4}$ – непустые, а $N_G(p) = \{u_{1,2}, u_{3,4}, q_5\}$ (рисунок 5b). Отметим, что в этом случае $F' = (q_5; u_{1,2}, q_2, q_3, u_{3,4}, p)$ – особая ромашка точно такого же типа, ее центр q_5 от остальных вершин графа отделяется множеством $\{q_1, p, q_4\}$ и при этом $O(F) = O(F')$. Назовем особые ромашки F и F' *двойственными*.

3. В $\text{Part}(F)$ одна непустая часть.

Докажем, что в таком случае ромашка F – вырожденная (а значит, не является особой). Пусть $G_{1,2}$ – единственная непустая часть $\text{Part}(F)$. Тогда $u_{1,2} \in N_G(p)$, а две другие вершины $N_G(p)$ по лемме 25 – лепестки ромашки, отличные от q_1 и q_2 . По замечанию 10, общий лепесток двух соседних пустых частей смежен с p , то есть, входит в $N_G(p)$. Следовательно, пустых частей ровно три (то есть, $m = 4$), а $N_G(p) = \{u_{1,2}, q_3, q_4\}$ (см. рисунок 5c). Тогда нетрудно понять, что $\{u_{1,2}p, q_1q_4, q_2q_3\} \in \mathfrak{T}_3(G)$ – разрез, содержащий ромашку F . Следовательно, ромашка F – вырожденная.

Лемма 26. Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ – особая ромашка, а $T \subset O(F)$ и $T \in \mathfrak{R}_3(G)$. Тогда выполнено одно из следующих условий:

- 1° $T = Q_{i,j}$;
- 2° $T = N_G(p)$;
- 3° T – внутреннее множество разреза $M'_{i,i+1}$, где $\text{Int}(G_{i,i+1}) \neq \emptyset$;
- 4° $T = Q'_{i,i+1}$, где $\text{Int}(G'_{i,i+1}) \neq \emptyset$ (то есть, T – граница окрестности F).

Доказательство. Если $T \subset V(F)$, то $T = Q_{i,j}$ по лемме 18. Пусть, скажем, $G_{1,2} \in \text{Part}(F)$ – непустая часть и $u_{1,2} \in T$. Тогда $p \notin T$, так как $M = \{q_1, q_2, pu_{1,2}\}$ – разрез, а разделяющее множество не может содержать двух вершин ребра разреза по лемме 11. Предположим, что T не содержится в разрезе M (иначе T содержится и в разрезе $M'_{1,2}$ и лемма доказана). Тогда из $T \subset O(F)$ следует, что T независимо с $Q_{1,2}$, то есть, разделяет $V(F)$.

Если T отделяет центр p от остальных вершин графа, то $T = N_G(p)$ по лемме 25 и утверждение доказано. По лемме 23 остается две возможности: T может отделять от остальных вершин ромашки один из лепестков или два соседних лепестка. Рассмотрим два случая.

1. T отделяет один лепесток F от остальных.

Так как T зависимо с $Q_{1,2}$, не умаляя общности можно считать, что это лепесток q_2 . Тогда по лемме 24 часть $G_{2,3}$ пуста, а T содержит q_3 и две вершины части $G_{1,2}$ (см. рисунок 5b). Так как $T \subset O(F)$, мы получаем, что $T = \{u_{1,2}, q_1, q_3\}$ – внутреннее множество разреза $M'_{1,2}$, что и требовалось доказать.

2. T отделяет два лепестка F от остальных.

Тогда по пункту 2 леммы 23 это могут быть только лепестки q_1 и q_2 , причем обе части $G_{m,1}$ и $G_{2,3}$ пусты, а $T = \{u_{1,2}, q_3, q_m\}$ (см. рисунок 4a). В этом случае также T – внутреннее множество разреза $M'_{1,2}$, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 27. Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ – особая ромашка, а F' – такая максимальная невырожденная ромашка, что $F' \neq F$, $V(F') \subset O(F)$ и F' не содержится ни в одном из разрезов $M'_{i,i+1}$ ромашки F . Тогда ромашки F и F' – двойственные.

Доказательство. Пусть p' – центр F' . Рассмотрим несколько случаев, чем может быть p' .

1. $p' = p$.

Из леммы 26 следует, что все содержащие p множества из $\mathfrak{R}_3(G)$, лежащие в $O(F)$ – это множества ромашки F . Тогда $F' = F$, противоречие.

2. $p' = u_{1,2}$.

Тогда часть $G_{1,2}$ непуста и $u_{1,2}$ лежит ровно в одном из разрезов $M'_{i,i+1}$ – в разрезе $M'_{1,2}$. По лемме 26 все содержащие $u_{1,2}$ множества из $\mathfrak{R}_3(G)$, лежащие в $O(F)$ – это $T = N_G(p)$ и множества, содержащиеся в разрезе $M'_{1,2}$ – но легко видеть, что все эти множества независимы с T . Следовательно, ромашка F' содержится в $M'_{1,2}$, противоречие.

3. $p' = q_k$ – лепесток F , несмежный с центром p .

Множества ромашки F , содержащие q_k , попарно независимы (так как все они содержат $\{p, q_k\}$). Значит, $V(F') \not\subset V(F)$, то есть, ромашка F' должна содержать вершину $u_{i,i+1}$ для некоторого i .

Докажем, что тогда $V(F') \subset W(M'_{i,i+1})$ и, тем самым, получим противоречие с условием. Действительно, пусть существует вершина $x \in V(F') \setminus W(M'_{i,i+1}) \subset O(F) \setminus W(M'_{i,i+1})$, отличная от q_k . Тогда 3-вершинное множество $S = \{q_k, u_{i,i+1}, x\}$ состоит из центра и двух лепестков F' . Это множество не может быть границей пустой части $\text{Part}(F')$, так как тогда по замечанию 10 было бы $u_{i,i+1}x \in E(G)$,

что невозможно: вершина $u_{i,i+1} \in \text{Int}(G_{i,i+1})$ может быть смежна в $O(F)$ только с $p, q_i, q_{i+1} \in W(M'_{i,i+1})$. Значит, $S \in \mathfrak{R}_3(G)$. В случае, когда $V(F') \setminus W(M'_{i,i+1}) = \{q_k\}$ рассмотрим произвольное множество $S \in \mathfrak{R}(F')$, содержащее лепесток $u_{i,i+1}$. В обоих случаях множество $S \supset \{u_{i,i+1}, q_k\}$, а значит, $S \neq N_G(p)$ (так как $q_k \notin N_G(p)$) и S не является множеством ромашки F (так как $u_{i,i+1} \notin V(F)$). Кроме того, S не может содержаться в разрезе $M'_{j,j+1}$ при $j \neq i$, так как $u_{i,i+1} \notin W(M'_{i,i+1})$. Получили противоречие с леммой 26.

4. p' – лепесток F , смежный с центром p .

Тогда все содержащие p' и лежащие в $O(F)$ множества из $\mathfrak{R}_3(G)$ в силу леммы 26 и описания особых ромашек – это в точности все множества ромашки, двойственной к F (см. $p' = q_4$ на рисунке 5а и $p' = q_5$ на рисунке 5b). Ввиду максимальной, F' – именно эта ромашка, что и требовалось доказать. $\square$

§4. КОМПЛЕКСЫ

Мы представим множество $\mathfrak{R}_3(G)$ как объединение нескольких комплексов. Это будут комплекс тройного разреза, комплекс ромашки, комплекс большого разреза, комплекс малого разреза, комплекс одностороннего множества и тривиальный комплекс. В разбиении графа каждым комплексом будут выделены главные части – непустые части, которые могут содержать другие комплексы. Далее с помощью теоремы 1 мы построим гипердерево взаимного расположения комплексов. В результате получится полная картина взаимного расположения трехвершинных разделяющих множеств в произвольном трехсвязном графе.

Определение 22. Множеством вершин любого комплекса $\mathcal{C}$ назовем множество $V(\mathcal{C})$, являющееся объединением всех входящих в $\mathcal{C}$ разделяющих множеств.

4.1. Комплекс тройного разреза.

Определение 23. Для любого тройного разреза F назовем комплексом тройного разреза $\mathcal{C}_F$ набор, состоящий из всех множеств $\mathfrak{R}_3(G)$, содержащихся в $W(F)$, кроме тех границ F , что делят граф более чем на две части. Ось и границы F мы будем называть соответственно осью и границами тройного комплекса $\mathcal{C}_F$.

Все непустые части $\text{Part}(\mathcal{C}_F)$ будем называть главными.

Пусть $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ – тройной разрез с осью S , $\text{Part}(S) = \{A_1, A_2, A_3\}$, а части $B_i \in \text{Part}(M_i)$ таковы, что $B_i \subset A_i$ (см. рисунок 6а).

Для каждой вершины $x \in S$ степени $d_G(x) = 3$ пусть $N_G(x) = \{x_1, x_2, x_3\}$, где $x_i \in \text{Int}(A_i)$. Напомним, что тогда M_i состоит из всех рёбер вида xx_i и вершин $y \in S$, имеющих степень более 3, а B_i получается из A_i удалением всех вершин множества S , имеющих степень 3.

Как следует из леммы 14, комплекс $\mathcal{C}_F$ состоит из S , всех тривиальных разделяющих множеств, подчиненных S (их не более трех), внутренних множеств тех из разрезов M_1 , M_2 и M_3 , что являются нетривиальными, и тех границ тройного разреза F , что делят граф G на две части. То есть, граница $\text{Bound}(B_i)$ входит в $\mathcal{C}_F$, если и только если она принадлежит $\mathfrak{R}_3(G)$ и не разделяет часть B_i .

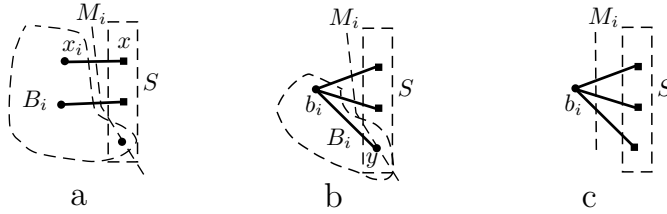


Рис. 6. Разбиение графа комплексом тройного разреза.

Лемма 28. Пусть F – тройной разрез с осью S . Тогда выполнены следующие утверждения.

- 1) $\{x, x_i\} \in \text{Part}(\mathcal{C}_F)$, где $x \in S$, $d_G(x) = 3$ и $xx_i \in M$.
- 2) Если разрез M_i нетривиален, то $B_i \in \text{Part}(\mathcal{C}_F)$, в этом случае $|B_i| \geq 3$.
- 3) Пусть разрез M_i тривиален – скажем, $\text{Int}(B_i) = \{b_i\}$, но не все вершины множества S имеют степень 3. Тогда $d_G(b_i) = 3$, $B_i \in \text{Part}(\mathcal{C}_F)$. В этом случае B_i состоит из b_i и всех вершин множества S , имеющих степень более 3.
- 4) Других частей в $\text{Part}(\mathcal{C}_F)$ нет.

Доказательство. Начнем с конца. Множество S делит граф на части A_1 , A_2 и A_3 . Для каждой вершины $x \in S$ степени $d_G(x) = 3$ множество $N_G(x) \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимо с S и $\{x, x_i\} \in \text{Part}(\{N_G(x), S\})$. Таким образом, множества комплекса $\mathcal{C}_F$ отделяют друг от друга все

части вида $\{x, x_i\}$ (из пункта 1) и части B_1, B_2, B_3 (получаемые из A_1, A_2, A_3 , соответственно, удалением всех вершин множества S , имеющих степень 3). Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество перечисленных частей. Несложно понять, что множества комплекса $\mathcal{C}_F$ части из $\mathfrak{M}$ не разделяют. Следовательно, $\text{Part}(\mathcal{C}_F)$ состоит в точности из тех частей указанных видов, что являются максимальными по включению.

Части $\{x, x_i\}$ всегда являются максимальными по включению.

Если разрез M_i нетривиален, то $T_i = \text{Bound}(B_i)$ состоит из трех вершин, которые вместе не входят в остальные части из $\mathfrak{M}$ (см. рис. 6а).

Пусть разрез M_i тривиален, $\text{Int}(B_i) = \{b_i\}$. Тогда B_i в силу сказанного выше состоит из b_i и тех вершин множества S , что имеют в G степень более 3. Если такие вершины есть (см. рисунок 6б, пусть y – одна из них), то часть B_i , очевидно, является максимальной по включению (остальные части не содержат b_i вместе с y). Если же все вершины множества S имеют степень 3 (см. рисунок 6с), то $B_i = \{b_i\}$ – очевидно, такая часть не является максимальной по включению. $\square$

Замечание 15. Таким образом, главные части $\text{Part}(\mathcal{C}_F)$ – это в точности те из частей B_1, B_2 и B_3 , что непусты.

Лемма 29. Пусть $\mathcal{C}_F$ – комплекс тройного разреза, $A \in \text{Part}(\mathcal{C}_F)$ – главная часть, $T = \text{Bound}(A)$. Тогда существует такая часть $\overline{A} \in \text{Part}(T)$, что $\overline{A} \supset V(\mathcal{C}_F)$, а часть A является объединением всех отличных от $\overline{A}$ частей $\text{Part}(T)$.

Доказательство. Пусть $A = B_i$, тогда $T = T_i$. Тогда по лемме 10 существует часть $\overline{A} \in \text{Part}(T_i)$, содержащая вершины из $W(M_i)$, а объединение остальных частей $\text{Part}(T_i)$ – это B_i . Ось S тройного разреза F лежит в части $\overline{A}$. По лемме 4 тогда все остальные части $\text{Part}(S)$ (а значит, и все вершины комплекса F) лежат в $\overline{A}$. $\square$

4.2. Комплекс важной ромашки. Пусть в графе G существует такая ромашка F , что в $\text{Part}(F)$ нет непустых частей. Тогда все вершины графа G являются вершинами ромашки, каждый лепесток F смежен с центром и двумя соседними лепестками. В этом случае все 3-разделяющие множества графа G – это множества ромашки F , а сам граф G является “колесом”. В дальнейшем не будем возвращаться к этому тривиальному случаю и будем считать, что для любой ромашки F в $\text{Part}(F)$ есть непустая часть. Для удобства здесь и далее мы будем считать, что для неособой ромашки $O(F) = V(F)$.

Определение 24. Назовем максимальную невырожденную ромашку F *важной*, если $O(F)$ не является строгим подмножеством окрестности другой ромашки и $V(F)$ не является подмножеством множества вершин какого-либо тройного разреза.

Следующая лемма покажет, чем важная ромашка отличается от максимальной невырожденной ромашки.

Лемма 30. Пусть $F' = (p'; q'_1, \dots, q'_m)$ – максимальная невырожденная ромашка, не являющаяся важной. Тогда $m = 4$ и лепестки можно занумеровать так, что $\{p', q'_1 q'_2, q'_4 q'_3\}$ – максимальный разрез. Более того, выполнено одно из двух следующих утверждений.

1° Существует такой тройной разрез $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, что $M = M_i$.

2° Существует такая особая ромашка F , что $M = M'_{i,i+1}$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Существует такой тройной разрез $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ с осью S , что $V(F') \subset W(F)$.

По лемме 23 множество, разделяющее $V(F')$, должно делить граф на две части, то есть, S не может быть таким множеством. Значит, $V(F')$ лежит в одной части $\text{Part}(S)$. Следовательно, не умаляя общности можно считать, что $V(F') \subset W(M_1)$. Из невырожденности F' следует, что $M_1 \in \mathfrak{T}_2(G)$ и $V(F') = W(M_1)$. По лемме 19 тогда $m = 4$ и лепестки можно занумеровать так, что $M_1 = \{p', q'_1 q'_2, q'_4 q'_3\}$. Таким образом, выполнено 1°.

2. Существует такая максимальная невырожденная ромашка F , что $O(F') \subsetneq O(F)$.

Пусть p – центр F . Если ромашка F – неособая, то по лемме 18 любое разделяющее множество, содержащееся в $V(F)$, должно содержать p . Следовательно, p – центр F' и $F = F'$, противоречие. Если F – особая ромашка, то по лемме 27 либо F' двойственна к F , либо F' содержится в одном из разрезов $M'_{i,i+1}$. Если ромашки F и F' двойственны, то $O(F') = O(F)$, что не противоречит важности ромашки F' . Значит, лепестки F можно занумеровать так, что $V(F') \subset W(M'_{1,2})$. Из невырожденности F' следует, что $M_{1,2} \in \mathfrak{T}_2(G)$ и $V(F') = W(M_{1,2})$. По лемме 19 тогда $m = 4$ и лепестки можно занумеровать так, что $M_{1,2} = \{p', q'_1 q'_2, q'_4 q'_3\}$. Таким образом, выполнено 2°. $\square$

Замечание 16. Из леммы 30 и описания особых ромашек следует, что особая ромашка всегда является важной.

Объектом изучения в этом разделе будет важная ромашка $F = (p; q_1, q_2, \dots, q_m)$. Как было показано выше, возможны два принципиально разных случая: ромашка F может быть особой или неособой.

Определение 25. Пусть F – важная ромашка.

1) Если ромашка F – неособая, то комплекс $\mathcal{C}_F$ состоит из всех множеств $\mathfrak{R}_3(G)$ на вершинах $V(F)$, кроме тех границ ромашки F , что делят граф более чем на две части. В этом случае *границами комплекса $\mathcal{C}_F$* мы будем называть границы ромашки, а $V(\mathcal{C}_F) = V(F)$.

2) Если ромашка F – особая, то комплекс $\mathcal{C}_F$ состоит из всех множеств $\mathfrak{R}_3(G)$ на вершинах $O(F)$, кроме тех границ $O(F)$, что делят граф более чем на две части. В этом случае *границами комплекса $\mathcal{C}_F$* мы будем называть границы окрестности ромашки, а $V(\mathcal{C}_F) = O(F)$.

3) В обоих случаях все непустые части $\text{Part}(\mathcal{C}_F)$ будем называть *главными*.

Замечание 17. 1) Если ромашка F – неособая, то по леммам 16 и 18 мы имеем $\text{Part}(\mathcal{C}_F) = \text{Part}(F)$. В комплекс ромашки включены в точности те ее границы, что являются разделяющими множествами и не разбивают частей $\text{Part}(F)$.

2) Пусть F – особая ромашка. В лемме 26 перечислены все множества из $\mathfrak{R}_3(G)$, содержащиеся в $O(F)$. Это множества ромашки F , окрестность центра $N_G(p)$, внутренние множества разрезов $M'_{i,i+1}$, где $\text{Int}(G_{i,i+1}) \neq \emptyset$ и границы $O(F)$. Граница $Q'_{i,i+1}$ входит в $\mathcal{C}_F$, если и только если она является разделяющим множеством и не разделяет часть $G'_{i,i+1}$.

3) Если F и F' – двойственные особые ромашки, то $O(F) = O(F')$, а значит, и $\mathcal{C}_F = \mathcal{C}_{F'}$.

Лемма 31. Пусть F – особая ромашка. Тогда $\text{Part}(\mathcal{C}_F)$ состоит из следующих частей:

- 1° $G'_{i,i+1}$, где $\text{Int}(G_{i,i+1}) \neq \emptyset$;
- 2° $\{q_i, q_{i+1}\}$, где $\text{Int}(G_{i,i+1}) = \emptyset$;
- 3° $\{p, u_{i,i+1}\}$, где $u_{i,i+1} \in N_G(p)$;
- 4° $\{p, q_i\}$, где $q_i \in N_G(p)$.

Доказательство. Напомним, что $\text{Part}(\mathfrak{R}(F)) = \text{Part}(F) = \{G_{i,i+1}\}_{i=1}^m$. Множество $N_G(p)$ отделяет от каждой части $G_{i,i+1}$ центр ромашки p . Поэтому, все указанные в условии леммы множества вершин отделены друг от друга в $\text{Part}(\mathcal{C}_F)$. Легко видеть, что множества из $\mathcal{C}_F$ не разделяют никакие из перечисленных множеств и все они являются максимальными по включению. $\square$

Замечание 18. Если ромашка F – особая, а $A \in \text{Part}(\mathcal{C}_F)$ – часть, содержащая хотя бы три вершины, то $A = G'_{i,i+1}$, где $\text{Int}(G_{i,i+1}) \neq \emptyset$.

Лемма 32. Пусть F – ромашка, $A \in \text{Part}(\mathcal{C}_F)$ – главная часть, $T = \text{Bound}(A)$. Тогда существует единственная часть $\bar{A} \in \text{Part}(T)$, содержащая $V(\mathcal{C}_F)$, а часть A является объединением всех отличных от $\bar{A}$ частей $\text{Part}(T)$.

Доказательство. Если ромашка F – неособая и $A = G_{i,i+1}$, то по лемме 16 мы имеем $\bar{A} = G_{i+1,i}$. Если ромашка F – особая и $A = G'_{i,i+1}$, то утверждение следует из леммы 10, примененной к разрезу $M'_{i,i+1}$. $\square$

4.3. Комплекс разреза.

Определение 26. 1) Пусть $M \in \mathfrak{T}_3(G)$ – нетривиальный разрез, причем $W(M)$ не содержится в множестве вершин никакого комплекса тройного разреза или комплекса ромашки. Будем называть такой разрез *большим*.

Определим *комплекс большого разреза* $\mathcal{C}_M$ как набор, состоящий из всех множеств из $\mathfrak{R}_3(G)$, содержащихся в $W(M)$, кроме тех его границ, что делят граф более чем на две части.

Границы T_1^M и T_2^M разреза M назовем *границами* комплекса $\mathcal{C}_M$.

2) Пусть $M \in \mathfrak{T}_1(G)$ – максимальный нетривиальный разрез, причем $W(M)$ не содержится в множестве вершин никакого комплекса тройного разреза или комплекса ромашки, а границы M не являются одиночными множествами. Будем называть этот разрез *малым*.

Как нам известно, существует всего два множества из $\mathfrak{R}_3(G)$, содержащихся в $W(M)$ – это границы разреза M . *Комплекс малого разреза* $\mathcal{C}_M$ состоит из этих двух множеств, они же являются *границами* комплекса $\mathcal{C}_M$.

3) Пусть $\mathcal{C}_M$ – комплекс большого или малого разреза. Если часть G_i^M непуста (где $i \in \{1, 2\}$), то будем называть эту часть *главной*.

Лемма 33. Пусть M – большой или малый разрез, $A \in \text{Part}(\mathcal{C}_M)$ – главная часть, $T = \text{Bound}(A)$. Тогда существует единственная часть $\bar{A} \in \text{Part}(T)$, содержащая $V(\mathcal{C}_M)$, а часть A является объединением всех отличных от $\bar{A}$ частей $\text{Part}(T)$.

Доказательство. Если $A = G_1^M$, то, по лемме 10, мы имеем $\bar{A} = O(G_2^M)$. $\square$

Замечание 19. 1) Пусть M – большой разрез. По лемме 11 любое множество $R \in \mathcal{C}_M$ содержится в разрезе M (то есть, содержит по одной вершине из каждого входящего в M ребра). Почти все такие множества входят в $\mathcal{C}_M$. А именно, в $\mathcal{C}_M$ входят все внутренние множества разреза M и те из его границ, что делят граф ровно на две части.

2) Пусть M – большой разрез. Тогда $\text{Part}(\mathcal{C}_M)$ состоит из частей G_1^M и G_2^M , а также малых частей вида $\{x_1, x_2\}$, где $x_1x_2 \in M$. Главные части $\text{Part}(\mathcal{C}_M)$ – в точности те из G_1^M и G_2^M , что непусты.

3) Разрез $M = \{x_1x_2, y_1y_2, z\} \in \mathfrak{T}_2(G)$ разбивает граф так же, как ромашка $F = (z; x_1, y_1, y_2, x_2)$. Поэтому, комплекс такого разреза нет смысла рассматривать, он является частным случаем комплекса ромашки.

4) Пусть $M = \{a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2\}$ – большой разрез. Как было доказано выше, существует шесть четырехлепестковых ромашек с вершинами из $W(M)$ (это $(b_1; a_1, a_2, c_2, c_1)$ и еще пять аналогичных). Те из них, что являются максимальными – вырожденные.

5) Пусть $M = \{x_1x_2, y, z\}$ – малый разрез. Легко видеть, что

$$\text{Part}(\mathcal{C}_M) = \{G_1^M, G_2^M, \{x_1, x_2, y, z\}\}.$$

Непустую внутренность могут иметь только части G_1^M и G_2^M . Главные части $\text{Part}(\mathcal{C}_M)$ – в точности те из G_1^M и G_2^M , что непусты.

6) Так как малый разрез не содержится ни в каком тройном разрезе, его граница не может быть осью тройного разреза. Следовательно, каждая из границ малого разреза – неединичное множество, делящее граф на две части.

4.4. Комплекс одиночного множества.

Определение 27. Назовем максимальный разрез $M \in \mathfrak{T}_1(G)$ *полуодиночным*, если $W(M)$ не содержится ни в каком комплексе ромашки, одна из границ M – одиночное множество, а вторая граница M – неединичное множество, делящее граф на две части.

Замечание 20. Полуодиночный разрез не может быть тривиальным, так как тривиальный разрез из $\mathfrak{T}_1(G)$ не может быть максимальным.

При определении комплексов разрезов мы не учли разрезы из $\mathfrak{T}_1(G)$, среди границ которых есть одиночные множества. Если обе границы такого разреза – одиночные, то такой разрез можно не рассматривать, рассмотрев его границы отдельно друг от друга. Каждый полуодиночный разрез мы “подчиним” его одиночной границе и рассмотрим вместе с ней.

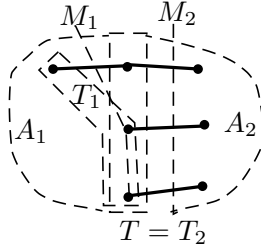


Рис. 7. Полуодиночный разрез и комплекс одиночного множества.

Определение 28. Пусть $T \in \mathfrak{D}(G)$, а $\text{Part}(T) = \{A_1, \dots, A_n\}$.

1) Предположим, что в $G(A_i)$ есть рёбра, которыми можно дополнить множество T . По лемме 9, тогда T можно дополнить всеми этими рёбрами одновременно и получить разрез M_i с границей T . Если M_i – полуодиночный разрез, то обозначим через T_i его границу, отличную от T . Во всех остальных случаях положим $T_i = T$ (см. рисунок 7).

2) Комплекс одиночного множества $\mathcal{C}_T$ состоит из T и всех множеств T_i .

3) Те из частей $\text{Part}(\mathcal{C}_T)$, что являются непустыми, назовём *главными*.

4) Если разрез M_i – полуодиночный, то пусть $B_i \in \text{Part}(M_i)$ – часть, содержащаяся в A_i . В остальных случаях положим $B_i = A_i$.

Лемма 34. Пусть $T \in \mathfrak{D}(G)$.

1) Комплекс $\mathcal{C}_T$ состоит из всех множеств $\mathfrak{R}_3(G)$, содержащихся в $V(\mathcal{C}_T)$. Все эти множества попарно независимы.

2) $\text{Part}(\mathcal{C}_T)$ состоит из частей $B_1, \dots, B_n$ и множеств $W(M_i)$ для всех полуодиночных разрезов из $M_1, \dots, M_n$.

Доказательство. 1) Пусть $R \subset V(\mathcal{C}_T)$, $R \in \mathfrak{R}_3(G)$ и $R \neq T$. Тогда R независимо с T , а значит, содержится ровно в одной из частей A_i . Следовательно, $T = T_i$.

2) Очевидно, так как множества из $\mathcal{C}_T$ попарно независимы, а каждое отличное от T множество T_i делит граф на 2 части. $\square$

4.5. Тривиальные комплексы. Остается последний вид комплекса – *тривиальный*.

Определение 29. 1) Пусть $T = \{x, y, z\}$ – неединичное тривиальное множество (то есть, $T = N_G(a)$, где $a \in V(G)$ и $d_G(a) = 3$), не вошедшее ни в один из определенных ранее комплексов. Тогда $\mathcal{C}_a = \{T\}$ – *тривиальный комплекс*.

2) Понятно, что $\text{Part}(\mathcal{C}_a)$ состоит из двух частей: $B = V(G - a)$ и $\{a, x, y, z\}$. Единственная *главная* часть – это B , определим ее *окрестность* как $O(B) = V(G)$ (то есть, как окрестность части разбиения графа тривиальным разрезом $\{xa, ya, za\}$).

Замечание 21. 1) Возможно, правильнее было бы назвать тривиальный комплекс $\mathcal{C}_a$ комплексом тривиального разреза $\{xa, ya, za\}$ – окрестность единственной главной части определена как окрестность части $\text{Part}(\{xa, ya, za\})$. В дальнейшем, это вызовет немало сложностей при работе, так как вторая граница этого тривиального разреза – вершина a , которая не является разделяющим множеством и не может быть включена в комплекс.

2) Часть $\{a, x, y, z\} \in \text{Part}(\mathcal{C}_a)$ непуста. Однако, так как $T = \{x, y, z\}$ неединично, существует зависимое с T множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$. Тогда $S \ni a$ разделяет $T = \{x, y, z\}$, а значит, часть $\{a, x, y, z\}$ будет разбита в $\text{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$ на пустые части. Поэтому, мы не считаем эту часть главной частью $\text{Part}(\mathcal{C}_a)$.

3) Очевидно, любое множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ лежит в окрестности единственной главной части $\text{Part}(\mathcal{C}_a)$.

4.6. Все множества входят в комплексы.

Теорема 2. Каждое множество $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ входит хотя бы в один из определенных выше комплексов (а именно, в комплекс ромашки, тройного, большого или малого разреза, в комплекс одиночного множества или тривиальный комплекс).

Доказательство. Если множество T – одиночное, оно входит в комплекс одиночного множества. Если множество T – тривиальное, то T образует тривиальный комплекс или входит в другие комплексы.

Далее пусть множество T – неединичное и нетривиальное. Тогда существует множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, зависимое с T . Если одно из множеств S или T делит граф более чем на две части, то другое множество является тривиальным и оба они входят в комплекс тройного разреза.

Пусть каждое из множеств S и T делит граф на две части. Если $S \cap T \neq \emptyset$, то эти два множества образуют ромашку, а значит, входят в комплекс ромашки, большого или тройного разреза.

Наконец, пусть $S \cap T = \emptyset$. Тогда по леммам 6 и 12 множество T дополняется до разреза $M \in \mathfrak{T}_1$. Так как T – нетривиальное, то разрез M – нетривиальный. Следовательно, T входит в комплекс разреза (тройного, большого или малого), комплекс одиночного множества или комплекс ромашки. $\square$

Лемма 35. Пусть M – полуодиночный разрез, а его граница T – одиночное множество. Тогда $W(M)$ содержится в множестве вершин ровно одного комплекса – комплекса одиночного множества C_T .

Доказательство. По определению комплекса одиночного множества $W(M) \subset V(C_T)$. Очевидно, $W(M)$ не может содержаться в множестве вершин другого одиночного комплекса, а также никакого тривиального комплекса или комплекса малого разреза.

Так как полуодиночный разрез M максимален, $W(M)$ не содержится в множестве вершин никакого большого разреза. По определению, $W(M)$ не содержится ни в каком комплексе ромашки.

Предположим, что $W(M) \subset V(C_F)$, где $F = \{M_1, M_2, M_3\}$ – тройной разрез с осью S . Так как ни одна из границ M не может быть неединичным множеством S , делящим граф на три части, то M не совпадает ни с одним из разрезов M_1 , M_2 и M_3 . В силу максимальной, тогда M не может содежаться ни в одном из этих разрезов.

Итак, $T \neq S$ и эти множества независимы. Поэтому, можно считать, что $T \subset A_1 \in \text{Part}(S)$. Так как $W(M) \not\subset W(M_1)$ и $W(M) \subset W(F)$, вторая граница T' разреза M не лежит в A_1 , а значит, зависима с S . Но тогда две вершины T' лежат в $\text{Int}(A_2) \cup \text{Int}(A_3)$, а значит, T и T' могут иметь только одну общую вершину, что не так. Противоречие. $\square$

4.7. Окрестность части разбиения графа нетривиальным комплексом.

Определение 30. Пусть $\mathcal{C}$ – комплекс, $A \in \text{Part}(\mathcal{C})$ – главная часть. Будем использовать обозначение $R_A = \text{Bound}(A)$.

Лемма 36. Пусть комплекс $\mathcal{C}$ – нетривиальный, $A \in \text{Part}(\mathcal{C})$ – главная часть. Тогда выполнено одно из двух утверждений.

1° $\mathcal{C} = \mathcal{C}_T$ – комплекс одиночного множества и $R_A = T$.

2° Существует часть $\bar{A} \in \text{Part}(R_A)$, содержащая $V(\mathcal{C})$. Часть A является объединением всех отличных от $\bar{A}$ частей $\text{Part}(T)$.

Доказательство. Если $\mathcal{C}$ – комплекс тройного разреза, то утверждение 2° доказано в лемме 29. Если $\mathcal{C}$ – комплекс большого или малого разреза, то утверждение 2° доказано в лемме 33. Если $\mathcal{C}$ – комплекс ромашки, то утверждение 2° доказано в лемме 32.

Остается случай, когда $\mathcal{C} = \mathcal{C}_T$ – комплекс одиночного множества. Если $R_A = T$, то выполнено утверждение 1°. Пусть $R_A \neq T$. Тогда M_A – полуодиночный разрез и $A \in \text{Part}(M_A)$. По лемме 10, существует такая часть $\bar{A} \in \text{Part}(R_A)$, что $\bar{A} \supset W(M_A)$, а A – объединение всех отличных от $\bar{A}$ частей $\text{Part}(R_A)$. Следовательно, $\bar{A} \supset T$. Тогда все не содержащие A части $\text{Part}(T)$ по лемме 4 также лежат в $\bar{A}$, а значит, $V(\mathcal{C}) \subset \bar{A}$. $\square$

Определение 31. Пусть комплекс $\mathcal{C}$ – нетривиальный, $A \in \text{Part}(\mathcal{C})$ – главная часть.

1) Если $\mathcal{C} = \mathcal{C}_T$ – комплекс одиночного множества и $R_A = T$, то положим $M_A = T_A = T$ и определим окрестность этой части как $O(A) = A$.

2) Во всех остальных случаях по лемме 36 существует часть $\bar{A} \in \text{Part}(R_A)$, содержащая $V(\mathcal{C})$. В этом случае *окрестность* $O(A)$ строится следующим образом: множество R_A дополняется до *граничного разреза* M_A части A всеми возможными ребрами, лежащими в $\bar{A}$, а $O(A) = A \cup W(M_A)$ (если таких рёбер нет, то $M_A = R_A$ и $O(A) = A$).

Если $M_A \neq R_A$, то одна из границ разреза M_A – это R_A , а другая – обозначим ее через T_A – *внешняя граница* части A (см. рисунок 8). Если $M_A = R_A$, то положим $T_A = R_A$.

Замечание 22. 1) Так как комплекс $\mathcal{C}$ – нетривиальный, разрез M_A не может быть тривиальным, то есть, $|T_A| \geq 3$.

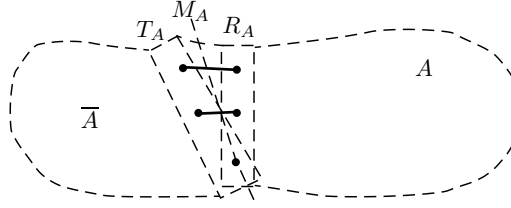


Рис. 8. Граничный разрез и внешняя граница части A .

2) Если разрез M_A – вырожденный, то множество T_A не является разделяющим. В этом случае мы будем работать с T_A как с разделяющим множеством: положим $\text{Part}(T_A) = \{V(G)\}$, границей этой части будем считать T_A , а внутренностью – $V(G) \setminus T_A$.

2) Пусть $T_A \notin \mathfrak{R}_3(G)$ и $S \in \mathfrak{R}_3(G)$. Из данного выше определения следует, что T_A не разделяет S . С другой стороны, по замечанию 5 тогда вершины множества T_A попарно смежны, а значит, S не разделяет T_A . Таким образом, можно считать, что T_A независимо со всеми множествами из $\mathfrak{R}_3(G)$.

Замечание 23. Пусть комплекс $\mathcal{C}$ – нетривиальный, $A \in \text{Part}(\mathcal{C})$ – главная часть.

1) Если M_A – разрез (то есть, $M_A \neq R_A$), то $O(A)$ – окрестность A как части $\text{Part}(M_A)$. В этом случае $O(A) \in \text{Part}(T_A)$ (по лемме 10) и $O(A) \setminus A \subset T_A$.

2) Если $\mathcal{C}$ – комплекс большого или малого разреза M , а $A \in \text{Part}(\mathcal{C})$, то $M_A = M$.

3) Пусть $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ – комплексы, а главные части $A \in \text{Part}(\mathcal{C}_1)$ и $B \in \text{Part}(\mathcal{C}_2)$ таковы, что $B \subset A$.

Тогда $O(B) \subset O(A)$. (В случае, если комплекс $\mathcal{C}_1$ – тривиальный, то $O(A) = V(G)$. В остальных случаях утверждение следует из определения 31.) Кроме того, из леммы 1 следует, что $\text{Int}(B) \subset \text{Int}(A)$.

Лемма 37. Пусть $\mathcal{C}$ – нетривиальный комплекс, а $A \in \text{Part}(\mathcal{C})$ – главная часть. Тогда выполнены следующие утверждения.

1) $W(M_A) \subset V(\mathcal{C})$.

2) Все множества из $\mathfrak{R}_3(G)$, содержащиеся в M_A и отличные от его границ, входят в $\mathcal{C}$. Если граница разреза M_A не входит в $\mathcal{C}$, то она является границей комплекса $\mathcal{C}$ и делит граф более чем на две части.

Доказательство. 1) Случай $M_A = R_A$ очевиден. Далее считаем, что M_A – разрез. Если $\mathcal{C}$ – комплекс разреза M , то $M = M_A$ и утверждение доказано.

Пусть $\mathcal{C}$ – комплекс тройного разреза F . В обозначениях раздела 4.1 будем считать, что $A = B_i$. Тогда $M_A = M_i$ и $W(M_i) \subset W(F) \subset V(\mathcal{C})$.

Пусть $\mathcal{C}$ – комплекс одиночного множества. Тогда M_A – полуодиночный разрез и $W(M_A) \subset V(\mathcal{C})$ по определению.

Наконец, пусть $\mathcal{C}$ – комплекс ромашки F . Если F – неособая, то можно считать, что $A = G_{i,i+1}$. По лемме 21 тогда $M_A = M_{i,i+1}$. Если F – особая, то можно считать, что $A = G'_{i,i+1}$. Тогда из лемм 21 и 25 следует, что $M_A = M'_{i,i+1}$. В обоих случаях, $W(M_A) \subset V(\mathcal{C})$.

2) Прямое следствие пункта 1 и определений комплексов. $\square$

Лемма 38. Пусть $\mathcal{C}$ – комплекс, а $T \in \mathfrak{A}_3(G) \setminus \mathcal{C}$. Тогда существует единственная такая главная часть $A \in \text{Part}(\mathcal{C})$, что $T \subset O(A)$. Более того, либо $T = R_A$, либо T пересекает $\text{Int}(A)$. Внутренностей других главных частей $\text{Part}(\mathcal{C})$ множество T не пересекает.

Доказательство. Если $\mathcal{C}$ – тривиальный комплекс, то существует всего одна главная часть $A \in \text{Part}(\mathcal{C})$ и $O(A) = V(G)$, поэтому, $T \subset O(A)$. Далее пусть комплекс $\mathcal{C}$ – нетривиальный.

Если T не пересекает внутренностей главных частей $\text{Part}(\mathcal{C})$, то $T \subset V(\mathcal{C})$. Так как $T \notin \mathcal{C}$, из определений комплексов следует, что T – граница части $\text{Part}(\mathcal{C})$ и такая часть ровно одна, что и требовалось доказать.

Далее считаем, что $T \not\subset V(\mathcal{C})$. Предположим, что мы доказали существование такой части A , что $T \subset O(A)$. Тогда $T \cap \text{Int}(A) \neq \emptyset$. Окрестности других главных частей $\text{Part}(\mathcal{C})$ не пересекаются с $\text{Int}(A)$ и, следовательно, не содержат T . И наоборот, внутренности других главных частей $\text{Part}(\mathcal{C})$ не пересекаются с $O(A)$ и, следовательно, не пересекают T . Таким образом, остается лишь доказать, что существует часть $A \in \text{Part}(\mathcal{C})$, окрестность которой содержит T . Для этого рассмотрим несколько случаев, чем может быть комплекс $\mathcal{C}$.

1. $\mathcal{C} = \mathcal{C}_M$ – комплекс большого или малого разреза M .

Тогда по лемме 22 множество T лежит в окрестности одной из частей $\text{Part}(M)$ и эта часть нам подходит в качестве A .

2. $\mathcal{C} = \mathcal{C}_F$ – комплекс тройного разреза F .

Пусть S – ось F . Тогда T независимо с S , а значит, можно считать, что T лежит в части $A_1 \in \text{Part}(S)$. Тогда M_1 – разрез, $B_1 \in \text{Part}(\mathcal{C})$ и $T \subset A_1 = O(B_1)$. Очевидно, часть $A = B_1$ нам подходит.

3. $\mathcal{C} = \mathcal{C}_S$ – одиночный комплекс.

Так как T независимо с S , существует такая часть $B \in \text{Part}(S)$, что $T \subset B$. Ровно одна часть $A \in \text{Part}(\mathcal{C})$ лежит в B , более того, тогда $O(A) = B$. Часть A нам подходит.

4. $\mathcal{C} = \mathcal{C}_F$ – комплекс ромашки $F = (p; q_1, \dots, q_m)$.

Как сказано выше, можно считать, что существует такая часть $H \in \text{Part}(\mathcal{C}_F)$, что $T \cap \text{Int}(H) \neq \emptyset$. Докажем, что $R \subset O(H)$. Если T независимо с R_H , то доказываемое утверждение очевидно. Далее пусть T зависимо с R_H . Рассмотрим два случая.

4.1. Ромашка F – неособая.

В этом случае $H = G_{i,i+1}$, $T \cap \text{Int}(G_{i,i+1}) \neq \emptyset$ и T разделяет $Q_{i,i+1} = \{q_i, q_{i+1}, p\}$. Тогда T разделяет $V(F)$, а значит, по лемме 23 множество T отделяет одну или две вершины из $V(F)$ от остальных. Если таких вершин две, то по пункту 2 леммы 23 это два соседних лепестка, (причем в нашем случае это могут быть только q_i и q_{i+1}) и $T \subset O(G_{i,i+1})$. Если T отделяет одну вершину из $V(F)$ от остальных, то по замечанию 13 эта вершина – лепесток ромашки (иначе ромашка – особая). Теперь из леммы 24 следует, что отрезаемый лепесток – это q_i или q_{i+1} , а $T \subset O(G_{i,i+1})$. Часть $A = G_{i,i+1}$ нам подходит.

4.2. Ромашка F – особая.

В этом случае $H = G'_{i,i+1}$, $T \cap \text{Int}(G'_{i,i+1}) \neq \emptyset$ и T разделяет $Q'_{i,i+1} = \{q_i, q_{i+1}, u_{i,i+1}\}$. Если T разделяет $V(F)$, доказательство аналогично предыдущему пункту. Действительно, если T отделяет центр p от остальных вершин $V(F)$, мы имеем $T = N_G(p) \in \mathcal{C}_F$, противоречие. В случае, когда T отделяет лепестки q_i, q_{i+1} от остальных вершин $V(F)$, по пункту 2 леммы 23 мы получим, что $T = \{q_{i-1}, q_{i+2}, u_{i,i+1}\} \in \mathcal{C}_F$, противоречие. Наконец, если T отделяет один лепесток от остальных вершин $V(F)$, по лемме 24 это q_i или q_{i+1} и мы имеем $T \subset O(G'_{i,i+1})$.

Остается случай, когда T не разделяет $V(F)$. Тогда T отделяет $u_{i,i+1}$ от $V(F)$. Следовательно, $T \ni p$. По теореме Менгера в двусвязном графе $G - p$ существуют $q_i u_{i,i+1}$ -путь L_i и $q_{i+1} u_{i,i+1}$ -путь L_{i+1} без общих внутренних вершин (см. рисунок 9). Очевидно, $\text{Int}(L_i) \cup \text{Int}(L_{i+1}) \subset \text{Int}(G'_{i,i+1})$. Множество T должно содержать по вершине из $\text{Int}(L_i)$ и

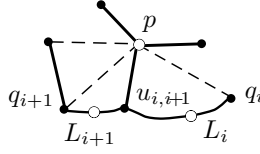


Рис. 9. Вершины множества T (помечены белым) отделяют $u_{i,i+1}$ от вершин особой ромашки.

$\text{Int}(L_{i+1})$. Следовательно, $T \subset O(G'_{i,i+1})$. Часть $A = G'_{i,i+1}$ нам подходит. $\square$

§5. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСОВ

5.1. Часть, к которой относится комплекс.

Определение 32. Пусть $\mathcal{C}$ – комплекс.

1) Будем говорить, что множество $T \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathcal{C}$ *относится* к главной части $A \in \text{Part}(\mathcal{C})$, если $T \subset O(A)$ и либо $T = R_A$, либо $T \cap \text{Int}(A) \neq \emptyset$.

2) Будем говорить, что комплекс $\mathcal{C}'$ (отличный от $\mathcal{C}$) *относится* к главной части $A \in \text{Part}(\mathcal{C})$, если $V(\mathcal{C}') \subset O(A)$ и все множества из $\mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}$ относятся к A .

Следствие 1. Пусть $\mathcal{C}$ – комплекс, $T \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathcal{C}$.

1) Множество T относится ровно к одной главной части $\text{Part}(\mathcal{C})$ и не пересекает внутренностей других главных частей $\text{Part}(\mathcal{C})$.

2) Если главная часть $A \in \text{Part}(\mathcal{C})$ такова, что $T \cap \text{Int}(A) \neq \emptyset$, то T относится к части A .

Доказательство. 1) Прямое следствие леммы 38.

2) Прямое следствие пункта 1. $\square$

Лемма 39. Пусть $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ – комплексы, причём $|\mathcal{C}_2| \geq 2$. Пусть главная часть $A \in \text{Part}(\mathcal{C}_1)$ такова, что $V(\mathcal{C}_2) \subset O(A)$. Тогда комплекс $\mathcal{C}_2$ относится к части A .

Доказательство. Из определений комплексов следует, что включение $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$ невозможно. Пусть $S \in \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_1$. Если $S \cap \text{Int}(A) \neq \emptyset$, то S относится к части A по следствию 1. Пусть $S \cap \text{Int}(A) = \emptyset$. Тогда S содержится в граничном разрезе M_A части A . По лемме 37 тогда S –

граница разреза M_A и комплекса $\mathcal{C}_1$. Граница R_A , очевидно, относится к части A .

Остается рассмотреть границу T_A в случае, когда $T_A \neq R_A$, $T_A \in \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_1$ и T_A – граница комплекса $\mathcal{C}_1$. Тогда $|\text{Part}(T_A)| \geq 3$. Множество T_A независимо со всеми множествами из $\mathfrak{A}_3(G)$, лежащими в $O(A)$, а значит, и со всеми множествами из $\mathcal{C}_2$. Если T_A – граница комплекса $\mathcal{C}_2$, то в силу $|\text{Part}(T_A)| \geq 3$ мы имеем $T_A \notin \mathcal{C}_2$, противоречие.

Остается случай, когда T_A независимо со всеми множествами комплекса $\mathcal{C}_2$, но не является его границей. Это возможно, только если $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{T_A}$ – комплекс одиночного множества. Из $V(\mathcal{C}_2) \subset O(A)$, $|\mathcal{C}_2| \geq 2$ и определения комплекса одиночного множества следует, что $\mathcal{C}_2 = \{T_A, R_A\}$, а M_A – полуодиночный разрез. Тогда из леммы 35 и $W(M_A) \subset V(\mathcal{C}_1)$ следует, что $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$, противоречие. $\square$

Лемма 40. 1) Пусть комплекс $\mathcal{C}$ и важная ромашка F таковы, что $V(F) \subset V(\mathcal{C})$. Тогда $\mathcal{C}$ – комплекс ромашки F .

2) Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ – комплексы, $|\mathcal{C}_2| \geq 2$. Тогда $V(\mathcal{C}_2) \not\subset V(\mathcal{C}_1)$.

Доказательство. 1) В этом случае $\mathcal{C}$ не может быть ни комплексом малого разреза, ни комплексом одиночного множества. В силу невырожденности F , $\mathcal{C}$ не может быть комплексом большого разреза. По определению важной ромашки, $\mathcal{C}$ не может быть комплексом тройного разреза.

Остается случай, когда $\mathcal{C}$ – комплекс ромашки F' с центром p . Если ромашка F' – неособая, то по лемме 18 любое разделяющее множество, содержащееся в $V(\mathcal{C}) = V(F')$, должно содержать p , следовательно, p – центр F и $F = F'$.

Пусть F' – особая ромашка. Если F и F' двойственны, то $O(F') = O(F)$, а значит, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_F$, что и требовалось доказать. Остается случай, когда ромашки F и F' не двойственны. Тогда по лемме 27 ромашка F содержится в одном разрезе $M'_{i,i+1}$ особой ромашки F' . В этом случае ромашка F имеет 4 лепестка и не может быть особой: в разбиении графа особой ромашкой с 4 лепестками должно быть две соседних непустых части (см. классификацию особых ромашек и рисунки 4с и 5а), в то время как в разбиении графа ромашкой, содержащейся в разрезе, не может быть двух соседних непустых частей. Значит, $O(F) = V(F) \subsetneq O(F')$, что противоречит важности ромашки F .

2) В случае, когда $|\mathcal{C}_1| = 1$, утверждение очевидно. Далее мы будем считать, что $|\mathcal{C}_1| > 1$. Рассмотрим несколько случаев, чем может быть комплекс $\mathcal{C}_2$.

а. $\mathcal{C}_2$ – комплекс большого или малого разреза.

По определению, $V(\mathcal{C}_2)$ не может быть подмножеством множества вершин комплекса ромашки или комплекса тройного разреза. Из определения комплекса одиночного множества следует, что $V(\mathcal{C}_2)$ не может быть подмножеством множества вершин такого комплекса. Также $V(\mathcal{C}_2)$ не может быть подмножеством множества вершин комплекса другого большого или малого разреза.

б. $\mathcal{C}_2$ – комплекс тройного разреза F с осью S .

Тогда $S \subset V(\mathcal{C}_1)$. Докажем, что S – граница комплекса $\mathcal{C}_1$. В самом деле, если это не так, то $S \in \mathcal{C}_1$. Ни комплекс большого разреза, ни комплекс ромашки не содержит множеств, делящих граф на 3 части. Комплекс одиночного множества не содержит неодионого множества, делящего граф на три части. Остается случай, когда $\mathcal{C}_1$ – комплекс тройного разреза с осью S' . Но тогда $S' \neq S$, а других множеств, делящих граф на 3 части, $\mathcal{C}_1$ не содержит.

Итак, $S = \text{Bound}(A)$, где $A \in \text{Part}(\mathcal{C}_1)$. Тогда одна из частей $\text{Part}(S)$ (пусть это A_1) лежит в A и $\text{Int}(A_1) \subset \text{Int}(A)$. Пусть $a \in S$ – вершина степени 3, а $a_1 \in \text{Int}(A_1) \cap N_G(a)$. Тогда $a_1 \in \text{Int}(A)$, а значит, $a_1 \notin V(\mathcal{C}_1)$.

в. $\mathcal{C}_2$ – комплекс важной ромашки F .

По пункту 1, тогда $\mathcal{C}_1$ – также комплекс важной ромашки F , противоречие.

д. $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_T$ – комплекс одиночного множества.

Так как $|\mathcal{C}_T| \geq 2$, мы имеем $V(\mathcal{C}_T) \supset W(M)$ для некоторого полуодионого разреза M . По лемме 35, $W(M) \not\subset V(\mathcal{C}_1)$. $\square$

Теорема 3. Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ – два комплекса. Тогда существует единственная такая главная часть $A \in \text{Part}(\mathcal{C}_1)$, что $\mathcal{C}_2$ относится к A .

Доказательство. Случай, когда $\mathcal{C}_2$ состоит из одного множества, следует из следствия 1. Далее считаем, что $|\mathcal{C}_2| \geq 2$. По лемме 40 существует вершина $a \in V(\mathcal{C}_2) \setminus V(\mathcal{C}_1)$. Не умаляя общности можно считать, что $a \in \text{Int}(A)$, $A \in \text{Part}(\mathcal{C}_1)$. Случай, когда комплекс $\mathcal{C}_1$ – тривиальный, очевиден. В остальных случаях все непустые части $\text{Part}(\mathcal{C}_1)$ – главные, а значит, часть A – главная. В силу следствия 1 комплекс $\mathcal{C}_2$ может относиться только к части A .

По лемме 39 достаточно доказать, что существует такая часть $A' \in \text{Part}(\mathcal{C}_1)$, что $V(\mathcal{C}_2) \subset O(A')$. Для этого разберем несколько случаев, чем является комплекс $\mathcal{C}_2$. В некоторых случаях мы будем выбирать $A' = A$, но иногда часть A' будет выбираться из других соображений (хотя в результате, разумеется, окажется, что $A' = A$).

1. $\mathcal{C}_2$ – комплекс малого разреза $M = \{x_1x_2, y, z\}$.

Тогда $T_1^M = \{x_1, y, z\}$, $T_2^M = \{x_2, y, z\}$. Если $a \in \{y, z\}$, то $T_1^M \cap \text{Int}(A) \neq \emptyset$ и $T_2^M \cap \text{Int}(A) \neq \emptyset$, откуда в силу следствия 1 следует, что T_1^M и T_2^M относятся к A . Пусть $x_1 = a \in \text{Int}(A)$ (случай $x_2 = a$ аналогичен). Тогда по следствию 1 множество T_1^M относится к части A , а значит, $T_1^M \subset O(A)$. Из $x_1 \in \text{Int}(A)$ следует, что $x_2 \in A$, а значит, $V(\mathcal{C}_2) \subset O(A)$.

2. $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_T$ – комплекс одиночного множества.

Одиночное множество T лежит в одной из частей $\text{Part}(\mathcal{C}_1)$ – пусть, скажем, $T \subset A'$. Если $T \neq R_{A'}$, то, аналогично пункту 1, вторая граница любого полуодиночного разреза M_i лежит в $O(A')$, откуда $V(\mathcal{C}_2) \subset O(A')$.

Пусть $T = R_{A'}$ – граница комплекса $\mathcal{C}_1$. Так как $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_T$, по лемме 36 существует такая часть $\overline{A'} \in \text{Part}(T)$, что $V(\mathcal{C}_1) \subset \overline{A'}$, а A' – объединение всех отличных от $\overline{A'}$ частей $\text{Part}(T)$. Тогда A' содержит все вершины из $V(\mathcal{C}_T)$, кроме тех, что лежат в $\overline{A'}$. Таким образом, если $V(\mathcal{C}_T) \not\subset A'$, то разрез $M_{A'}$, полученный из T дополнением всеми возможными рёбрами, концы которых лежат в $\text{Int}(\overline{A'})$ – полуодиночный разрез, входящий в комплекс $\mathcal{C}_T$. Однако, по лемме 37 тогда $W(M_{A'}) \subset V(\mathcal{C}_1)$, что противоречит лемме 35.

3. $\mathcal{C}_2$ – комплекс большого разреза $M = \{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\}$.

Не умаляя общности будем считать, что $a = x_1 \in \text{Int}(A)$. Тогда все множества комплекса $\mathcal{C}_2$, содержащие x_1 , пересекают $\text{Int}(A)$, а значит, относятся к A и содержатся в $O(A)$. Из $x_1 \in \text{Int}(A)$ следует, что $x_2 \in A$. Таким образом, $V(\mathcal{C}_2) \subset O(A)$.

4. $\mathcal{C}_2$ – комплекс тройного разреза $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ с осью S .

По лемме 38 существует такая главная часть $A' \in \text{Part}(\mathcal{C}_1)$, что $S \subset O(A')$, причем при $S \not\subset A'$ множества S и $R_{A'}$ зависимы.

Предположим, что S и $R_{A'}$ зависимы. Тогда $T = R_{A'}$ – тривиальное множество. Пусть $T = N_G(a)$. Тогда $\text{Part}(T) = \{B, B'\}$, где $B = \{a\} \cup N_G(a)$. Пусть $S = \{a, c, c'\}$. Предположим, что $A' = B$.

Тогда из $S \subset O(A')$ следует, что $c, c' \in O(A')$, то есть, $T = R_{A'}$ дополняется до граничного разреза $M_{A'}$ рёбрами xc и $x'c'$, где $x, x' \in T$ – различные вершины (см. рисунок 10а). Пусть $A_x \in \text{Part}(S)$ – такая часть, что $x \in \text{Int}(A_x)$. По лемме 5 тогда $U = A_x \cap B' \in \text{Part}(\{S, T\})$ и $\text{Bound}(U) = \{c, c', x\}$. По лемме 9 вершина x смежна ровно с одной вершиной части U – с $c \in \text{Bound}(U)$. Если $\text{Int}(U) \neq \emptyset$, то x по лемме 1 должна быть смежна с вершиной из $\text{Int}(U)$, что не так. Следовательно, $\text{Int}(U) = \emptyset$, откуда $\text{Int}(A_x) = \{x\}$. Однако, c' по лемме 1 должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из $\text{Int}(A_x)$, а значит, $c'x \in E(G)$ – противоречие с доказанным выше. Следовательно, $A' = B' = V(G) \setminus \{a\}$. Из $a \in S \subset O(A')$ следует, что $O(A') = V(G)$ – очевидно, это множество содержит $V(\mathcal{C}_2)$.

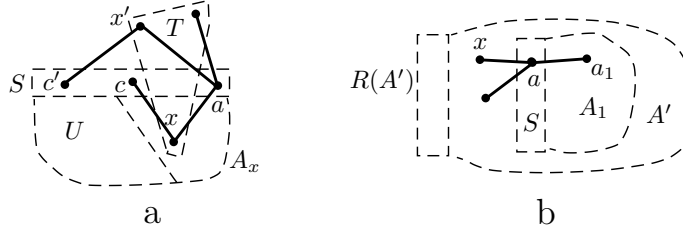


Рис. 10. Ось S комплекса тройного разреза и множество $R_{A'}$.

Остается рассмотреть случай, когда $S \subset A'$. По лемме 4 существует такая часть $A_1 \in \text{Part}(S)$, что $A_1 \subset A'$ и $\text{Int}(A_1) \subset \text{Int}(A')$. Пусть $x \in V(\mathcal{C}_2) \setminus S$. Тогда существует такая вершина $a \in S$, что $d_G(a) = 3$ и $x \in T = N_G(a)$ (см. рисунок 10b). Отметим, что существует вершина $a_1 \in T \cap \text{Int}(A_1) \subset \text{Int}(A')$. По следствию 1, T относится к части A' и $x \in T \subset O(A')$.

5. $\mathcal{C}_2$ – комплекс ромашки $F = (p; q_1, \dots, q_m)$.

В этом случае по пункту 1 леммы 40 одна из вершин $a \in V(F)$ не лежит в $V(\mathcal{C}_1)$. Как и выше, пусть $a \in \text{Int}(A)$, $A \in \text{Part}(\mathcal{C}_1)$. Нам достаточно доказать, что $V(\mathcal{C}_2) \subset O(A)$.

Сначала докажем, что $V(F) \subset O(A)$. Если $a = p$, то, так как все множества ромашки F содержат p , все они относятся к части A , следовательно, $V(F) \subset O(A)$. Далее пусть a – лепесток ромашки (скажем, $a = q_2$). Если множество $Q_{2,i}$ – разделяющее, то оно относится к части A (так как содержит $q_2 = a$). Так как при $i \in \{4, \dots, m\}$ множества

$Q_{2,i}$ – разделяющие, получаем $p, q_4, \dots, q_m \in O(A)$. Если $Q_{1,2} \in \mathfrak{R}_3(G)$, то и $q_1 \in O(A)$. Если же $Q_{1,2} \notin \mathfrak{R}_3(G)$, то часть $G_{1,2} \in \text{Part}(F)$ – пустая, а значит, $q_1 q_2 \in E(G)$, откуда следует, что $q_1 \in A$. Аналогично для лепестка q_3 .

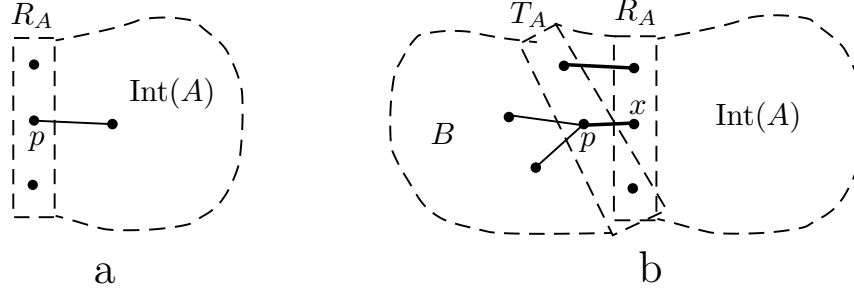


Рис. 11. Окрестность центра особой ромашки.

В случае, когда ромашка F – неособая, утверждение доказано. Пусть ромашка F – особая. В этом случае нужно доказать, что $N_G(p) \subset O(A)$. Если $p \in \text{Int}(A)$, то $N_G(p) \subset A$. Если $p \in R_A$, то вершина p смежна хотя бы с одной вершиной из $\text{Int}(A)$, то есть, $N_G(p) \cap \text{Int}(A) \neq \emptyset$ (см. рисунок 11a), а значит, $N_G(p)$ относится к части A и $N_G(p) \subset O(A)$, что и требовалось доказать.

Остается случай, когда $p \in O(A) \setminus A$. В этом случае $px \in M_A$, где $x \in R_A$ и $p \in T_A$. По замечанию 23 в рассматриваемом случае $O(A) \in \text{Part}(T_A)$. Таким образом, вершина p смежна только с одной вершиной из $\text{Int}(O(A))$ – с x . Остальные две вершины из $N_G(p)$ лежат в $B = V(G) \setminus \text{Int}(O(A))$ (см. рисунок 11b). Так как $V(F) \subset O(A)$, все множества из $\mathfrak{R}(F)$ независимы с T_A . Поэтому, существует такая часть $G_{i,i+1} \in \text{Part}(F)$, что $B \subset G_{i,i+1}$. Но тогда $|G_{i,i+1} \cap N_G(p)| \geq 2$, что противоречит структуре особых ромашек (а именно, лемме 25). $\square$

5.2. Гипердерево комплексов. Далее мы применим для описания взаимного расположения комплексов конструкцию гиперграфа разбиения.

Определение 33. Пусть $\mathfrak{C} = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ – множество всех комплексов трёхсвязного графа G . Обозначим через $A_{i \supset j}$ часть $\text{Part}(\mathcal{C}_i)$, к которой относится комплекс $\mathcal{C}_j$.

Каждому комплексу $\mathcal{C}_i$ поставим в соответствие разбиение $\mathfrak{C}_i$ остальных комплексов на классы: комплексы $\mathcal{C}_j$ и $\mathcal{C}_\ell$ попадут в один класс разбиения тогда и только тогда, когда $A_{i \supset j} = A_{i \supset \ell}$.

Будем говорить, что комплекс $\mathcal{C}_i$ *разделяет* $\mathcal{C}_j$ и $\mathcal{C}_\ell$, если они содержатся в разных классах разбиения $\mathfrak{C}_i$. Назовем комплексы $\mathcal{C}_i$ и $\mathcal{C}_j$ *соседними*, если их не разделяет никакой отличный от них комплекс.

Обозначим через $\mathcal{T}(G)$ гиперграф, вершинами которого являются комплексы графа G , а гиперребрами – максимальные по включению множества попарно соседних комплексов. Гиперграф $\mathcal{T}(G)$ назовем *гиперграфом разбиения* графа G .

К сожалению, комплексы могут пересекаться. Однако, с помощью теоремы 3 можно доказать, что это пересечение не может быть большим – все общие множества двух комплексов содержатся в граничном разрезе.

Следствие 2. Пусть комплексы $\mathcal{C}_i$ и $\mathcal{C}_j$ трёхсвязного графа G таковы, что $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \neq \emptyset$. Тогда все множества из $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$ содержатся в каждом из граничных разрезов $M_{A_{i \supset j}}$ и $M_{A_{j \supset i}}$.

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$. Понятно, что оба комплекса – нетривиальные. Тогда

$$T \subset O(A_{i \supset j}) \cap V(\mathcal{C}_i) = W(M_{A_{i \supset j}}).$$

Как мы знаем по лемме 11, тогда T содержится в разрезе $M_{A_{i \supset j}}$. Для разреза $M_{A_{j \supset i}}$ аналогично. $\square$

Лемма 41. Пусть B – главная часть $\text{Part}(\mathcal{C}_j)$, отличная от $A_{j \supset i}$. Тогда $B \subset A_{i \supset j}$.

Доказательство. Для удобства пусть $i = 1, j = 2, A_{1 \supset 2} = A$. Поскольку существует хотя бы две главные части $\text{Part}(\mathcal{C}_2)$, этот комплекс не может быть тривиальным. Так как $B \neq A_{2 \supset 1}$, по следствию 1 мы имеем

$$\text{Int}(B) \cap V(\mathcal{C}_1) = \emptyset. \quad (2)$$

По лемме 5 тогда

$$R_B \text{ не может быть зависимо с множеством из } \mathcal{R}_3(G), \\ \text{содержащимся в } V(\mathcal{C}_1). \quad (3)$$

Мы разберем два случая – комплекс $\mathcal{C}_1$ может быть тривиальным или нетривиальным.

1. $\mathcal{C}_1$ – тривиальный комплекс.

Пусть $a \in V(G)$, $d_G(a) = 3$, $T = N_G(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathcal{C}_1 = \{T\}$ и $S = R_B$. Тогда $A = V(G) \setminus \{a\}$ и нам достаточно доказать, что $a \notin B$.

Предположим противное, пусть $a \in B$. Напомним, что T относится к части $A_{2 \supset 1} \neq B$. Если $a \in \text{Int}(B)$, то $T = N_G(a) \subset B$, а значит, T относится к части B , противоречие.

Следовательно, $a \in S$. В силу (3) множество S независимо с T , но тогда $S \subset \{a\} \cup T$. Очевидно, это невозможно.

2. $\mathcal{C}_1$ – нетривиальный комплекс.

В этом случае части A и B имеют окрестности, граничные разрезы и внешние границы, чем мы и будем пользоваться. Так, $R_B \subset V(\mathcal{C}_2) \subset O(A)$. Из леммы 37 и (3) следует, что R_B и T_A независимы или совпадают. Аналогично, R_B и R_A независимы или совпадают. Рассмотрим три случая.

2.1. $R_B \neq T_A$.

Тогда существует такая часть $B' \in \text{Part}(R_B)$, что $T_A \subset B'$. Так как $T_A \neq R_B$, мы имеем $T_A \cap \text{Int}(B') \neq \emptyset$. Поэтому, $B' \neq B$. Тогда по лемме 4 мы имеем $B \subset O(A)$ (см. рисунок 12а). Если $R_B \subset A$, то аналогично доказывается включение $B \subset A$, что нам и нужно.

Пусть $R_B \not\subset A$. Тогда эти множества независимы и $R_B \subset O(A)$, следовательно, $R_B \subset W(M_A)$. В нашем случае, M_A – разрез, а R_B не совпадает с его границами T_A и R_A . В силу леммы 10, тогда $|\text{Part}(R_B)| = 2$, внутренность одной части $\text{Part}(R_B)$ содержит вершину из T_A , а внутренность другой – вершину из R_A . Но одна из этих частей – B , что противоречит (2).

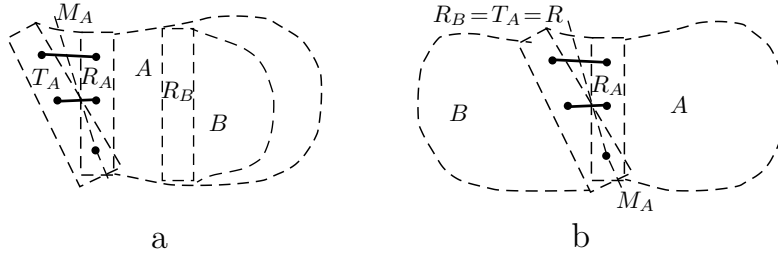


Рис. 12. Части A и B .

2.2. $R_B = T_A = R_A = R$.

Если $R \in \mathcal{C}_1$, то R относится именно к главной части $B \in \text{Part}(\mathcal{C}_2)$ (так как $R = R_B$), противоречие.

Значит, $R \notin \mathcal{C}_1$. Тогда для части A выполнено утверждение 2° леммы 36: существует единственная часть $\overline{A} \in \text{Part}(R)$, содержащая $V(\mathcal{C}_1)$, а A – объединение всех остальных частей $\text{Part}(R)$. Мы знаем, что B – объединение нескольких частей $\text{Part}(R)$. Так как $B \neq A_{2\supset 1}$, по лемме 39 мы имеем $V(\mathcal{C}_1) \not\subset B$. Значит, $B \subset A$.

2.3. $R_B = T_A = R$, но $R_A \neq R$ (см. рисунок 12b).

Тогда $M_A \neq R_A$ и по замечанию 23 мы имеем $O(A) \in \text{Part}(R)$. Напомним, что $V(\mathcal{C}_2) \subset O(A)$. Аналогично пункту 2.2, мы имеем $R \notin \mathcal{C}_1$. Тогда для части B выполнено утверждение 2° леммы 36: существует единственная часть $\overline{B} \in \text{Part}(R)$, содержащая $V(\mathcal{C}_2)$. Следовательно, $\overline{B} = O(A)$.

Кроме того, $V(\mathcal{C}_1) \subset \overline{B}$ в силу (2). Так как $M_A \neq R_A$, множество R_A – неединичное. Тогда для части A выполнено утверждение 2° леммы 36: существует единственная часть $\overline{A} \in \text{Part}(R_A)$, содержащая $V(\mathcal{C}_1)$. Таким образом, $V(\mathcal{C}_1) \subset \overline{B} \cap \overline{A} = O(A) \cap \overline{A} = W(M_A)$. По лемме 37, $W(M_A) \subset V(\mathcal{C}_1)$. Следовательно, $\mathcal{C}_1$ – комплекс разреза M_A .

Вспомним, что граничный разрез M_B получается дополнением множества $R_B = T_A$ всеми возможными рёбрами, лежащими в $\overline{B} = O(A)$, то есть, в частности, всеми рёбрами разреза M_A (границей которого является T_A). Это означает, что

$$V(\mathcal{C}_1) = W(M_A) \subset W(M_B) \subset V(\mathcal{C}_2),$$

откуда ввиду леммы 40 следует, что $|\mathcal{C}_1| = 1$. Тогда $\mathcal{C}_1 = \{R_A\}$ и $R_A = T_A = R_B$, противоречие. $\square$

Лемма 42. Пусть комплексы $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{C}_j$ и $\mathcal{C}_\ell$ таковы, что $A_{j\supset i} \supset A_{i\supset \ell}$. Тогда $A_{j\supset \ell} = A_{j\supset i}$.

Доказательство. По замечанию 23 мы имеем $O(A_{i\supset \ell}) \subset O(A_{j\supset i})$. В силу леммы 1, $\text{Int}(A_{i\supset \ell}) \subset \text{Int}(A_{j\supset i})$.

Предположим, что $\mathcal{C}_\ell = \{T\}$. Тогда $T \subset O(A_{i\supset \ell}) \subset O(A_{j\supset i})$. Так как T относится к части $A_{i\supset \ell}$, либо $T = \text{Bound}(A_{i\supset \ell})$ (тогда $T \subset A_{j\supset i}$), либо $T \cap \text{Int}(A_{i\supset \ell}) \neq \emptyset$ (тогда и $T \cap \text{Int}(A_{j\supset i}) \neq \emptyset$). В обоих случаях T относится к части $A_{j\supset i}$, значит, $A_{j\supset \ell} = A_{j\supset i}$.

Далее пусть $|\mathcal{C}_\ell| \geq 2$. Тогда $V(\mathcal{C}_\ell) \subset O(A_{j\supset i})$ и $A_{j\supset \ell} = A_{j\supset i}$ по лемме 39. $\square$

Теорема 4. 1) Гиперграф $\mathcal{T}(G)$ является гипердеревом.

2) Пусть $\mathcal{C}_i \in \mathfrak{C}$, а $H_1, \dots, H_\ell$ – компоненты связности гиперграфа $\mathcal{T}(G) - \mathcal{C}_i$. Тогда $\mathfrak{C}_i = \{H_1, \dots, H_\ell\}$.

Доказательство. Оба утверждения данной теоремы непосредственно следуют из теоремы 1, поэтому, нам достаточно проверить, что выполнено ее условие.

Предположим, что комплекс $\mathcal{C}_i$ разделяет $\mathcal{C}_j$ и $\mathcal{C}_\ell$, то есть, $A_{i \supset j} \neq A_{i \supset \ell}$. Тогда по лемме 41 мы имеем $A_{i \supset \ell} \subset A_{j \supset i}$, откуда $A_{j \supset i} = A_{j \supset \ell}$ по лемме 42. Следовательно, комплекс $\mathcal{C}_j$ не разделяет $\mathcal{C}_i$ и $\mathcal{C}_\ell$. Таким образом, условие теоремы 1 выполнено. $\square$

5.3. Комплексы и части разбиения. С помощью полученных результатов непустые части $\text{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$ для трёхсвязного графа G можно описать через части разбиения графа комплексами. Отметим, что разбиение графа каждым из комплексов подробно описано выше.

Определение 34. Пусть R – гиперребро $\mathcal{T}(G)$. Для всех $\mathcal{C}_i \in R$ пусть $A_i \in \text{Part}(\mathcal{C}_i)$ – главная часть, к которой относятся остальные комплексы гиперребра R . Назовём множество

$$A_R = \bigcap_{\mathcal{C}_i \in R} A_i$$

частью, соответствующей гиперребру R .

Через $\text{Int}(A_R)$ будем обозначать множество всех вершин A_R , не входящих в множества из $\mathfrak{R}_3(G)$.

Часть A_R называется *непустой*, если $\text{Int}(A_R) \neq \emptyset$.

Замечание 24. 1) Если $A_R \in \text{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$, то $\text{Int}(A_R)$ из определения 34 – это внутренность A_R как части $\text{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$.

2) Возможен случай, когда $A_R = \emptyset$. Отметим, что даже при $A_R \neq \emptyset$ множество A_R может не быть частью $\text{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$.

Лемма 43. Для любого гиперребра R гиперграфа $\mathcal{T}(G)$ выполнены следующие утверждения.

1) Для каждого комплекса $\mathcal{C}_\ell \notin R$ существует такая часть $A_\ell \in \text{Part}(\mathcal{C}_\ell)$, что $A_R \subset A_\ell$.

2) Если $\text{Int}(A_R) \neq \emptyset$, то $A_R \in \text{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$ – непустая часть.

Доказательство. 1) По пункту 3 леммы 8 существует комплекс $\mathcal{C}_i \in R$, который отделяет в $\mathcal{T}(G)$ комплекс $\mathcal{C}_\ell$ от всех комплексов, входящих в R . Тогда по утверждению 2 теоремы 4 мы имеем $A_{i \supset \ell} \neq A_i$. Следовательно, $A_{\ell \supset i} \supset A_i$ по лемме 41 и часть $A_\ell = A_{\ell \supset i}$ нам подходит.

2) По пункту 1 для каждого комплекса $\mathcal{C}_\ell$ существует такая часть $A_\ell \in \text{Part}(\mathcal{C}_\ell)$, что $A_R \subset A_\ell$. Следовательно, $A_R = \bigcap_{i=1}^n A_i$. В силу леммы 2, если $A_R \notin \text{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$, то $A_R \subset S$, где $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, что в нашем случае явно не так. Значит, $A_R \in \text{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$. $\square$

Теорема 5. Пусть G – трёхсвязный граф, а $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ – все его комплексы. Тогда множество вершин H – непустая часть $\text{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$, если и только если выполнено одно из двух следующих условий.

1° $H \in \text{Part}(\mathcal{C}_\ell)$, где $\ell \in \{1, \dots, n\}$ – главная часть, к которой не относится ни один другой комплекс.

2° H – непустая часть, соответствующая некоторому гиперребру $\mathcal{T}(G)$.

Доказательство. $\Leftarrow$. Пусть $H \in \text{Part}(\mathcal{C}_\ell)$ – главная часть, к которой не относится ни один другой комплекс. Тогда по лемме 41 для любого $i \neq \ell$ мы имеем $A_{i \supset \ell} \supset H$. Следовательно, ни одно множество из $\mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathcal{C}_\ell$ не разделяет H , откуда по лемме 3 имеем $H \in \text{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$. Внутренность H как части $\text{Part}(\mathcal{C}_\ell)$ по определению главных частей непуста и не пересекается с множествами других комплексов по следствию 1. Следовательно, H – непустая часть $\text{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$.

Если H – непустая часть, соответствующая гиперребру $\mathcal{T}(G)$, то утверждение следует из леммы 43.

$\Rightarrow$. По лемме 2 существует представление $H = \bigcap_{i=1}^n H_i$, где $H_i \in \text{Part}(\mathcal{C}_i)$. Отметим, что каждая часть H_i должна быть главной. Действительно, часть H_i непуста, а значит, она может быть неглавной только в случае, когда $\mathcal{C}_i$ – тривиальный комплекс. Но и этот случай невозможен по замечанию 21.

Итак, все части $H_1, \dots, H_n$ – главные. Построим по части H орграф D_H на множестве вершин $I = \{1, 2, \dots, n\}$ следующим образом: для каждой пары таких $\alpha, \beta \in I$, что $H_\alpha \neq A_{\alpha \supset \beta}$, проведем стрелку $\beta \alpha \in A(D_H)$.

Утверждение 1. Пусть $i_1 i_2 \dots i_m$ – путь в D_H . Тогда выполнены следующие утверждения.

- (1) $H_{i_m} \neq A_{i_m \supset i_1}$.
- (2) $H_{i_1} = A_{i_1 \supset i_m} \supset H_{i_m}$.

Доказательство. Докажем утверждения индукцией по m . Для каждого m сначала докажем утверждение (1), потом выведем из него утверждение (2).

База. Утверждение (1) для $m = 2$ выполнено по построению D_H .

Вывод (1) $\Rightarrow$ (2) для $m = k$.

Пусть доказано, что $H_{i_k} \neq A_{i_k \supset i_1}$. Тогда по лемме 41 мы имеем $A_{i_1 \supset i_k} \supset H_{i_k}$. Если $H_{i_1} \neq A_{i_1 \supset i_k}$ (см. рисунок 13а), то

$$H \subset H_{i_k} \cap H_{i_1} \subset A_{i_1 \supset i_k} \cap H_{i_1} \subset S \in \mathcal{C}_{i_1},$$

противоречие с $\text{Int}(H) \neq \emptyset$. Следовательно, $H_{i_1} = A_{i_1 \supset i_k} \supset H_{i_k}$ (см. рисунок 13б).

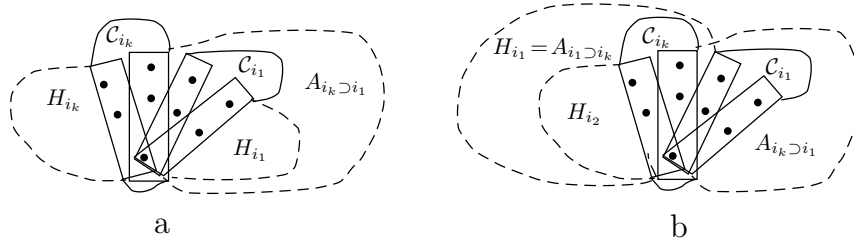


Рис. 13. Части H_{i_1} и H_{i_2} .

Переход $k \rightarrow k + 1$ в доказательстве (1).

Напомним, что $k + 1 \geq 3$ и оба утверждения доказаны для путей длины не более k . Предположим, что $H_{i_{k+1}} = A_{i_{k+1} \supset i_1}$. В силу (2) мы имеем $H_{i_2} = A_{i_2 \supset i_{k+1}} \supset H_{i_{k+1}} = A_{i_{k+1} \supset i_1}$. Следовательно, по лемме 42 выполнено $H_{i_2} = A_{i_2 \supset i_1}$, противоречие с определением D_H . $\square$

Утверждение 2. *Орграф D_H ацикличесен.*

Доказательство. Пусть $i_1 \dots i_k$ – цикл в D_H . Тогда по утверждению 1 мы имеем $H_1 = A_{i_1 \supset i_k}$, что противоречит $i_k i_1 \in A(D_H)$. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть J – множество всех индексов, из которых не выходит стрелок в D_H . По утверждению 2 мы имеем $J \neq \emptyset$. Разберем два случая.

а. $|J| = 1$.

Пусть $J = \{j\}$. Тогда для любого $i \neq j$ существует ij -путь в D_H , следовательно, по утверждению 1, $H_j \neq A_{j \supset i}$. Значит, часть H_j не содержит ни один из отличных от $\mathcal{C}_j$ комплексов. Выше доказано, что тогда $H_j \in \text{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$, значит, $H = H_j$, то есть, выполнено условие 1°.

б. $|J| \geq 2$.

В этом случае докажем, что $R_J = \{\mathcal{C}_j : j \in J\}$ – гиперребро $\mathcal{T}(G)$. По построению D_H , для любых двух $j, j' \in J$ мы имеем $H_j = A_{j \supset j'}$.

Для любого $i \notin J$ существует ij -путь в D_H , где $j \in J$. Пусть $j' \in J$, $j' \neq j$. По утверждению 1,

$$A_{j \supset i} \neq H_j = A_{j \supset j'} \quad \text{и} \quad A_{i \supset j} = H_i \supset H_j = A_{j \supset j'}.$$

Тогда по лемме 42 мы имеем $A_{i \supset j} = A_{i \supset j'}$. Таким образом, комплекс $\mathcal{C}_i$ не разделяет никакие два комплекса из R_J , а комплекс $\mathcal{C}_j$ отделяет $\mathcal{C}_i$ от всех комплексов $\mathcal{C}_{j'} \in R_J$, где $j' \neq j$. Значит, R_J – максимальное по включению множество попарно соседних комплексов, то есть, гиперребро $\mathcal{T}(G)$. Более того, $H \subset A_{R_J}$. Тогда $\text{Int}(A_{R_J}) \supset \text{Int}(H) \neq \emptyset$, следовательно, A_{R_J} – непустая часть $\text{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$. Тогда $H = A_{R_J}$, то есть, выполнено условие 2°. $\square$

Автор благодарен Н. Ю. Власовой и А. В. Пастору за помощь в работе над этой совсем непростой статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. W. T. TUTTE, *Connectivity in graphs*. Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
2. Ф. ХАРАРИ, *Теория графов*. Москва, “Мир”, 1973. (Перевод с английского. F. HARARY, *Graph theory*, 1969.)
3. Д. В. КАРПОВ, А. В. ПАСТОР, *О структуре k-связного графа*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
4. Д. В. КАРПОВ, А. В. ПАСТОР, *Структура разбиения трёхсвязного графа*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011 г), 90–148.
5. Д. В. КАРПОВ, *Блоки в k-связных графах*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
6. Д. В. КАРПОВ, *Разделяющие множества в k-связном графе*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
7. Д. В. КАРПОВ, *Дерево разбиения двусвязного графа*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 86–105.
8. Д. В. КАРПОВ, *Разбиение двусвязного графа на три связанных подграфа*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **464** (2017), 26–47.
9. D. V. KARPOV, *Large contractible subgraphs of a 3-connected graph*. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, to appear.

10. А. В. ПАСТОР, *О разбиении трехсвязного графа на циклически реберно-четырёхсвязные компоненты.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **450** (2016), 109–150.

Karpov D. V. On the structure of a 3-connected graph. 2.

In this paper, the structure of relative disposition of 3-vertex cutsets in a 3-connected graph is studied. All such cutsets are divided into structural units — *complexes* of flowers, of cuts, of single cutsets and trivial complexes. The decomposition of the graph by a complex of each type is described in detail.

It is proved that for any two complexes $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ of a 3-connected graph G there is a unique part of decomposition of G by $\mathcal{C}_1$, that contains $\mathcal{C}_2$. The relative disposition of complexes is described with the help of a *hypertree* $\mathcal{T}(G)$ — a hypergraph, any cycle of which is a subset of a certain hyperedge. It is also proved that each nonempty part of decomposition of G by the set of all its 3-vertex cutsets is either a part of decomposition of G by one of the complexes or corresponds to a hyperedge of $\mathcal{T}(G)$.

This paper can be considered as a continuation of studies begun in the joint paper by D.V. Karpov and A.V.Pastor *On the structure of a 3-connected graph* published in 2011.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург;
С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28
198504 Старый Петергоф,
С.-Петербург, Россия
E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 29 ноября 2018 г.