Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 475, 2018 г.

Н. Ю. Власова

О СТЯГИВАЕМЫХ 5-ВЕРШИННЫХ ПОДГРАФАХ ТРЁХСВЯЗНОГО ГРАФА

§1. Введение

1.1. Основные определения. В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество – через $v(G)$. Множество рёбер графа G мы будем обозначать через $E(G)$.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$, а минимальную степень вершины графа G будем обозначать через $\delta(G)$.

Окрестность вершины x в графе G (то есть, множество всех вершин, смежных с x) мы будем обозначать через $\mathrm{N}_G(x)$.

Для множества вершин $U \subset V(G)$ будем обозначать через $G(U)$ *индуцированный подграф* графа G на множестве U. Назовем множество U *связным*, если граф $G(U)$ связен.

Определение 1. 1) Пусть $R \subset V(G)$. За $G - R$ мы обозначим граф, получаемый из G удалением всех вершин R и всех ребер, инцидентных вершинам R. Множество R называется *разделяющим*, если $G - R$ несвязен.

2) Граф G называется *k-связным*, если $v(G) > k$ и G не содержит разделяющего множества размера меньше, чем k.

3) Пусть G – трехсвязный граф. Множество $R \subset V(G)$ назовем *стягиваемым*, если $G(R)$ связен и $G - R$ двусвязен.

4) Стягиваемое множество R назовем *нерасширяемым*, если оно не содержится ни в каком стягиваемом множестве размера $|R| + 1$.

5) Если F – двусвязный подграф G, то через $h_G(F)$ мы будем обозначать максимальный по включению двусвязный подграф G, содержащий F.

6) Мы будем говорить, что вершина $u \in V(G)$ *смежна* с множеством $W \subset V(G)$, если $u \notin W$ и множество W содержит вершину, смежную

Ключевые слова: связность, 3-связный граф, стягиваемый подграф.

с u. Про два непересекающихся множества $U, W \subset V(G)$ будем говорить, что они *смежны*, если существуют смежные вершины $u \in U$ и $w \in W$.

1.2. История вопроса и основные результаты. В 1994 г. была сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза (W. McCuaig, K. Ota, 1994)**.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует такое n, что любой трёхсвязный граф G с не менее чем n вершинами имеет стягиваемое множество из m вершин.*

Для $m = 1$ утверждение гипотезы очевидно, для $m = 2$ также достаточно несложно и широко известно. Случай $m = 3$ доказан авторами гипотезы [3], случай $m = 4$ доказал в 2000 году М.Криселл [1] (и это доказательство является весьма технически сложным). Ни для какого $m > 5$ на настоящий момент гипотеза ни доказана, ни опровергнута.

В работе Карпова [10] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $m \geqslant 4$ – натуральное число, а G – трёхсвязный граф с $v(G) \geqslant 2m + 1$. Тогда G имеет стягиваемое множество W с $m \leqslant |W| \leqslant 2m - 3$.*

Тем самым, доказано, что любой трехсвязный граф на хотя бы 11 вершинах содержит стягиваемое подмножество на 5 или 6 вершинах.

В работе [2] М. Криселл исследовал стягиваемые пятерки в графах с маленькой средней степенью вершин и доказал следующую теорему.

Теорема 2. *Любой трёхсвязный граф на хотя бы* 13 *вершинах и средней степенью меньше, чем* $3+1/132$, *содержит стягиваемое множество на пяти вершинах.*

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть G – трехсвязный граф с $v(G) \geqslant 11$ и $\delta(G) \geqslant 4$. Тогда в G найдется стягиваемое множество на* 5 *вершинах.*

1.3. Вспомогательные инструменты. Нам потребуется структура разбиения двусвязного графа 2-вершинными разделяющими множествами. Для наших целей удобнее будет определить не структуру из книги Татта [4], а в целом аналогичную структуру – *дерево блоков* из работы [8]. Начнём с понятия *разбиения графа набором разделяющих множеств*, определенного в [6].

1.3.1. *Разбиение графа набором разделяющих множеств.* Отметим, что мы используем не совсем классическое определение *компоненты связности* – для удобства в нашей работе это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

В этом разделе $k \geqslant 2$, а G – k-связный граф. Обозначим через $\mathfrak{R}_k(G)$ множество из всех k-вершинных разделяющих множеств G.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью разбиения* графа G набором $\mathfrak{S}$, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Множество всех частей разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ мы будем обозначать через $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$.

2) Вершины части $A \in \mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$ назовем *внутренними*, если они не входят ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Множество таких вершин назовем *внутренностью* части A и будем обозначать через $\mathrm{Int}(A)$.

Вершины части A, входящие в какие-либо множества набора $\mathfrak{S}$, мы будем называть *граничными*, а все их множество – *границей* и обозначать через $\mathrm{Bound}(A)$.

Нетрудно понять, что если две части $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$ имеют непустое пересечение, то их пересечение – подмножество одного из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Замечание 1. Нетрудно доказать (см., например, [7]), что для $A \in \mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$ граница $\mathrm{Bound}(A)$ сотоит из всех вершин части A, имеющих смежные вне A. Если $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, то $\mathrm{Bound}(A)$ отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от остальных вершин графа.

Рассмотрим простейший и самый нужный нам пример – разбиение двусвязного графа G одним множеством $S \in \mathfrak{R}_2(G)$. Пусть $\mathrm{Part}(G; S) = \{A_1, \dots, A_k\}$. Тогда $\mathrm{Int}(A_1)$, ..., $\mathrm{Int}(A_k)$ – все компоненты связности графа $G - S$, а каждая вершина $x \in S$ смежна со всеми этими компонентами (если x не смежна с $\mathrm{Int}(A_i)$, то эта компонента выделяется и одновершинным множеством $S \setminus \{x\}$, что противоречит двусвязности графа G).

Определение 3. Два множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ называются *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

В работе [5] доказано, что для k-связного графа G и множеств $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ возможны два варианта: либо S и T независимы, либо каждое из них разделяет другое. Доказательство этого факта – очень простое.

1.3.2. *Разбиение двусвязного графа и его свойства.* В этом разделе граф G – двусвязный.

Определение 4. 1) Множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ называется *одиночным*, если S независимо со всеми остальными множествами из $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{O}(G)$ набор из всех одиночных множеств графа G.

2) Вместо $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{O}(G))$ мы будем писать просто $\mathrm{Part}(G)$, а части этого разбиения будем называть *частями* графа G.

Определение 5. *Дерево разбиения* двусвязного графа G – это граф $\mathrm{BT}(G)$, вершины которого соответствуют одиночным множествам и частям графа G. Вершины $S \in \mathfrak{O}(G)$ и $A \in \mathrm{Part}(G)$ смежны в $\mathrm{BT}(G)$, если и только если $S \subset A$. Других рёбер в $\mathrm{BT}(G)$ нет.

Следующая лемма – это частный случай теоремы 1 из статьи [8].

Лемма 1. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathrm{BT}(G)$ *– это дерево, все висячие вершины дерева* $\mathrm{BT}(G)$ *соответствуют частям* $\mathrm{Part}(G)$.

2) *Для каждого множества $S \in \mathfrak{O}(G)$ выполняется $d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = |\mathrm{Part}(G; S)|$. Более того, для каждой части $A \in \mathrm{Part}(G; S)$ существует ровно одна такая часть $B \in \mathrm{Part}(G)$, что $B \subset A$ и B смежна с S в* $\mathrm{BT}(G)$.

3) *Множество $S \in \mathfrak{O}(G)$ разделяет в графе G части $B, B' \in \mathrm{Part}(G)$, если и только если S разделяет B и B' в* $\mathrm{BT}(G)$.

Определение 6. Часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ назовем *крайней*, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения $\mathrm{BT}(G)$.

Замечание 2. 1) Если $A \in \mathrm{Part}(G)$ – крайняя часть, то $\mathrm{Bound}(A)$ – одиночное множество графа G.

2) Внутренности двух различных частей $\mathrm{Part}(G)$ не пересекаются.

Определение 7. 1) Обозначим через G' граф, полученный из двусвязного графа G добавлением всех отсутствующих в G рёбер множества $\{xy : \{x, y\} \in \mathfrak{O}(G)\}$.

2) Назовём часть A *циклом*, если граф $G'(A)$ – простой цикл и *3-блоком*, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A – цикл, то мы будем называть $|A|$ *длиной* цикла A.

Лемма 2. [9, Лемма 2] *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) *Каждая часть из* $\mathrm{Part}(G)$ *– либо цикл, либо 3-блок.*

2) *Если часть* $A \in \mathrm{Part}(G)$ *– цикл, то все вершины из* $\mathrm{Int}(A)$ *имеют степень 2 в графе G. При $\delta(G) \geqslant 3$ все крайние части* $\mathrm{Part}(G)$ *– 3-блоки.*

3) *Пусть* $A \in \mathrm{Part}(G)$ *– цикл длины хотя бы 4. Тогда любая пара его несоседних вершин образует неодиночное разделяющее множество графа G и других неодиночных разделяющих множеств в графе G нет.*

1.3.3. *Стягиваемые множества в трехсвязном графе.* В этом разделе граф G – трехсвязный. Мы процитируем ряд доказанных ранее результатов, которые нам понадобятся, после чего докажем одну новую лемму.

Лемма 3. [10, Лемма 4] *Пусть G – трехсвязный граф, и $H \subset V(G)$ – нерасширяемое стягиваемое множество, такое что граф $G - H$ не является простым циклом. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) *Множество H смежно со всеми внутренними вершинами частей-циклов $G - H$.*

2) *Есть хотя бы две крайние части* $\mathrm{Part}(G - H)$*, все эти крайние части – циклы длины хотя бы 4. Граница каждой крайней части – одиночное разделяющее множество $G - H$.*

3) *Пусть* $A \in \mathrm{Part}(G - H)$ *– крайняя часть. Тогда граф* $G - H - \mathrm{Int}(A)$ *– двухсвязный.*

Замечание 3. Из замечания 1 следует, что если A_1 и A_2 – две части $\mathrm{Part}(G - H)$, то их внутренности несмежны друг с другом.

Очевидным следствием из предыдущих лемм является следующая лемма, доказанная в [1].

Лемма 4. *Пусть G – трехсвязный граф, и $H \subset V(G)$ – нерасширяемое стягиваемое множество и граф $G - H$ не является простым циклом. Пусть* $A_1, A_2 \in \mathrm{Part}(G - H)$ *– две крайние части $G - H$,* $W_i = \mathrm{Int}(A_i)$*. Тогда выполнены следующие условия:*

1) $G(W_1)$ *и* $G(W_2)$ *– простые пути.*

2) $|W_1| \geqslant 2$, $|W_2| \geqslant 2$.

3) $N_G(W_1) \cap W_2 = \varnothing$, $N_G(W_2) \cap W_1 = \varnothing$.

Лемма 5. [1, Лемма 5] *В обозначениях леммы* 4 *пусть*

$$H_1 = V(h_{G-W_2}(G-H-W_2)) \cap H, \quad H_2 = V(h_{G-W_1}(G-H-W_1)) \cap H,$$

$$H_1^\star = H_1 \setminus H_2, \quad H_2^\star = H_2 \setminus H_1.$$

Тогда

1) $N_G(G-H-W_2) \cap H \subset H_1$ *и* $N_G(G-H-W_1) \cap H \subset H_2$.

2) $H = H_1 \cup H_2$. *Каждая компонента связности* $G(H_1^\star)$ *и* $G(H_2^\star)$ *имеет ровно одного соседа в* H_2 *и* H_1, *соответственно.*

3) *Предположим, что* W *– подпуть* $G(W_1)$ *такой, что* $N_G(H_1^\star) \cap W_1 \subset V(W)$. *Тогда множество* $H_1^\star \cup V(W)$ *стягиваемо.*

4) *Если* $|H_1^\star| = 0$, *то множество вершин любого подпути* $G(W_1)$ *стягиваемо.*

5) *Предположим, что* G *не содержит стягиваемого подграфа на* $|H|+1$ *вершине. Если* $|H_1^\star| = 1$, *то выполнено одно из двух условий:*
(1) $|W_1| \leqslant |H| - 1$.
(2) $|W_1| = |H| + 1$, *обе конечные вершины* $G(W_1)$ *смежны с* $H_1^\star$ *и множество вершин любого подпути* $G(W_1)$ *стягиваемо.*

Лемма 6. *В обозначениях леммы* 4 *пусть* $\{p, q\} = \mathrm{Bound}(A_i)$, $x \in H$.

Предположим, что в множестве $W_i \cup H$ *нашлась стягиваемая четверка* H', *и граф* $G - H'$ *не является циклом. Для графа* $G - H'$ *также выполнено условие леммы 3. Пусть* A *– крайняя часть графа* $G - H'$, $W = \mathrm{Int}(A)$. *Тогда*

1) *вершины* p *и* x *не могут быть соседними в* $G(W)$.

2) *Если* $N_G(H') \subset \{p, q\} \cup H$, *то* $\{p, q\}$ *– внутренность одной из крайних частей графа* $G - H'$. *В частности,* $pq \in E(G)$.

Доказательство. 1) Множество $\{p, q\}$ – одиночное в $G - H$, поэтому $d_{G-H}(p) \geqslant 3$. Максимум один сосед p может лежать в $H' \cap V(G-H)$ – это сосед p в W_i. Значит, если $x \notin H'$ и $px \in E(G)$, то $d_{G-H'}(p) \geqslant 3$, что невозможно, если p – внутренняя вершина части-цикла из $\mathrm{Part}(G - H')$.

2) По пункту 1) внутренность любой части $G - H'$ не может содержать одновременно вершину множества $\{p, q\}$ и вершину множества H. Значит, если $\{p, q\}$ не является внутренностью одной из частей, то внутренности всех крайних частей $G - H'$ лежат в H. Но внутренности разных частей несмежны друг с другом, поэтому, $G(H)$ несвязен. Противоречие. $\square$

§2. Граф $G - H$ – простой цикл

Пусть в трехсвязном графе G хотя бы 11 вершин и можно выбрать стягиваемое подмножество H на 4 вершинах так, что $G - H$ – простой цикл. Докажем тогда, что в G найдется стягиваемое подмножество на 5 вершинах.

Замечание 4. В этом случае условие $\delta(G) \geqslant 4$ не потребуется.

Предположим, что в G нет стягиваемого подмножества на 5 вершинах. Обозначим через C граф $G - H$. Разберем два случая.

2.1. В $G(H)$ можно выбрать путь $xzty$ длины 3. Выберем в C путь длины 5. Пусть W – множество вершин этого пути. Множество W нестягиваемо, тогда либо $N_G(x) \cap V(C) \subset W$, либо $N_G(y) \cap V(C) \subset W$. Не умаляя общности будем считать, что реализован первый вариант. Очевидно, что W можно выбрать таким образом, чтобы вершина x была смежна хотя бы с одним из концов пути $G(W)$. Обозначим вершины цикла последовательно $u_1, \dots, u_k$, где $W = \{u_1, \dots, u_5\}$ и вершина x смежна с u_1. Множество $W' = \{u_2, u_3, \dots, u_6\}$ также нестягиваемо, поэтому $N_G(y) \subset W'$.

Так как $v(G) \geqslant 11$, цикл C содержит хотя бы 7 вершин. Рассмотрим множество $W'' = \{u_3, u_4, \dots, u_7\}$, оно опять же нестягиваемо, значит $N_G(y) \cap V(C) \subset W' \cap W''$.

Так как пятерка $\{u_3, u_4, u_5, u_6, y\}$ нестягиваема, при ее удалении остается недвусвязный граф. Это возможно, только когда $N_G(t) \cap V(C) \subset W' \cap W''$. Следовательно, с вершинами $u_7, \dots, u_k$ может быть смежна только z.

Если ни t, ни y не смежны с u_6, то пятерка $\{u_3, u_4, u_5, y, t\}$ стягиваема (см. рис. 1(a)), u_2 смежна с x или z, так как несмежна ни с y, ни с t).

Если y смежна с u_6, то либо x смежна с u_5, и пятерка $\{u_k,u_1,u_2,u_3,u_4\}$ стягиваема (см. рис. 1(b)), либо x несмежна с u_5 и тогда пятерка $\{x, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ стягиваема.

Если, наконец, y несмежна с u_6, а t смежна, то можно стянуть пятерку $\{u_2, u_3, u_4, u_5, y\}$ (см. рис. 1(c)).

2.2. В $G(H)$ нет пути длины 3. Следовательно, вершины H можно обозначить так, что x, y, z смежны в $G(H)$ с t и только с ней. Очевидно тогда, что каждая вершина x, y, z имеет хотя бы двух соседей в C.

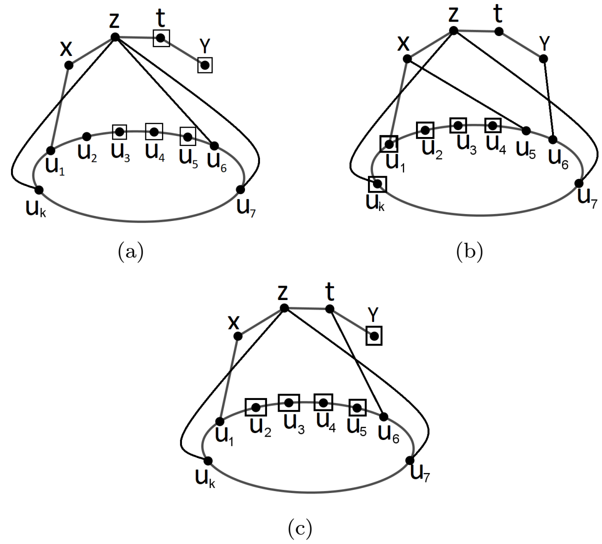


Рис. 1. Стягиваемые пятерки в разделе 2.1.

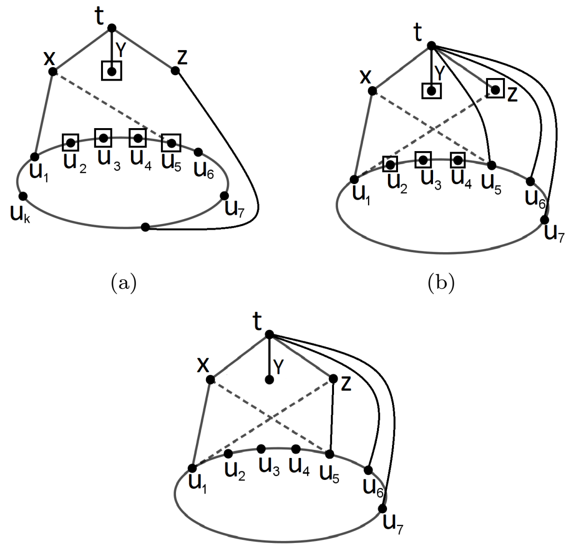
Пронумеруем вершины цикла и выберем путь $W = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, как в предыдущем пункте (то есть так, чтобы $\mathrm{N}_G(x) \cap V(C) \subset W$ и x смежна с u_1).

2.2.1. *Вершины x и u_5 несмежны.* Попробуем тогда удалить подграф $G(\{x, u_1, u_2, u_3, u_4\})$. Оставшийся граф может быть недвусвязным только в том случае, когда хотя бы у одной из вершин y, z все соседи в C лежат в множестве $W' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Не умаляя общности будем считать, что у y. Если z смежна хотя бы с одной вершиной в $C - W$, то пятерка $\{y, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ стягиваема (см. рис. 2(a), при $i \geqslant 6$ вершина u_i смежна с z или t).

Значит, с $C - W$ смежна только t. При $k \geqslant 9$ пятерка

$$W'' = \{u_1, u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, u_{k-3}\}$$

будет стягиваема, так как u_2 и u_{k-4} смежны с H и каждая из вершин x, y, z имеет хотя бы по одному соседу в $C - W''$.



(a) (b)

(c)

Рис. 2. Стягиваемые пятерки в разделе 2.2.1.

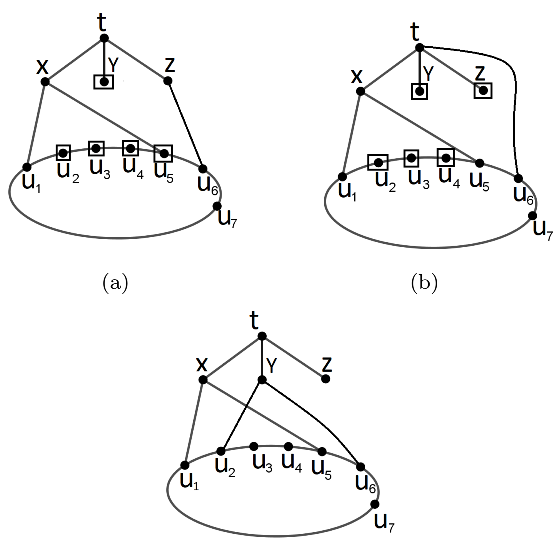
При $k = 8$ пятерка W'' нестягиваема только в том случае, когда z смежна в C с u_1, u_5 и только с ними, так как x и y имеют хотя бы по одному соседу в множестве $\{u_2, u_3, u_4\}$. Но тогда пятерка $\{x, y, u_2, u_3, u_4\}$ стягиваема, так как t смежна с u_6.

Осталось рассмотреть случай $k = 7$. Вершина t обязательно смежна с u_7, u_6. Также z не может быть смежна с u_1, иначе пятерка $\{y, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ будет стягиваема. Получаем, что z смежна хотя бы с одной из вершин u_2, u_3, u_4. Если при этом t смежна с u_5, то пятерка $\{y, z, u_2, u_3, u_4\}$ стягиваема (см. рис. 2(b)), поэтому с u_5 смежна только z (см. рис. 2(c)). Далее заметим, что y не может быть смежна с u_1, иначе пятерка $\{u_2, u_3, u_4, u_5, z\}$ стягиваема, и y несмежна с u_2, иначе пятерка $\{u_3, u_4, u_5, u_6, z\}$ стягиваема. Наконец, y несмежна с u_3, так как иначе стягиваема пятерка $\{z, u_4, u_5, u_6, u_7\}$. Но тогда y смежна в C только с u_4 и имеет степень 2 в G – противоречие.

2.2.2. *Вершина x смежна с u_1 и u_5.* Множество $\{u_2, u_3, \ldots, u_6\}$ нестягиваемо, поэтому, не умаляя, общности у y все соседи в C лежат в этом множестве. Если z смежна с u_6, то пятерка $\{y, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ стягиваема, так как y имеет хотя бы два соседа в C (см. рис. 3(a)).

Если t смежна с u_6, то пятерка $\{y, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ не стягиваема только в том случае, если все соседи z из C лежат в множестве $\{u_2,u_3,u_4,u_5\}$, но тогда, как легко видеть, пятерка $\{y, z, u_2, u_3, u_4\}$ стягиваема (см. рис. 3(b)).

Значит y смежна с u_6. Повторяя рассуждения раздела 2.2.1 для вершины y и пятерки $\{u_6, u_5, u_4, u_3, u_2\}$, получаем, что y также смежна и с u_2 (см. рис. 3(c)). Если z смежна с хотя бы одной вершиной из u_2, u_3, u_4, u_5, то пятерка $\{z, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ стягиваема. Также выше доказано, что z несмежна с u_6 и по симметричным причинам с u_1. Откуда немедленно следует, что $k \geqslant 8$ и пятерка $\{u_4, u_3, u_2, u_1, u_k\}$ стягиваема, так так все вершины x, y, z имеют соседей в C вне этой пятерки.



(a) (b)

(c)

Рис. 3. Стягиваемые пятерки в разделе 2.2.2.

§3. Для любой стягиваемой четверки H граф $G - H$ не является циклом

По лемме 3 в графе $G - H$ есть хотя бы две крайние части. Обозначим эти части A_1 и A_2.

Пусть везде далее $W_i = \mathrm{Int}(A_i)$, $G(W_1) = u_1 \dots u_k$, $G(W_2) = w_1 \dots w_\ell$, вершина u_1 смежна в $G - H - W_1 - W_2$ с p, u_k – с q, w_1 – с r, w_ℓ – с s. Разберем несколько случаев.

3.1. $|H_i^\star| = 1$**.** Предположим, что $H_1^\star = \{x\}$. Тогда $H_2 = H - \{x\} = \{y, z, t\}$.

По пункту 5) леммы 5 $|W_1| \leqslant 3$ или $|W_1| = 5$.

3.1.1. $|W_1| = 2$. По пункту 2) леммы 5 вершина x имеет ровно одного соседа в H_2 (не умаляя общности, y), а в $G - H$ она смежна только с вершинами W_1. Следовательно, $d_G(x) = 3$. Противоречие.

3.1.2. $|W_1| = 3$. Четверка $W_1 \cup \{x\}$ стягиваема по пункту 3) леммы 5 и нерасширяема, поэтому в ее окрестности должны быть два пути, удовлетворяющие условию леммы 4 (см. рис. 4).

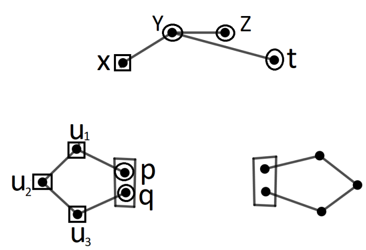


Рис. 4. Четверка $W_1 \cup \{x\}$ и ее окрестность.

По лемме 6 ребро pq является одним из путей. Следовательно, вершины p и q имеют степень 2 в $G - W_1 - x$. Но тогда $d_G(p) = d_G(q) = 3$, так как x несмежна с p и q. Противоречие.

3.1.3. $|W_1| = 5$. Если u_5 смежна с H_2, то пятерка $W_1 \setminus \{u_5\} \cup \{x\}$ стягиваема. Но иначе $d_G(u_5) \leqslant 3$. Противоречие.

3.2. $|H_i^\star| = 3$. Предположим, что $|H_1^\star| = 3$. Тогда с вершинами W_2 может быть смежна только одна вершина H (та, которая не входит в $H_1^\star$). Следовательно, степени всех вершин W_2 не превосходят 3. Противоречие.

3.3. $|H_i^\star| = 2$. Предположим, что $|H_1^\star| = 2$.

Обозначим вершины H так, что $x, y \in H_1^\star$, $z, t \in H_2$.

По пункту 5) леммы 5 каждая из вершин x, y может быть смежна только с одной из вершин z, t. Причем, если x и y смежны, то они могут быть смежны только с одной и той же вершиной из $\{z, t\}$. В любом случае, чтобы граф $G(H)$ был связен, необходимо, чтобы z и t были смежны.

Так как $d_G(x) \geqslant 4$, $d_G(y) \geqslant 4$, а в H вершины x и y имеют максимум двух соседей, каждая из вершин x, y смежна хотя бы с двумя вершинами множества W_1.

Каждая из вершин W_2 имеет хотя бы двух соседей в H, причем W_2 несмежно с $H_1^\star$. Следовательно, каждая из вершин z и t смежна со всеми вершинами W_2.

Множество $\{x, y\}$ смежно с множеством $\{z, t\}$. Не умаляя общности, y смежна с z.

Если $|W_2| = 2$, то стягиваема пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$.

Если $|W_2| = 3$, то стягиваема пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$.

Если $|W_2| \geqslant 4$, то либо x смежна с множеством $\{y, z\}$, и стягиваема пятерка $\{x, y, z, w_2, w_3\}$ (см. рис. 5(a)), либо x смежна с t, и стягиваема $\{y, z, w_2, w_3, w_4\}$ (см. рис. 5(b)).

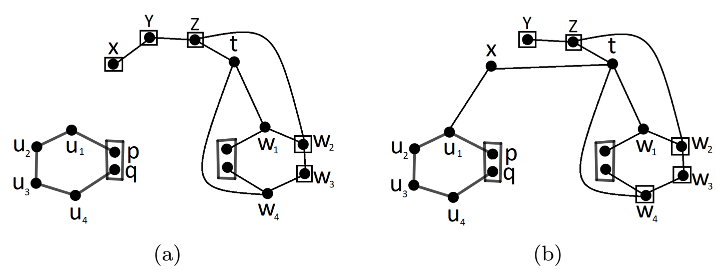


Рис. 5. Стягиваемые пятерки при $|W_2| \geqslant 4$.

Далее будем рассматривать случаи, когда $H_1^\star = H_2^\star = \varnothing$. Тогда по лемме 5 любые подпути в $G(W_1)$ и $G(W_2)$ стягиваемы, а значит, $|W_1|, |W_2| \in \{2,3,4\}$.

3.4. $|W_1| = 4$. Четверка W_1 стягиваема, поэтому в $G - W_1$ есть два пути, удовлетворяющие условиям леммы 4.

По лемме 6 ребро pq является одним из путей. Следовательно, степени p и q в графе $G - W_1$ равны 2. Но тогда $d_G(p) = d_G(q) = 3$. Противоречие.

3.5. $|W_1| = 3$.

Утверждение 1. *Если* $|W_1| = 3$*, то в* $G(H)$ *есть два независимых ребра.*

Доказательство. Пусть это не так, тогда можно обозначить вершины H так, что вершина x смежна с вершинами y, z, t и никаких других ребер в H нет. Так как $H = H_1 = H_2$, каждая из вершин y, z, t смежна хотя бы с одной вершиной и в $G - H - W_1$, и в $G - H - W_2$.

Не умаляя общности, множество $\{x, y\}$ смежно с W_1. Пятерка $W_1 \cup \{x, y\}$ нестягиваема только тогда, когда одна из вершин z, t имеет не более одного соседа в $G - H - W_1$ (см. рис. 6), пусть это будет z. Значит, z смежна хотя бы с двумя вершинами W_1. Пятерка $W_1 \cup \{x, z\}$ нестягиваема, только если одна из вершин y, t имеет не более одного соседа в $G - H - W_1$, пусть это будет y. Значит, y смежна хотя бы с двумя вершинами W_1.

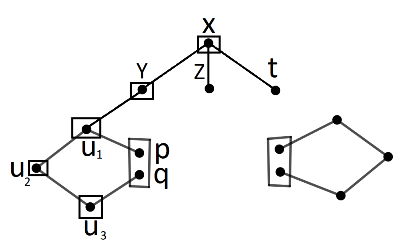


Рис. 6. Пятерка $W_1 \cup \{x, y\}$.

Каждая вершина W_2 смежна хотя бы с двумя вершинами H, а из множества $\{y, z\}$ ведет не более двух ребер в W_2. Следовательно, W_2

смежно с $\{x, t\}$. Множества $W_2 \cup \{x, t\}$ и $W_2 \cup \{z, x, t\}$ стягиваемы, так как y и z смежны хотя бы с двумя вершинами W_1. Одно из этих множеств содержит 5 вершин. Противоречие. □

`Далее считаем, что в` H `есть два независимых ребра. Пусть это ребра` xy `и` zt.

Каждая вершина W_1 смежна хотя бы с двумя вершинами H, следовательно, в H найдется вершина, смежная хотя бы с двумя вершинами W_1. Пусть эта вершина – y.

3.5.1. $|W_2| = 3$. Пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$ нестягиваема, только если x несмежна с $G - H - W_2$ или множество $\{z, t\}$ несмежно с W_2.

Предположим, что множество $\{z, t\}$ несмежно с W_2. Тогда каждая вершина W_2 смежна с x и y. Пятерка $W_2 \cup \{x, y\}$ нестягиваема, только если граф $G - W_2 - \{x, y\}$ не двусвязен. Вершины z и t смежны и имеют хотя бы по одному соседу в $G - H - W_2$. Следовательно, в $G - H - W_2$ вершины z и t смежны с одной и той же вершиной f. Кроме того, каждая из вершин z, t должна иметь степень хотя бы 4 в G, поэтому смежна с x и y. Но тогда пятерка $W_2 \cup \{x, z\}$ стягиваема (см. рис. 7), так как y и t смежны, y имеет хотя бы двух соседей в W_1, а t имеет хотя бы одного соседа в $G - H - W_2$.

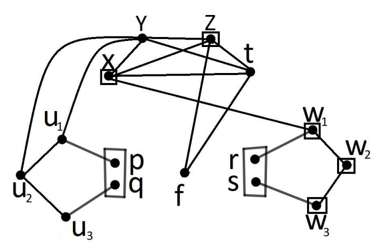


Рис. 7. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{x, z\}$.

Значит, x несмежна с $G - H - W_2$. Но $d_G(x) \geqslant 4$, поэтому x смежна с W_2.

Вспомним, что каждая вершина W_1 смежна хотя бы с двумя вершинами H. То есть каждая вершина W_1 смежна с z или t, а следовательно, одна из вершин z, t (например, z), смежна хотя бы с двумя вершинами W_1.

Если t смежна с $G-H-W_2$, то пятерка $W_2 \cup \{x,y\}$ стягиваема (см. рис. 8). Если t смежна с W_2, то пятерка $W_2 \cup \{x,t\}$ стягиваема (см. рис. 9). А иначе, t несмежна с $G-H$ и имеет степень не более 3 в G. Противоречие.

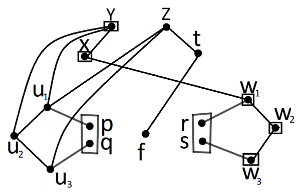


Рис. 8. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{x,y\}$.

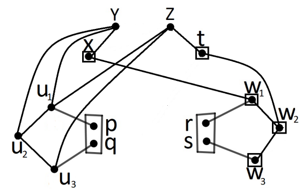


Рис. 9. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{x,t\}$.

3.5.2. $|W_2| = 2$. Пятерка $W_2 \cup \{x,z,t\}$ нестягиваема, только если она несвязна. При этом z и t смежны, и W_2 смежно хотя бы с одной вершиной множества $\{x,z,t\}$. То есть x несмежна с z и t, и либо x несмежна с W_2, либо множество $\{z,t\}$ несмежно с W_2.

Предположим, что x несмежна с W_2, z и t. Тогда x смежна хотя бы с тремя вершинами $G-H-W_2$. В силу связности $G(H)$ вершина y смежна с множеством $\{z,t\}$. Легко видеть, что пятерка $W_2 \cup \{y,z,t\}$ стягиваема (см. рис. 10).

Значит, множество $\{z,t\}$ несмежно с x и W_2. Тогда каждая вершина W_2 смежна с x и y, каждая вершина множества $\{z,t\}$ смежна хотя бы с двумя вершинами $G-H-W_2$, а y смежна хотя бы с одной вершиной множества $\{z,t\}$, пусть y смежна с z. Легко видеть, что пятерка $W_2 \cup \{y,z,x\}$ стягиваема (см. рис. 11).

3.6. $|W_1| = |W_2| = 2$.

Утверждение 2. *Если какая-то вершина H смежна с обеими вершинами одного из путей W_1 и W_2 или с вершиной какого-либо пути и вершиной $G-H-W_1-W_2$, то в графе G найдется стягиваемая пятерка.*

Доказательство. Пусть, например, x смежна с u_1 и еще одной вершиной $G-H-W_2$.

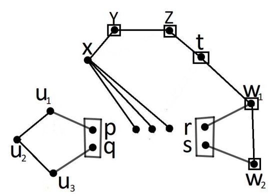


Рис. 10. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$.

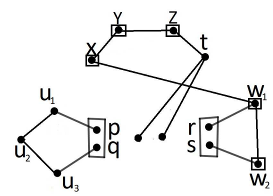


Рис. 11. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{y, z, x\}$.

Если граф $G(W_2 \cup \{y, z, t\})$ – связный, то пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$ стягиваема. Далее будем считать, что граф $G(W_2 \cup \{y, z, t\})$ несвязен. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. *Две вершины множества $\{y, z, t\}$ в объединении с W_2 образуют связный подграф.*

Не умаляя общности, $\{z, t\}$. Тогда y может быть смежна в H только с x и должна иметь хотя бы трех соседей в $G - H - W_2$. Так как $G(H)$ связен, вершина x смежна с z или t. Следовательно, пятерка $W_2 \cup \{x, z, t\}$ стягиваема (см. рис. 12).

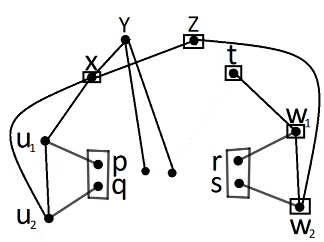


Рис. 12. Стягиваемая пятерка $W_2 \cup \{x, z, t\}$.

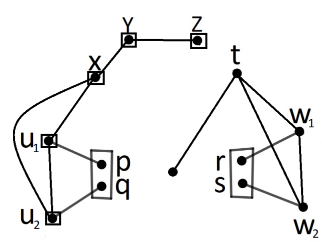


Рис. 13. Стягиваемая пятерка $W_1 \cup \{x, y, z\}$.

Случай 2. *Только одна вершина множества $\{y, z, t\}$ образует связный подграф с W_2.*

Не умаляя общности t. Тогда t может быть смежна в H только с x. Множество W_2 несмежно с $\{y, z\}$, но $d_G(w_1) \geqslant 4$, $d_G(w_2) \geqslant 4$, следовательно, вершины w_1 и w_2 смежны с x и t. Пятерка $W_1 \cup \{x, y, z\}$ связна, так как $G(H)$ связен, а t в нем – висячая вершина. Следовательно, пятерка $W_1 \cup \{x, y, z\}$ стягиваема (см. рис. 13).

Случай 3. *Ни одна из вершин* $\{y, z, t\}$ *не смежна с* W_2.

Тогда с W_2 смежна только x. Значит, обе вершины W_2 имеют степень 3 в G, противоречие.

□

В оставшемся случае ни одна вершина H не смежна с двумя вершинами одного из путей или с вершиной W_i и вершиной $G - H - W_1 - W_2$.

Заметим, что каждая вершина W_1 должна быть смежна хотя бы с двумя вершинами H. А каждая вершина H смежна не более чем с одной вершиной W_1. Поэтому с u_1 смежны ровно две вершины H, а с u_2 – две другие вершины H. И аналогично с W_2.

Каждая вершина H смежна с вершинами путей, поэтому H не смежно с $G - H - W_1 - W_2$. Кроме того, так как каждая вершина H смежна ровно с двумя вершинами из $G - H$, и $\delta(G) \geqslant 4$, то $\delta(G(H)) \geqslant 2$. То есть, в $G(H)$ есть цикл длины 4, пусть это цикл $xyzt$.

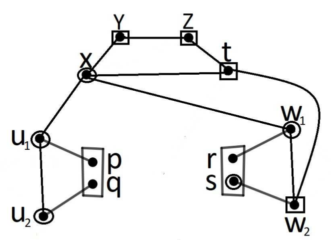


Рис. 14. Стягиваемая четверка $\{y, z, t, w_2\}$.

Можно считать, что вершина x смежна с u_1 и w_1. Четверка $H' = \{y, z, t, w_2\}$ стягиваема и нерасширяема (см. рис. 14). Ее окрестность содержится в множестве $\{x, u_1, u_2, w_1, s\}$. Вершина u_1 не может входить в путь, удовлетворяющий лемме 4 для четверки H', так как имеет степень 3 в $G - H'$. Поскольку вершины из разных путей не могут быть смежны, а $xw_1 \in E(G)$, путями должны быть xw_1 и u_2s. То есть $s = q$ и по лемме 4 граф $G - H' - \{u_2, s\} = G - \{y, z, t, w_2, u_2, s\}$ двусвязен.

Предположим, что одна из вершин y, t смежна с u_1 или w_1. Пусть y. Тогда граф $G - \{z, t, w_2, u_2, s\}$ двусвязен. Кроме того, граф $G(\{z, t, w_2, u_2, s\})$ связен, так как w_2 смежна с двумя вершинами H и ни одна из них не x, а u_2 смежна с s. Следовательно, пятерка $\{z, t, w_2, u_2, s\}$ стягиваема.

Значит, вершины y и t смежны с u_2 и w_2. Проделывая рассуждения, аналогичные описанным выше, для четверки $H'' = \{x, z, t, w_1\}$ получаем, что либо в G есть стягиваемая пятерка, либо $p = r$.

Но случай $\{p, q\} = \{r, s\}$ невозможен, так как тогда либо $V(G) = \{x, y, z, t, u_1, u_2, w_1, w_2, p, q\}$, то есть $v(G) < 11$, либо

$$|\mathrm{Part}(G - H; \{p, q\})| \geqslant 3.$$

Но тогда по лемме 1 найдется еще одна крайняя часть в $\mathrm{Part}(G-H)$. Напомним, что все ребра из H в рассматриваемом случае выходят к W_1 и W_2. Следовательно, третья крайняя часть несмежна с H, что противоречит трехсвязности графа G.

Таким образом, мы доказали, что если в трехсвязном графе G хотя бы 11 вершин и степень любой вершины хотя бы 4, то в G есть стягиваемая пятерка.

Список литературы

1. M. Kriesell, *Contractible subgraphs in* 3*-connected graphs.* — J. Comb. Theory Ser. B, **80** (2000), 32–48.
2. M. Kriesell, *On small contractible subgraphs in* 3*-connected graphs of small avarage degree.* — Mathematisches Seminar der Universitat Hamburg, Bundesstrabe 55, D-20146 Hamburg.
3. W. McCuaig, K. Ota, *Contractible triples in* 3*-connected graphs.* — J. Comb. Theory Ser. B, **60** (1994), 308–314.
4. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
5. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
6. Д. В. Карпов, *Блоки в k-связных графах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
7. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
8. Д. В. Карпов, *Дерево разбиения двусвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 86–105.
9. Д. В. Карпов, *Минимальные двусвязные графы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 106–127.

10. D. V. Karpov, *Large contractible subgraphs of a 3-connected graph.* Discussiones Mathematicae Graph Theory, to appear, doi:10.7151/dmgt.2172.

Vlasova N. Yu. On contractible 5-vertex subgraphs of a 3-connected graph.

A subset H of the set of vertices of a 3-connected finite graph G is called *contractible* if $G(H)$ is connected and $G-H$ is 2-connected. We prove that every 3-connected graph on at least 11 vertices with minimal degree at least 4 has a contractible set on 5 vertices.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: evropa2100@mail.ru

Поступило 12 ноября 2018 г.