Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 475, 2018 г.

В. А. Буслов

СТРУКТУРА ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЛЕСОВ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА: РОДСТВЕННЫЕ ЛЕСА И НЕРАВЕНСТВА ВЫПУКЛОСТИ

§1. Определения и обозначения

Пусть G – граф (неориентированный). Множества его вершин и его ребер (двухэлементных подмножеств множества вершин) будем обозначать, соответственно, $\mathcal{V}G$ и $\mathcal{E}G$. Множество вершин орграфа (ориентированного графа) G по-прежнему обозначаем через $\mathcal{V}G$, а множество его дуг (упорядоченных пар вершин) через $\mathcal{A}G$. *Полустепень исхода* d_i^{out} *(захода* d_i^{in}*)* вершины i – число дуг исходящих из i (заходящих в i).

H – *подграф* графа G, если $\mathcal{V}H \subseteq \mathcal{V}G$ и $\mathcal{E}H \subseteq \mathcal{E}G$, причем все концевые вершины рёбер графа H принадлежат множеству $\mathcal{V}H$. Для подграфа H графа G используем обозначение $H \subseteq G$. H – *остовный подграф* графа G, если $\mathcal{V}H = \mathcal{V}G$. H называется *индуцированным подграфом* (или, более полно, *подграфом, индуцированным множеством* $\mathcal{U}$), если множество рёбер $\mathcal{E}H$ подграфа H графа G состоит из всех тех рёбер множества $\mathcal{E}G$, оба конца которых принадлежат множеству $\mathcal{U} = \mathcal{V}H$. Его также называют сужением графа G на $\mathcal{U}$. В этом случае используем обозначение $G|_{\mathcal{U}} = H$. Для орграфов определение всех видов подграфов даётся аналогично с заменой множества рёбер на множество дуг.

Маршрут длины k в орграфе – чередующаяся последовательность вершин v_i и дуг $a_i = (v_{i-1}, v_i)$: $v_0, a_1, v_1, \ldots, a_k, v_k$. *Контур* – маршрут, где $v_0 = v_k$, а остальные вершины различны и отличны от v_0. *Путь* – маршрут, все дуги которого различны. В полумаршруте дугами являются либо (v_{i-1}, v_i), либо (v_i, v_{i-1}). Аналогично определяется полупуть.

Вершина j достижима из вершины i, если в орграфе существует путь из i в j. Всякая вершина достижима из самой себя.

Ключевые слова: минимальный лес, ориентированное дерево, неравенства выпуклости.

Орграф называется *слабым (слабо связным)*, если любые его две вершины соединены полупутем. Любой максимальный относительно включения слабый подграф графа G называется его *связной компонентой* (или просто *компонентой*).

Неориентированный граф без циклов называется лесом. Связные компоненты леса – деревья.

В ситуации орграфов ориентированные леса и деревья возможны двух типов: заходящие и исходящие, получающиеся из первых заменой направления всех дуг. *Заходящий лес* – орграф, не содержащий контуров, в котором полустепень исхода любой вершины равна либо нулю, либо единице ($d_i^{\text{out}} \in \{0,1\}$). В дальнейшем используются только заходящие леса, поэтому для краткости используем всюду термин лес. Связные компоненты леса называются *деревьями.* Единственную вершину i дерева, полустепень исхода которой равна нулю ($d_i^{\text{out}} = 0$), назовем *корнем* дерева. Дерево леса F с корнем в вершине i будем обозначать T_i^F. Множество корней леса F обозначаем $\mathcal{K}_F$.

Исходящей окрестностью вершины i будем называть множество заходов дуг, исходящих из i, и обозначать $\mathcal{N}_i^{\text{out}}(F)$. В случаях, когда ясно о каком графе идёт речь, или это обстоятельство несущественно, будем использовать укороченное обозначение $\mathcal{N}_i^{\text{out}}$ и опускать указание на сам граф. Аналогично, $\mathcal{N}_i^{\text{in}}$ – множество исходов дуг, заходящих в i, будем называть *входящей окрестностью* вершины i.

Будем говорить, что в графе G дуга исходит из множества $\mathcal{U}$ и заходит во множество $\mathcal{V}$, если в этом графе существует хотя бы одна дуга, исход которой принадлежит множеству $\mathcal{U}$, а заход – множеству $\mathcal{V}$. Будем также говорить, что из множества $\mathcal{U}$ исходит дуга, если существует дуга, исход которой принадлежит множеству $\mathcal{U}$, а заход не принадлежит.

Если $\mathcal{D}$ – некоторое подмножество множества вершин графа G, то множество заходов дуг, исходящих из множества $\mathcal{D}$, будем называть исходящей окрестностью множества $\mathcal{D}$ и обозначать как $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\text{out}}(G)$. Для краткости, указание на граф G будем опускать, когда понятно о каком графе идёт речь, или это обстоятельство несущественно. То есть $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\text{out}} = (\bigcup\limits_{i\in\mathcal{D}} \mathcal{N}_i^{\text{out}}) \setminus \mathcal{D}$. Аналогично, входящая окрестность множества $\mathcal{D}$, это множество $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\text{in}} = (\bigcup\limits_{i\in\mathcal{D}} \mathcal{N}_i^{\text{in}}) \setminus \mathcal{D}$ исходов дуг, заходящих в $\mathcal{D}$.

Для часто встречающихся свойств достижимости используем следующие обозначения:

$i \stackrel{G}{\to} j$ – вершина j достижима из i в графе G;

$i \stackrel{G}{\not\to} j$ – вершина j недостижима из i в графе G;

$\mathcal{X} \stackrel{G}{\to} \mathcal{Y}$ – множество $\mathcal{Y}$ достижимо из множества $\mathcal{X}$ в графе G в том смысле, что существуют такие вершины $i \in \mathcal{X}$ и $j \in \mathcal{Y}$, что $i \stackrel{G}{\to} j$;

$\mathcal{X} \stackrel{G}{\not\to} \mathcal{Y}$ – множество $\mathcal{Y}$ недостижимо из множества $\mathcal{X}$ в графе G в том смысле, что $i \stackrel{G}{\not\to} j$ для любых вершин $i \in \mathcal{X}$ и $j \in \mathcal{Y}$.

§2. Операция подмены исходящих дуг

Пусть F и G – два некоторых орграфа с одним и тем же множеством вершин $\mathcal{N}$, а $\mathcal{D}$ – некоторое подмножество множества вершин. Заменим в F все дуги, исходящие из вершин множества $\mathcal{D}$, на дуги исходящие из этих вершин в орграфе G. Полученный граф будем обозначать $F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$.

Нас интересует ситуация, когда F и G являются заходящими лесами (в дальнейшем всюду, для краткости – лесами) на одном и том же множестве вершин и, при этом, граф $F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ также оказывается лесом. Заметим, что если F и G – леса, то в графе $F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ полустепень исхода любой вершины, хоть и может измениться, но по-прежнему равна либо нулю, либо единице. Поэтому для проверки того, является ли построенный граф лесом, нужно лишь убедиться в том, что в нём не появилось контуров. Сформулируем достаточное условие того, чтобы описанная операция замены дуг приводила к лесу.

Лемма 1. *Пусть F и G – леса на одном и том же множестве вершин, и пусть $\mathcal{D}$ – подмножество множества вершин такое, что $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G) \stackrel{F}{\not\to} \mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\mathcal{D}}(F)$. Тогда граф $F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ является лесом.*

Доказательство. Контур, если и может возникнуть при подмене дуг, то должен включать в себя какие-то дуги, исходящие из множества $\mathcal{D}$, и какие-то дуги, заходящие в него. Поскольку из вершин множества $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G)$ в лесе F по условию нельзя попасть в $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\mathcal{D}}(F)$ (см. рис. 1), то и после подмены дуг это свойство сохранится и контур образоваться не может. □

Следствие 1. *Пусть F и G – леса с одним и тем же множеством вершин, и пусть $\mathcal{D}$ – подмножество множества вершин, в которое в лесе F дуги не заходят. Тогда граф $F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ является лесом.*

Доказательство. Поскольку множество $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\mathcal{D}}(F)$ пустое, то условия леммы 1 выполнены автоматически. □

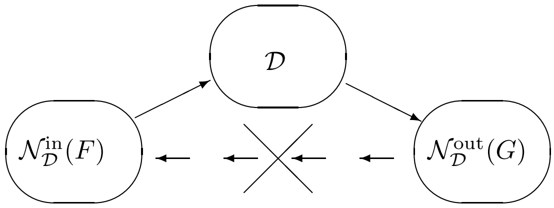

Рис. 1. Из множества $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G)$ никакая последовательность дуг в лесе F (а, значит, и в графе $F^{G}_{\uparrow\mathcal{D}}$) не ведёт в $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\mathcal{D}}(F)$, поэтому контур образоваться не может.

Следствие 2. *Пусть F и G – леса с одним и тем же множеством вершин, и пусть $\mathcal{D}$ – подмножество множества вершин, из которого в лесе G дуги не исходят, тогда граф $F^{G}_{\uparrow\mathcal{D}}$ является лесом.*

Доказательство. Поскольку множество $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G)$ пустое, то условия леммы 1 выполнены автоматически. $\square$

Следствие 3. *Пусть F и G – леса с одним и тем же множеством вершин, и пусть T^F – дерево леса F, а $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F$. Тогда графы $F^{G}_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $G^{F}_{\uparrow\mathcal{D}}$ являются лесами.*

Доказательство. Поскольку T^F – связная компонента, то множество $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\mathcal{D}}(F)$ пустое и, следовательно, $F^{G}_{\uparrow\mathcal{D}}$ является лесом. Кроме того, пустым является и множество $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(F)$, а значит $G^{F}_{\uparrow\mathcal{D}}$ тоже лес. $\square$

Следствие 4. *Пусть F и G – леса с одним и тем же множеством вершин, и пусть T^F и T^G – деревья лесов F и G соответственно, а $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G$. Тогда $F^{G}_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $G^{F}_{\uparrow\mathcal{D}}$ являются лесами.*

Доказательство. В силу симметрии условия достаточно доказать, что $F^{G}_{\uparrow\mathcal{D}}$ есть лес. Множество $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G)$ является подмножеством множества $\mathcal{V}T^G \setminus \mathcal{V}T^F$ (см. рис. 2). Поскольку T^F – связная компонента леса F, то в F из множества $\mathcal{V}T^G \setminus \mathcal{V}T^F$ никакая последовательность дуг не ведёт в $\mathcal{V}T^F$ и уж тем более в $\mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$, подмножеством которого является множество $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\mathcal{D}}(F)$. Поэтому $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G) \overset{F}{\nrightarrow} \mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\mathcal{D}}(F)$. $\square$

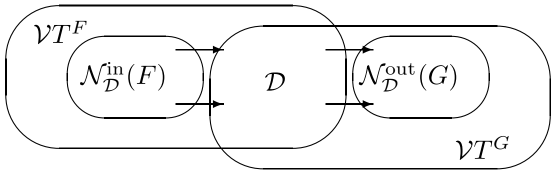

Рис. 2. $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G$.

Следствие 5. *Пусть F и G – леса с одним и тем же множеством вершин $\mathcal{N}$, и пусть T^F и T^G – деревья лесов F и G соответственно, а $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$. Тогда графы $F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $G^F_{\uparrow\mathcal{D}}$ являются лесами.*

Доказательство. Покажем сначала, что множество $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G)$ не содержит вершин дерева T^F. Действительно, множество $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$ не содержит вершин дерева T^G. Поэтому множество $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G)$ не содержит вершин дерева T^G. В частности, $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G) \cap (\mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G) = \varnothing$. Но $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G) \cap \mathcal{D} = \varnothing$ (это свойство выполнено вообще для любого графа по определению). Множество же вершин дерева T^F можно представить в виде $\mathcal{V}T^F = \mathcal{D} \cup \big(\mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G\big)$. То есть, множество $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G)$ не имеет пересечения ни с одной частью указанного объединения, а значит оно не содержит и вершин дерева T^F (см. рис. 3a): $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G) \subset \mathcal{N} \setminus \mathcal{V}T^F$. В лесе F нельзя попасть в множество $\mathcal{V}T^F$ из $\mathcal{N} \setminus \mathcal{V}T^F$, поскольку дерево T^F является его связной компонентой. Множество $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\mathcal{D}}(F)$ является подмножеством множества вершин дерева T^F. Поэтому никакая последовательность дуг в F не ведёт из $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G)$ в $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\mathcal{D}}(F)$. Тем самым, граф $F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ является лесом.

Рассмотрим теперь граф $G^F_{\uparrow\mathcal{D}}$. Поскольку $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$, то множество $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\mathcal{D}}(G)$ не содержит вершин дерева T^G (см. рис. 3b). Далее, если в дереве T^F леса F есть дуга (i, j) такая что $i \in \mathcal{D}$, а $j \notin \mathcal{D}$, то поскольку $\mathcal{V}T^F = \mathcal{D} \cup \big(\mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G\big)$, то $j \in \mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G$. Тем самым, $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(F) \subseteq \mathcal{V}T^G$. В лесе G из множества $\mathcal{V}T^G$ дуги не исходят, поскольку это его связная компонента. Поэтому в G нет последовательности дуг ведущей из $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(F)$ в $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\mathcal{D}}(G)$. $\square$

Следствие 6. *Пусть F и G – леса с одним и тем же множеством вершин, и пусть T^F и T^G – деревья лесов F и G соответственно, и*

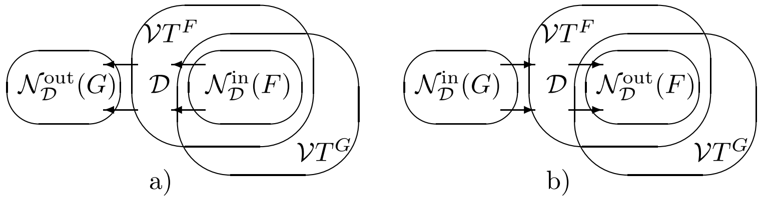

Рис. 3. $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$.

пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G$, *причём* $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{in}}(F) = \varnothing$ *и* $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{out}}(F) \subset \mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$. *Тогда графы* $F_{\uparrow\mathcal{D}}^G$ *и* $G_{\uparrow\mathcal{D}}^F$ *являются лесами.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{in}}(F) = \varnothing$, то граф $F_{\uparrow\mathcal{D}}^G$ является лесом. Далее, множество $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{out}}(F)$ по условию не содержит вершин дерева T^G. При этом множество $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{in}}(G)$, очевидно, содержится в T^G (см. рис. 4). Поэтому в лесе G никакая последовательность дуг из $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{out}}(F)$ не ведёт в $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{in}}(G)$. Следовательно граф $G_{\uparrow\mathcal{D}}^F$ является лесом. □

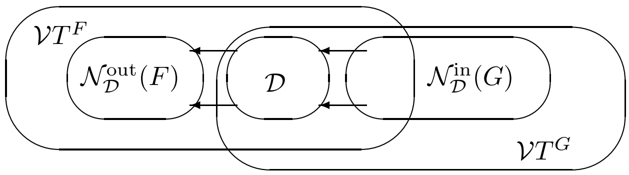

Рис. 4. $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G$, $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{in}}(F) = \varnothing$ и $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{out}}(F) \subset \mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$.

Следствие 7. *Пусть* F *и* G *– леса с одним и тем же множеством вершин, и пусть* T^F *и* T^G *– деревья лесов* F *и* G *соответственно, и пусть* $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$, *причём* $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{in}}(F) = \varnothing$ *и* $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{out}}(F) \subset \mathcal{V}T^G$. *Тогда графы* $F_{\uparrow\mathcal{D}}^G$ *и* $G_{\uparrow\mathcal{D}}^F$ *являются лесами.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{in}}(F) = \varnothing$, то граф $F_{\uparrow\mathcal{D}}^G$ является лесом. Далее, множество $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{in}}(G)$ не может содержать вершины дерева

T^G, так как $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$ (см. рис. 5). При этом по условию множество $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(F)$ содержится в дереве T^G. Тем самым, в лесе G вершины множества $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\mathcal{D}}(G)$ недостижимы из $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(F)$. Следовательно, граф $G^F_{\uparrow\mathcal{D}}$ является лесом. □

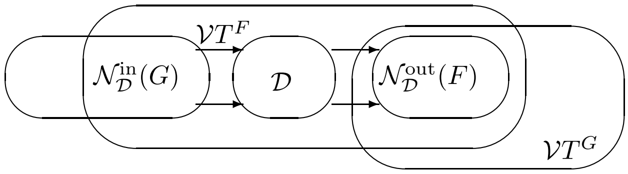

Рис. 5. $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$, $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\mathcal{D}}(F) = \varnothing$ и $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(F) \subset \mathcal{V}T^G$.

§3. Неравенства выпуклости

Пусть V – взвешенный орграф с множеством вершин $\mathcal{N}$, $|\mathcal{N}| = N$ и каждой дуге (i,j) поставлено в соответствие некоторое вещественное число v_{ij}. Для всякого его остовного подграфа G и подмножества множества вершин $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{N}$, введём веса

$$\Upsilon^G_{\mathcal{S}} = \sum_{\substack{i\in\mathcal{S}\\(i,j)\in\mathcal{A}G}} v_{ij}\ , \quad \Upsilon^G = \Upsilon^G_{\mathcal{N}} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}G} v_{ij}\ . \tag{1}$$

Заметим, что величина $\Upsilon^G_{\mathcal{S}}$ формируется в том числе и из весов дуг, заходы которых не принадлежат множеству $\mathcal{S}$. Если в графе G дуги из множества $\mathcal{S}$ не исходят, то очевидно $\Upsilon^G_{\mathcal{S}} = \Upsilon^{G|_{\mathcal{S}}}$.

Множество лесов, состоящих из $k = 1, 2, \ldots, N$ деревьев, обозначаем $\mathcal{F}^k$. Минимум веса Υ^F среди всех лесов $F \in \mathcal{F}^k$ обозначим через ϕ^k:

$$\phi^k = \min_{F\in\mathcal{F}^k} \Upsilon^F\ .$$

Если $\mathcal{F}^k = \varnothing$, положим $\phi^k = \infty$, в частности, $\phi^0 = \infty$. Заметим также, что множество $\mathcal{F}^N$ состоит из одного лишь пустого леса. Поэтому $\phi^N = 0$. Любой лес из $\mathcal{F}^{N-1}$ содержит ровно одну дугу, поэтому $\phi^{N-1} = \min\limits_{(i,j)\in\mathcal{A}V} v_{ij}$.

Развитый инструментарий позволяет теперь легко доказать известные неравенства выпуклости (2), которым подчиняются величины ϕ^k.

Изначально они получены Вентцелем [1] из анализа асимптотического спектра матриц с экспоненциально малыми коэффициентами (минуя теорию графов).

Докажем предварительно следующую совсем простую лемму, которой неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть $F \in \mathcal{F}^m$ и $H \in \mathcal{F}^k$, и пусть $\mathcal{D}$ – подмножество множества вершин, содержащее на n корней леса F больше, чем корней леса H. Тогда*

a) *если $F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$ – лес, то $F^H_{\uparrow\mathcal{D}} \in \mathcal{F}^{m-n}$;*

b) *если $H^F_{\uparrow\mathcal{D}}$ – лес, то $H^F_{\uparrow\mathcal{D}} \in \mathcal{F}^{k+n}$.*

Доказательство. a) По выбору множества $\mathcal{D}$ в графе $F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$ число вершин, из которых не исходят дуги, на n меньше, чем в лесе F. Поскольку граф $F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$ является лесом, то у него на n корней меньше, чем в лесе F. Следовательно, $F^H_{\uparrow\mathcal{D}} \in \mathcal{F}^{m-n}$. Пункт *b*) доказывается аналогично. □

Из множества лесов $\mathcal{F}^k$ выделим подмножество $\widetilde{\mathcal{F}}^k$, на котором достигается минимум ϕ^k: $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k \Leftrightarrow F \in \mathcal{F}^k$ и $\Upsilon^F = \phi^k$. Леса минимального веса условимся называть минимальными.

Теорема 1. *Пусть множество $\mathcal{F}^k$ непусто при некотором $k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$. Тогда*

$$\phi^{k-1} - \phi^k \geqslant \phi^k - \phi^{k+1}. \tag{2}$$

Доказательство. Поскольку $\mathcal{F}^k$ непусто, непусты и множества $\mathcal{F}^l$, $l \in \{k, k+1, \dots, N-1\}$ (множество $\mathcal{F}^N$ заведомо непусто и состоит из одного лишь пустого леса – все вершины являются корнями), в частности, существует хотя бы один лес $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$. Если $\mathcal{F}^{k-1} = \varnothing$, то по определению $\phi^{k-1} = \infty$ и (2) выполнено автоматически. Пусть $\mathcal{F}^{k-1}$ непусто. Тогда существует хотя бы один лес $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$. Возьмём указанные леса F и H. Поскольку в лесе F на два корня больше, чем в H, то найдется хотя бы одно дерево T^F леса F, из всех вершин которого в лесе H исходят дуги. Введем графы $P = F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $Q = H^F_{\uparrow\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F$. В силу следствия 3 из леммы 1 оба графа P и Q являются лесами. Поскольку $\mathcal{D}$ содержит ровно один корень леса F и ни одного корня леса H, то по лемме 2 оба леса P и Q принадлежат множеству $\mathcal{F}^k$. Пусть $\Delta = \Upsilon^H_{\mathcal{D}} - \Upsilon^F_{\mathcal{D}}$. Тогда

$$\Upsilon^P = \Upsilon^F + \Delta = \phi^{k+1} + \Delta \geqslant \phi^k,$$

$$\Upsilon^Q = \Upsilon^H - \Delta = \phi^{k-1} - \Delta \geqslant \phi^k.$$

Откуда

$$\phi^{k-1} - \phi^k \geqslant \Delta \geqslant \phi^k - \phi^{k+1}. \qquad \square$$

Неравенства выпуклости (2) играют важную роль в анализе динамических систем при малых случайных возмущениях [2]- [4].

§4. Родственные леса минимального веса

Изучим свойства минимальных лесов при разных k.

Лемма 3. *Пусть $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ и $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, и пусть $\mathcal{D}$ – подмножество множества вершин такое, что $F^H_{\uparrow\mathcal{D}} \in \mathcal{F}^k$ и $H^F_{\uparrow\mathcal{D}} \in \mathcal{F}^{k+1}$. Тогда $F^H_{\uparrow\mathcal{D}} \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ и $H^F_{\uparrow\mathcal{D}} \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$.*

Доказательство. Обозначим $H' = F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$, $F' = H^F_{\uparrow\mathcal{D}}$. Поскольку $H' \in \mathcal{F}^k$, то $\Upsilon^{H'} \geqslant \phi^k$. Аналогично, из того что $F' \in \mathcal{F}^{k+1}$ следует, что $\Upsilon^{F'} \geqslant \phi^{k+1}$. Пусть $\Delta = \Upsilon^H_{\mathcal{D}} - \Upsilon^F_{\mathcal{D}}$, тогда

$$\phi^k \leqslant \Upsilon^{H'} = \Upsilon^F + \Delta = \phi^{k+1} + \Delta,$$
$$\phi^{k+1} \leqslant \Upsilon^{F'} = \Upsilon^H - \Delta = \phi^k - \Delta.$$

Подставляя Δ из второго неравенство в первое, получаем, что $\Upsilon^{H'} \leqslant \phi^k$ и, следовательно, $\Upsilon^{H'} = \phi^k$. Значит $H' \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$. Аналогично, $F' \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$. $\square$

Замечание 1. Простой подсчёт числа корней показывает, что множество $\mathcal{D}$, фигурирующее в лемме 3, должно содержать на один корень леса F больше, чем корней леса H. В частности, если оно содержит единственный корень леса F, то в лесе H из всех вершин $\mathcal{D}$ исходят дуги.

Оказывается между минимальными лесами при разных k существует “генетическая” связь. Дадим предварительно определение.

Определение 1. Условимся называть лес $F \in \mathcal{F}^{k+1}$ с корнями (с точностью до нумерации) $1, 2, \cdots, k+1$, *предком* леса $G \in \mathcal{F}^k$ с корнями $1, 2, \cdots, k$, и, соответственно, лес $G \in \mathcal{F}^k$ *потомком* – леса $F \in \mathcal{F}^{k+1}$, если $T^F_i = T^G_i$, $i = 1, 2, \cdots, k-1$, а для подграфов леса G, индуцированных множествами $\mathcal{V}T^F_k$ и $\mathcal{V}T^F_{k+1}$, выполнено: $G|_{\mathcal{V}T^F_k} = T^F_k$, а граф $G|_{\mathcal{V}T^F_{k+1}}$ является деревом (см. рис 6).

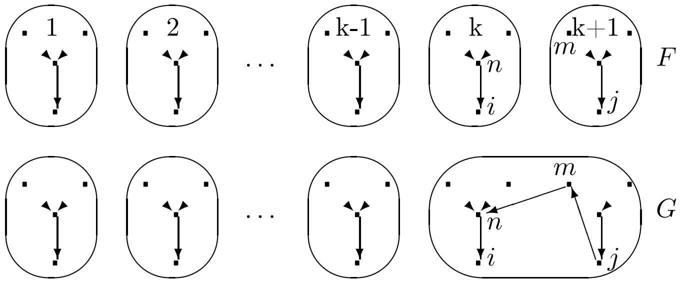

Рис. 6. Лес G – потомок леса F, а лес F – предок леса G.

Следующая теорема говорит о минимально возможных изменениях, которые необходимо произвести, чтобы из леса, принадлежащего множеству $\widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$, получить лес, принадлежащий множеству $\widetilde{\mathcal{F}}^{k}$, и наоборот.

Теорема 2. *(О родственных лесах). Пусть* $\mathcal{F}^k \neq \varnothing$ *при некотором* $k \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$*, тогда*

a) *любой лес из множества* $\widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ *имеет потомка в множестве* $\widetilde{\mathcal{F}}^{k}$*;*

b) *любой лес из множества* $\widetilde{\mathcal{F}}^{k}$ *имеет предка в множестве* $\widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$.

Доказательство. a) Поскольку по условию множество $\mathcal{F}^k$, то непусто и множество $\mathcal{F}^{k+1}$. Докажем, что любой лес $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ имеет потомка в множестве $\widetilde{\mathcal{F}}^{k}$. Пусть H – произвольный лес из множества $\widetilde{\mathcal{F}}^{k}$. Поскольку лес F содержит на один корень больше, чем H, а во всяком лесе из любой вершины исходит не более одной дуги, то существует хотя бы один корень (пусть это будет вершина j) леса F такой, что дерево T_j^F, корнем которого является вершина j, не имеет пересечения с множеством корней леса H.

Построим предварительный лес $H' \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k}$, который потребуется для окончательного построения потомка леса F. В качестве этого вспомогательного графа H' возьмем граф $F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{V}T_j^F$. По следствию 3 из леммы 1 графы H' и $H^F_{\uparrow\mathcal{D}}$ являются лесами. Множество $\mathcal{D}$ не содержит корней леса H', но содержит ровно один корень леса F – вершину

j. Таким образом, по лемме 2 получаем, что $H' \in \mathcal{F}^k$ и $H^F_{\uparrow\mathcal{D}} \in \mathcal{F}^{k+1}$. По лемме 3 мы имеем $H' \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$.

Заметим, что все деревья леса F, за исключением дерева T^F_j, являются поддеревьями деревьев леса H' с теми же корнями, а вершины множества $\mathcal{V}T^F_j$ "поделены" между деревьями леса H'. В само же множество $\mathcal{V}T^F_j$ в лесе H' дуги не заходят по его построению. Индуцированный подграф $H'|_{\mathcal{V}T^F_j}$ представляет собой лес. Пусть T – дерево этого леса, содержащее вершину j, вершина m – корень этого дерева, а $T^{H'}$ – дерево леса H', поддеревом которого является T. По построению в лесе H' дуги во множество $\mathcal{D}' = \mathcal{V}T$ не заходят (именно для выполнения этого свойства и требовалось построение промежуточного леса H'; лес H этим свойством не обладает – см. Пример 1 и рис.11). Имеем: $\mathcal{N}^{\text{in}}_{\mathcal{D}'}(H') = \varnothing$, $\mathcal{N}^{\text{out}}_{\mathcal{D}'}(H') \subset \mathcal{V}T^{H'} \setminus \mathcal{V}T^F$. При этом $\mathcal{D}' \subset \mathcal{V}T^{H'} \cap \mathcal{V}T^F_j$. Введем теперь граф $G = F^{H'}_{\uparrow\mathcal{D}'}$. По следствию 6 из леммы 1 графы G и $H'^F_{\uparrow\mathcal{D}'}$ являются лесами. Поскольку множество $\mathcal{D}'$ не содержит корней леса H', но содержит ровно один корень леса F – вершину j, то по лемме 2 имеем $G \in \mathcal{F}^k$ и $H'^F_{\uparrow\mathcal{D}'} \in \mathcal{F}^{k+1}$. По лемме 3 получаем, что $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$.

Докажем, что лес G является потомком леса F. Действительно, в лесе G из всех вершин множества $\mathcal{V}T^F_j$ исходят дуги. При этом, в лесе G дуги, исходящие из множества $\mathcal{V}T^F_j \setminus \mathcal{D}'$, заходят в $\mathcal{V}T^F_j$ (поскольку T^F_j – дерево леса F). Само же множество $\mathcal{D}'$ является множеством вершин дерева T индуцированного подграфа $H'|_{\mathcal{V}T^F_j}$, то есть $H'|_{\mathcal{D}'} = T$. Поэтому из множества $\mathcal{D}'$ в лесе G исходит ровно одна дуга и исходит она из корня m дерева T (пусть для определённости это будет дуга (m, n), см. также рис.6). Но тогда и из множества $\mathcal{V}T^F_j$ в лесе G исходит ровно одна дуга – именно эта дуга (m, n). Вершина n не может принадлежать множеству $\mathcal{D}'$ по определению дуги, исходящей из множества. Она также не может принадлежать множеству $\mathcal{V}T^F_j \setminus \mathcal{D}'$, иначе это бы противоречило тому, что T – связная компонента индуцированного подграфа $H'|_{\mathcal{V}T^F_j}$. Поэтому $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{V}T^F_j$. Тем самым, $G|_{\mathcal{V}T^F_j}$ – дерево с корнем в m. Пусть n принадлежит дереву T^F_i. Окончательно имеем: $G|_{\mathcal{V}T^F_i} = T^F_i$, причем вершина i – корень дерева T^G_i леса G. Индуцированный подграф $G|_{\mathcal{V}T^F_j}$ – дерево. Корнем этого дерева является вершина m. Все деревья лесов F и G с корнями из $\mathcal{K}_F \setminus \{i, j\} = \mathcal{K}_G \setminus \{j\}$ совпадают, поскольку дуги исходящие из вершин множества $\mathcal{N} \setminus \mathcal{D}'$, вообще не были затронуты перестроением леса F с помощью леса H', а единственная исходящая дуга из множества $\mathcal{D}'$ в лесе H' имеет заход в дереве T_i^F.

Заметим, что по факту, минуя необходимые промежуточные построения, в лесе F были заменены (на дуги леса H) только дуги, исходящие из вершин множества $\mathcal{D}' = \mathcal{V}T$. Однако, как показывает Пример 1, необходимо было построить промежуточный лес H', в котором бы дуги во множество $\mathcal{D}'$ не заходили.

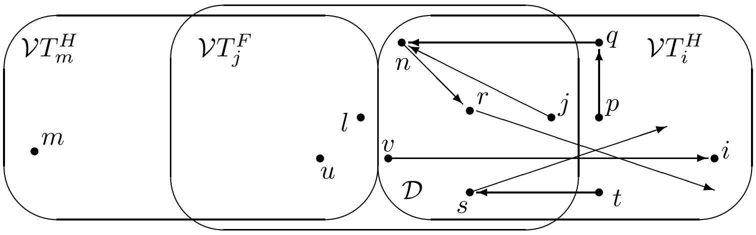

Рис. 7. $\mathcal{D} = \mathcal{V}T_j^F \cap \mathcal{V}T_i^H$. Указаны дуги дерева T_i^H, исходящие из вершин множества $\mathcal{D}$ и также дуги этого дерева, двигаясь по которым можно попасть в множество $\mathcal{D}$. Дуги других деревьев леса H (в частности, изображённого дерева T_m^H) в $\mathcal{D}$ попасть не могут.

b) Пусть так же как в первой части доказательства F и H – произвольные леса из множеств $\widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ и $\widetilde{\mathcal{F}}^k$ соответственно, а корень j леса F таков, что дерево T_j^F с корнем в этой вершине не имеет пересечения с множеством $\mathcal{K}_H$ корней леса H. Пусть вершина j в лесе H принадлежит дереву T_i^H с корнем в вершине i. Построение предка (назовем его Q) леса H проведём в несколько этапов.

Введём граф $F' = H^F_{\uparrow\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{V}T_i^H \cap \mathcal{V}T_j^F$. По следствию 4 из леммы 1 графы F' и $F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$ являются лесами. Заметим, что в лесе H из всех вершин множества $\mathcal{D}$ исходят дуги, а в лесе F – из всех, кроме вершины j. Поэтому по лемме 2 мы имеем $F' \in \mathcal{F}^{k+1}$ и $F^H_{\uparrow\mathcal{D}} \in \mathcal{F}^k$, а по лемме 3 получаем, что $F' \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$. Вершина j в лесе F' продолжает оставаться корнем. В дерево $T_j^{F'}$ от леса F попали только те дуги, которые в индуцированном подграфе $F|_{\mathcal{D}}$ составляли дерево с корнем в j. Разумеется, в дереве $T_j^{F'}$ могут содержаться и дуги леса H, но в любом случае они обязаны содержаться в дереве T_i^H (см. рис. 7 и 8). Поэтому выполнено $\mathcal{V}T_j^{F'} \subset \mathcal{V}T_i^H$. При этом множество $\mathcal{V}T_j^{F'} \setminus \mathcal{D}$, вообще говоря, непусто именно из-за возможности попадания в дерево $T_j^{F'}$ дуг, исход которых принадлежит дереву T_i^H.

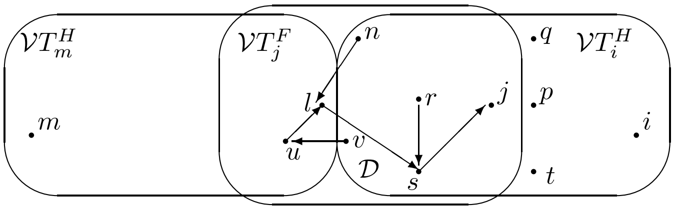

Рис. 8. $\mathcal{D} = \mathcal{V}T_j^F \cap \mathcal{V}T_i^H$, Указаны только дуги дерева T_j^F. Вершины n и v не принадлежат дереву T_m^H, однако они принадлежит дереву $T_m^{F'}$ леса $F' = H_{\uparrow\mathcal{D}}^F$. Таким образом, $T_m^{F'} \supseteq T_m^H$. При этом $\mathcal{V}T_j^{F'} \subset \mathcal{V}T_i^H$.

Множество $\mathcal{K}_H \cup \{j\}$ является множеством корней леса F'. Однако, поскольку в лесе F из множества $\mathcal{V}T_i^H \cap \mathcal{V}T_j^F$ могли исходить дуги, то при $m \in \mathcal{K}_H \setminus \{i\}$ деревья T_m^H, вообще говоря, не совпадают с деревьями $T_m^{F'}$, а являются лишь их поддеревьями: $T_m^{F'} \supseteq T_m^H$ (см. рис 9). Было заменено слишком много дуг леса H в процессе построения предка – часть из них требуется вернуть (в примере на рис. 9 это дуги (n, l) и (v, u), которые “увеличили” дерево T_m^H до дерева $T_m^{F'}$).

Пусть $m \in \mathcal{K}_H \setminus \{i\}$ и множество $\mathcal{D}' = \mathcal{V}T_m^{F'} \setminus \mathcal{V}T_m^H$ непусто. Займёмся процедурой “забирания” лишних вершин дерева $T_m^{F'}$ в деревья с другими корнями. Введём граф $F'' = F'^{H}_{\uparrow\mathcal{D}'}$. По следствию 5 из леммы 1 F'' и граф $H_{\uparrow\mathcal{D}'}^{F'}$ – леса. Множество $\mathcal{D}'$ не содержит ни корней леса F', ни корней леса H (см. рис. 9). По лемме 2 имеем $F'' \in \mathcal{F}^{k+1}$ и $H_{\uparrow\mathcal{D}'}^{F'} \in \mathcal{F}^k$. По лемме 3 получаем, что $F'' \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$. Заметим, что $\mathcal{V}T_m^{F'} = \mathcal{D}' \cup \mathcal{V}T_m^H$. В лесе F'' по построению дуги, исходящие из вершин множества $\mathcal{D}'$, такие же, как в лесе H, а дуги, исходящие из вершин множества $\mathcal{V}T_m^H$, у лесов F' и H совпадали еще по построению леса F'. Значит они совпадают и у лесов H и F''. Тем самым, $T_m^{F''} = T_m^H$. Поскольку в лесах F'' и H нет ни исходящих дуг из множества $\mathcal{V}T_m^{F''} = \mathcal{V}T_m^H$, ни заходящих в него, а на самом этом множестве F'' и H совпадают, то никакие

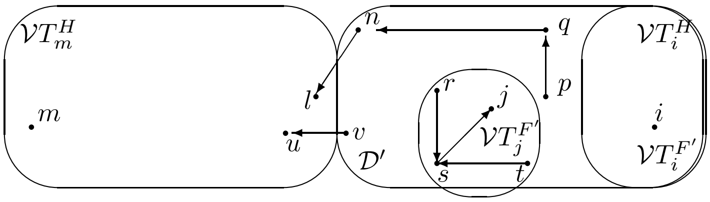

Рис. 9. $\mathcal{D}' = \mathcal{V}T_m^{F'} \setminus \mathcal{V}T_m^H = \{v, n, p, q\}$. Дуги (n, l) и (v, u) леса F' исходно были дугами леса F. Из-за них деревья T_m^H и $T_m^{F'}$ не совпадают, а $T_m^{F'} \supseteq T_m^H$. Необходимо дугу (n, l) заменить на дугу, исходящую из n в лесе H, то есть на дугу (n, r), а дугу (v, u) – на дугу (v, i) (см. рис. 7).

дальнейшие замены дуг между лесами F'' и H дерево T_m^H уже не изменят, каким бы ни было множество вершин, на котором заменяются дуги. [1]

Если найдётся еще такая вершина $l \in \mathcal{K}_H \setminus \{i, m\}$, что множество $\mathcal{D}'' = \mathcal{V}T_l^{F''} \setminus \mathcal{V}T_l^H$ непусто, то построим лес $F''^{H}_{\uparrow\mathcal{D}''}$, и так далее до тех пор, пока не получим лес $F^* \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$, у которого для всех $m \in \mathcal{K}_H \setminus \{i\}$ выполнено $T_m^{F^*} = T_m^H$. Теперь множества вершин деревьев $T_i^{F^*}$ и $T_j^{F^*}$ составляют множество вершин дерева T_i^H.

Однако, граф F^* всё еще не является предком леса H, поскольку в дереве T_i^H из множества $\mathcal{V}T_j^{F^*}$ может исходить несколько дуг, а не одна (см. рис. 7 и 10). Соответственно, индуцированный подграф $H|_{\mathcal{V}T_j^{F^*}}$ не является деревом, вообще говоря, а представляет собой лес. Этот лес разбивает множество вершин $\mathcal{V}T_j^{F^*}$ на некоторое количество деревьев. Пусть T – то из этих деревьев, которое содержит вершину j, и $\widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{V}T_j^{F^*} \setminus \mathcal{V}T$.

Заметим, что по процедуре построения леса F^* (мы последовательно возвращали дуги леса H, начиная с первого промежуточного леса F') все его дуги, исходящие из вершин $\mathcal{N} \setminus \mathcal{V}T_j^{F^*}$ – такие же как в лесе

[1] Заметим, что если у двух графов есть совпадающие связные компоненты, то как бы мы ни меняли дуги одного графа, исходящие из каких-либо вершин, на дуги другого, исходящие из этих же вершин, эти связные компоненты измениться не могут.

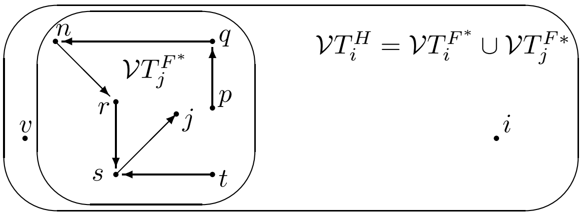

Рис. 10. На рисунке изображены дуги дерева $T_j^{F^*}$. Однако, индуцированный подграф $H|_{\mathcal{V}T_j^{F^*}}$ является лесом, состоящим из двух деревьев, поскольку в H из множества $\mathcal{V}T_j^{F^*}$ исходят две дуги – из вершин r и s (см. рис. 7)

H (и даже часть дуг дерева $T_j^{F^*}$). Возвращенные дуги попали либо в дерево $T_j^{F^*}$, либо в дерево $T_i^{F^*}$ (оно состоит только из дуг леса H). Но это, в частности, означает, что в лесе H дуги во множество $\mathcal{V}T_j^{F^*}$ вообще не заходят. Следовательно, в лесе H не заходят дуги и в связные компоненты индуцированного подграфа $H|_{\mathcal{V}T_j^{F^*}}$. Таким образом, $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}_{\widehat{\mathcal{D}}}(H) = \varnothing$. При этом $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\widehat{\mathcal{D}}}(H) \subset \mathcal{V}T_i^H \setminus \mathcal{V}T_j^{F^*}$. Само же множество $\widehat{\mathcal{D}} \subset \mathcal{V}T_i^H \cap \mathcal{V}T_j^{F^*}$. Введём граф $Q = {F^*}^H_{\uparrow\widehat{\mathcal{D}}}$. По следствию 6 из леммы 1 и граф Q и граф $H^{F^*}_{\uparrow\widehat{\mathcal{D}}}$ являются лесами. Множество $\widehat{\mathcal{D}}$ не содержит корней ни леса F^*, ни леса H, поэтому по лемме 2 мы имеем $Q \in \mathcal{F}^{k+1}$ и $H^{F^*}_{\uparrow\widehat{\mathcal{D}}} \in \mathcal{F}^k$. По лемме 3 получаем, что $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$. По построению Q является предком леса H. Действительно: $\mathcal{V}T_j^Q = \mathcal{V}T$, $H|_{\mathcal{V}T_j^Q}$ – дерево. При этом вершина i – корень леса Q, а $H|_{\mathcal{V}T_i^Q} = T_i^Q$. Также $T_l^H = T_l^Q$ при $l \in \mathcal{K}_H \setminus \{i\}$. □

Пример 1. Построение из леса F его потомка G, используя лес H. Деревья лесов F и H, участвующие в построении, показаны на рис. 11 слева. Во втором ряду находятся леса $H' = F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $F' = H^F_{\uparrow\mathcal{D}}$, где множество $\mathcal{D} = \mathcal{V}T_j^F = \{j, t, m\}$. Индуцированный подграф $H'|_{\mathcal{D}}$ представляет собой лес, состоящий из двух деревьев: пустое дерево с корнем в вершине t и дерево T с единственной дугой (j, m). Пусть, $G = F^{H'}_{\uparrow\mathcal{D}'}$,

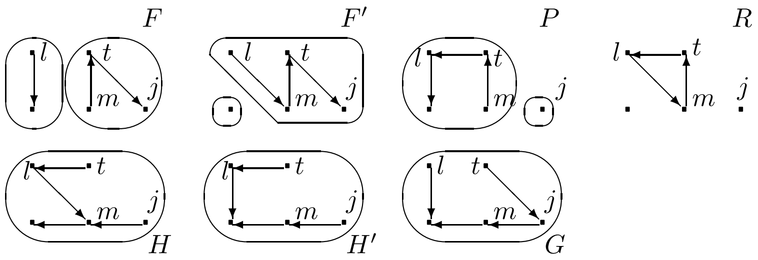

Рис. 11. Построение из леса F его потомка G, используя лес H и промежуточный лес H'.

$P = {H'}^{F}_{\uparrow\mathcal{D}'}$ где $\mathcal{D}' = \{m, j\}$. Лес G является искомым потомком леса F. Заметим, что хотя граф $F^{H}_{\uparrow\mathcal{D}'}$ совпадает с требуемым лесом G, однако граф $R = H^{F}_{\uparrow\mathcal{D}'}$ содержит цикл и поэтому сразу доказать, что G является минимальным лесом, не удаётся – заведомо не выполнены условия леммы 3. Причиной появления цикла является то обстоятельство, что в лесе H есть дуга, которая заходит в множество $\mathcal{D}' = \{j, m\}$ – это дуга (l, m). В лесе H' дуг, заходящих в $\mathcal{D}'$, нет. Этим и вызвана необходимость построения промежуточного леса H'.

Замечание 2. Метод доказательства теоремы 2 заключается в том, что берутся два произвольных минимальных леса $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ и $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k}$ и с помощью специальных замен дуг строится и минимальный потомок леса F, и минимальный предок леса H. Тем самым любые два леса $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ и $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k}$ содержат довольно много "генетической" информации, поскольку по ним определяется как минимальный предок леса H, так и минимальный потомок леса F.

§5. Заключение

Заходящие леса примечательны тем, что через них выражаются миноры Лапласовских матриц (с нулевой суммой по строке) [7]- [10] и миноры произвольных квадратных матриц, а также их спектр [5, 6]. Именно этим обстоятельством и обусловлен выбор заходящих лесов, а не исходящих.

Более тонкие свойства лесов минимального веса и их структура на специальных подмножествах множества всех вершин будут представлены в продолжении данной работы.

Список литературы

1. А. Д. Вентцель, *Об асимптотике собственных значений матриц с элементами порядка* $\exp\{-V_{ij}/2\varepsilon^2\}$, — ДАН СССР, **202**, No. 2 (1972), 263–266.
2. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.* М (1979) 429
3. В. А. Буслов, К. А. Макаров, *Иерархия масштабов времени при малой диффузии*, — ТМФ **76**, No. 2 (1988), 219–230.
4. В. А. Буслов, К. А. Макаров, *Времена жизни и низшие собственные значения оператора малой диффузии*, — Мат. заметки **51**, No. 1 (1992), 20–31
5. В. А. Буслов, *О характеристическом многочлене и собственных векторах в терминах древовидной структуры орграфа*, — Зап. научн. сем. ПОМИ **450** (2016), 14–36.
6. В. А. Буслов, *О связи кратностей спектра со знаками слагаемых в компонентах собственных векторов в древовидной структуре*, — Зап. научн. сем. ПОМИ **464** (2017), 14–36.
7. В. А. Буслов, *О коэффициентах характеристического многочлена лапласиана взвешенного ориентированного графа и теореме о всех минорах*, — Зап. научн. сем. ПОМИ **427** (2014), 5–21.
8. S. Chaiken, *A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem*, — SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods **3**, No. 3 (1982), 319–329.
9. J. W. Moon, *Some determinant expansions and the matrix-tree theorem*, — Discrete Mathematics **124** (1994), 163–171.
10. P. Chebotarev, R. Agaev, *Forest matrices around the Laplacian matrix*, — Linear Algebra and its Applications **356** (2002), 253–274.

Buslov V. A. The structure of minimum-weight directed forests: related forests and convexity inequalities.

A toolkit has been developed that allows to build directed forests from another directed forests. With its help, inequalities are proved that connect the weights of minimal directed forests with different numbers of trees in them. A theorem on the minimum necessary changes that must be made in the minimal directed forest is also proved in order to obtain another minimal directed forest with the number of roots different by one.

С.-Петербургский
государственный университет,
ул. Ульяновская, д.3,
Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: abvabv@bk.ru, v.buslov@spbu.ru

Поступило 22 ноября 2018 г.