Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

Б. П. Харламов

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ОТ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА СО ЗНАЧЕНИЯМИ НА ИНТЕРВАЛЕ С НЕДОСТИЖИМЫМИ ГРАНИЦАМИ: ПОЛУМАРКОВСКИЙ ПОДХОД

Введение

В данной работе рассматривается диффузионный процесс со значениями в симметричном интервале $(-c, c)$ $(c > 0)$. Предполагается, что границы интервала недостижимы (см., например, [3]). Исследуется интеграл от этого процесса как функция от времени. Актуальность такого исследования связана с известными задачами математической физики.

К решению поставленной задачи мы применяем так называемый полумарковский метод. Этот метод позволяет получать результаты в терминах полумарковских переходных функций. Применение полумарковских методов всегда предполагает возможность распространить полученные результаты на класс более широкий, чем класс марковских процессов. Это класс так называемых полумарковских процессов общего вида и, в частности, класс полумарковских диффузионных процессов (см., например, [2]),

Постановка задачи

Полумарковский процесс общего вида. Рассмотрим измеримое пространство элементарных событий $\mathcal{D}$, где любое $\xi \in \mathcal{D}$ представляет собой непрерывную справа в любой точке $t \geqslant 0$ и имеющую предел слева в любой точке $t > 0$ функцию типа $[0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$. Предположим, что на множестве $\mathcal{D}$ задана метрика Скорохода и определена борелевская сигма-алгебра подмножеств $\mathcal{F}$. Вероятностная мера P на этой

Ключевые слова: одномерные процессы, диффузионный марковский процесс, полумарковский процесс диффузионного типа, переходные полумарковские функции, недостижимые границы интервала, интеграл от процесса как функция от времени.

сигма-алгебре интерпретируется как распределение некоторого одномерного случайного процесса. Пусть $x \in \mathbb{R}$ и P_x – мера множества всех $\xi \in \mathcal{D}$, для которых $\xi(0) = x$. Семейство мер (P_x) $(x \in \mathbb{R})$ называется распределением случайного процесса, заданного с точностью до начального состояния. Для марковских и полумарковских процессов элементы этого семейства удовлетворяют некоторым условиям согласования.

При любом множестве $S \in \mathcal{F}$ вероятности $(P_x(S))$ $(x \in \mathbb{R})$ можно интерпретировать как значения некоторой функции, заданной на $\mathbb{R}$. Мы предполагаем, что эта функция измерима относительно борелевской сигма-алгебры на $\mathbb{R}$. Отсюда следует, что для любой числовой, $\mathcal{F}$-измеримой функции $\phi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ суперпозиция $P_\phi(S)$ также является $\mathcal{F}$-измеримой функцией. Это свойство важно для определения однородного полумарковского свойства семейства мер (P_x). Пусть $X_t : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-измеримая функция, определяемая для любого $\xi \in \mathcal{D}$ как $X_t(\xi) = \xi(t)$. Пусть $\mathcal{F}_t$ – сигма-алгебра, порождённая всеми функциями X_s $(s \leqslant t)$ и $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ – натуральная фильтрация.

Определим стандартным образом марковские моменты относительно натуральной фильтрации и для любого марковского момента τ – сигма-алгебру предшествующих событий $\mathcal{F}_\tau$ на множестве $\{\tau < \infty\}$.

Полумарковским процессом общего вида мы называем случайный процесс, задаваемый с точностью до начального состояния, для которого для любого интервала Δ выполняется условие согласования семейства мер (P_x) этого процесса вида

$$P_x(\theta_\tau^{-1} A \,|\, \mathcal{F}_\tau) = P_{X_\tau}(A)$$

на множестве $\{\tau < \infty\}$ P_x-почти наверное, где $\tau \equiv \sigma_\Delta$ – момент первого выхода из открытого множества Δ, $A \in \mathcal{F} \cap \{\tau < \infty\}$ и θ_t – оператор сдвига на пространстве функций $\mathcal{D}$. Это определение можно переписать в более конструктивном виде: для любых $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}_\tau$ справедливо

$$P_x(\theta_\tau^{-1} A, B \cap \{\tau < \infty\}) = E_x(P_{X_\tau}(A);\, B \cap \{\tau < \infty\}),$$

где $E_x(f; B_1)$ – интеграл от функции f по мере P_x на множестве B_1.

Класс полумарковским процессов общего вида включает в себя все ступенчатые полумарковские процессы, а также – все непрерывные полумарковские процессы (т.е. полумарковские процессы, траектории которых непрерывны).

Переходные функции диффузионного полумарковского процесса. Полумарковской переходной функцией любого одномерного однородного во времени случайного процесса $X(t)$ с семейством мер (P_x) называется функция

$$Y_\Delta(T \times S \,|\, x) \equiv P_x(\sigma_\Delta \in T,\, X(\sigma_\Delta) \in S),$$

где Δ – интервал, $x \in \Delta$, T – некоторое подмножество положительной полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty)$, S – некоторое подмножество значений процесса. Определим также

$$Y_\Delta(T \times S \,|\, x) = I_{T\times S}(0,x),$$

если $x \notin \Delta$. Это значит, что $Y_\Delta(T \times S \,|\, x) = 1$, если $0 \in T$ и $x \in S$, и равно 0 в противном случае. Полумарковское условие согласования семейства таких функций связано с очевидным соотношением между моментами первого выхода из интервалов: для любых интервалов Δ_1, Δ_2, где $\Delta_1 \subset \Delta_2$ на множестве $\{\xi : \sigma_{\Delta_1}\xi < \infty\}$, справедливо

$$\sigma_{\Delta_2} = \sigma_{\Delta_1} + \sigma_{\Delta_2} \circ \theta_{\sigma_{\Delta_1}}.$$

Это условие согласования состоит в том, что в терминах предыдущих интервалов выполняется соотношение

$$Y_{\Delta_2}([0,t) \times S \,|\, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\Delta_1} Y_{\Delta_1}(ds \times dy \,|\, x)\, Y_{\Delta_2}([0,t-s) \times S \,|\, y). \qquad (1)$$

В работе [2] доказано, что априори заданное согласованное семейство вероятностных ядер $Y_\Delta(T \times S \,|\, x)$ определяет согласованное семейство вероятностных мер некоторого полумарковского процесса с траекториями, непрерывными справа при $t \geqslant 0$ и имеющими предел слева в любой точке $t > 0$. Условие P_x-п.н. непрерывности траекторий построенного процесса очень просто: для любого $\Delta \equiv (a,b)$ и $x \in \Delta$ выполняется

$$Y_\Delta(T \times \{a,b\}, \,|\, x) = Y_\Delta(T \times \mathbb{R} \,|\, x).$$

Мы считаем, что семейство полумарковских переходных ядер определено, если определено семейство их преобразований Лапласа (L_Δ) по первому аргументу: для любого $\lambda \geqslant 0$

$$L_\Delta(\lambda,\, S \,|\, x) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t} Y_\Delta(dt \times S \,|\, x).$$

Согласно формуле (1), условие согласования этих ядер имеет вид

$$L_{\Delta_2}(\lambda, S\,|\,x) = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\Delta_1} L_{\Delta_1}(\lambda, dy\,|\,x)\, L_{\Delta_2}(\lambda, S\,|\,y), \tag{2}$$

а также

$$L_{\Delta}(\lambda, S\,|\,x) = I_S(x),$$

если $x \notin \Delta$.

Преобразование Лапласа от полумарковских переходных функций. Определение диффузионного полумарковского процесса проще всего формулировать в терминах преобразования Лапласа от полумарковских переходных функций по первому аргументу. Пусть $X(t)$ $(t \geqslant 0)$ – полумарковский процесс с непрерывными траекториями и с согласованным семейством мер (P_x) $(x \in (a,b))$. Для $\Delta = (a,b)$ определим

$$g_{\Delta}(\lambda\,|\,x) = E_x(e^{-\lambda\sigma_\Delta};\, \sigma_\Delta < \infty,\, X(\sigma_\Delta) = a),$$
$$h_{\Delta}(\lambda\,|\,x) = E_x(e^{-\lambda\sigma_\Delta};\, \sigma_\Delta < \infty,\, X(\sigma_\Delta) = b).$$

Пусть $\Delta_1 = (\alpha_1, \beta_1)$, $\Delta_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ и $\Delta_1 \subset \Delta_2$. Согласно (2), справедливо

$$g_{\Delta_2}(\lambda\,|\,x) = g_{\Delta_1}(\lambda\,|\,x) g_{\Delta_2}(\lambda, \alpha_1) + h_{\Delta_1}(\lambda\,|\,x) g_{\Delta_2}(\lambda, \beta_1), \tag{3}$$

$$h_{\Delta_2}(\lambda\,|\,x) = g_{\Delta_1}(\lambda\,|\,x) h_{\Delta_2}(\lambda, \alpha_1) + h_{\Delta_1}(\lambda\,|\,x) h_{\Delta_2}(\lambda, \beta_1), \tag{4}$$

Непрерывный полумарковский процесс называется диффузионным в окрестности точки x, если существуют функции $A(x)$ и $B(\lambda\,|\,x)$, такие что

$$g_{(x-r,x+r)}(\lambda\,|\,x) = \frac{1}{2}(1 - A(x)r - B(\lambda\,|\,x)r^2) + o(r^2), \tag{5}$$

$$h_{(x-r,x+r)}(\lambda\,|\,x) = \frac{1}{2}(1 + A(x)r - B(\lambda\,|\,x)r^2) + o(r^2) \tag{6}$$

при $r \to 0$, где $A(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки x, $B(\lambda\,|\,x)$ положительна, непрерывна по второму аргументу в окрестности точки x, не убывает и имеет вполне монотонную частную производную по первому аргументу. Обоснованность этого определения и, в частности, свойства коэффициента $A(x)$, который не зависит от λ, вытекает из свойств преобразования Лапласа (см. [2], с. 159–163).

Если условие диффузионности выполняется для любой точки открытого интервала (a,b) при некоторых допустимых функциях $A(x)$, $B(\lambda\,|\,x)$ $(x \in (a,b), \lambda \geqslant 0)$, то дважды дифференцируемые функции

$g_{(a,b)}(\lambda\,|\,x)$, $h_{(a,b)}(\lambda\,|\,x)$ удовлетворяют на этом интервале дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}f'' + A(x)f' - B(\lambda\,|\,x)f = 0 \tag{7}$$

с краевыми значениями

$$g_{(a,b)}(\lambda\,|\,a) = h_{(a,b)}(\lambda\,|\,b) = 1, \quad g_{(a,b)}(\lambda\,|\,b) = h_{(a,b)}(\lambda\,|\,a) = 0.$$

Значения функций на концах интервала понимаются как пределы соответствующих значений на последовательностях внутренних точек интервала.

Для марковского диффузионного процесса функция $B(\lambda\,|\,x)$ линейна по параметру λ и, если это процесс без обрыва, то $B(\lambda\,|\,x) = \lambda$. В этом случае процесс удовлетворяет уравнению (7), у которого коэффициент $A(x)$ равен отношению $a(x)/b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ – колмогоровские коэффициенты локального сдвига и локальной дисперсии.

В работе [3] получены необходимые и достаточные условия для недостижимости границ в терминах коэффициентов дифференциального уравнения. Если процесс является процессом без обрыва, то условия недостижимости определены в терминах одного только коэффициента $A(x)$. Коэффициент $B(\lambda\,|\,x)$ играет роль при вычислении моментов распределения времени первого выхода из интервала, для которого хотя бы одна граница является достижимой.

Траектории диффузионного полумарковского процесса. В работе [2] доказано, что множество аргументов траектории диффузионного полумарковского процесса состоит из подмножества, на котором происходит изменение состояния, и из интервалов постоянства. Очевидно, что относительно любой точки из интервала постоянства не выполняется марковское свойство полумарковского процесса, и значит время первого выхода из любого открытого множества интервала значений процесса не принадлежит интервалу постоянства. С другой стороны, любая точка из множества изменения состояния может рассматриваться как момент первого выхода из некоторого открытого множества значений процесса или как итерация таких моментов.

В дальнейшем мы предполагаем, что $X(0) = 0$ и точка 0 области задания процесса не принадлежит интервалу постоянства значений процесса. Это означает, что для любого $\delta > 0$ траектория $X(t)$ не постоянна на интервале $[0,\delta)$ почти наверное относительно меры P_0.

Далее будет определено возрастающее семейство (T_n) $(n = 1, 2, 3\ldots)$ точек на оси времени, для которых $X(T_n) = 0$. При этом относительно T_1 выполняется марковское свойство процесса $X(t)$ (и поэтому эти точки являются моментами регенерации этого процесса). Эти же моменты являются моментами марковской регенерации для процесса $J(t) \equiv \int\limits_0^t X(s)\,ds$ $(t \geqslant 0)$ (выполняется марковское свойство для этого процесса, но значения этого процесса в точках T_n не одинаковы). Как будет следовать из построения, такое семейство (T_n) не единственно.

Построение семейства точек регенерации процесса $X(t)$

Рассмотрим время первого выхода процесса $X(t)$ из интервала $(-\epsilon,\epsilon)$, где $0 < \epsilon < c$. Из непрерывности процесса следует, что $X(\sigma_{(-\epsilon,\,\epsilon)})$ принадлежит границе этого интервала.

Пусть $X(\sigma_{(-\epsilon,\,\epsilon)}) = \epsilon$. После этого момента первого выхода рассмотрим время первого выхода из интервала $(0, c)$ через достижимую границу 0. Отсюда следует, что значение процесса в момент первого выхода из интервала $(0, c)$ равно нулю.

Пусть $X(\sigma_{(-\epsilon,\,\epsilon)}) = -\epsilon$. В этом случае нас интересует момент первого выхода из интервала $(-c, 0)$, который равен моменту первого достижения точки 0. Обозначим χ_b момент первого достижения точки $b \in (-c, c)$. Для данного ϵ мы рассмотрим марковский момент

$$\eta_1 \equiv \sigma_{(-\epsilon,\,\epsilon)} + \chi_0 \circ \theta_{\sigma_{(-\epsilon,\,\epsilon)}}.$$

Для диффузионного полумарковского процесса этот момент является моментом регенерации процесса $X(t)$. Он же является моментом марковской регенерации для процесса $J(t)$ (в этот момент значение процесса $J(t)$ вообще говоря не равно нулю).

Определим $T_1 = \eta_1$. Из условия регенерации следующий момент η_2 строится аналогичным образом для сдвинутого процесса $X(T_1 + t)$ $(t \geqslant 0)$. При этом η_1 и η_2 независимы и одинаково распределены. Точка $T_2 = \eta_1 + \eta_2$ также является моментом регенерации процесса $X(t)$. Из правила регенерации строится последовательность независимых и одинаково распределённых положительных случайных величин (η_n) и соответствующая последовательность (T_n) точек регенерации процесса $X(t)$, где $T_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$.

Пусть $\xi_1 \equiv J(\eta_1)$, ξ_2 – приращение процесса $J(t)$ на интервале (T_1, T_2) и так далее. Из условия регенерации следует независимость и одинаковая распределённость элементов последовательности (ξ_n).

Условие А. В дальнейшем будем предполагать, что существует такое ϵ, что для элементов последовательности (η_n) определены общие для всех математическое ожидание $\mu > 0$ и дисперсия $\sigma_1^2 > 0$. Отсюда следует, что определено общее для всех элементов последовательности (ξ_n) математическое ожидание. Предположим также, что коэффициенты уравнения, которому подчиняются производящие функции процесса $X(t)$, выбраны так, что последнее математическое ожидание равно нулю и существует дисперсия $\sigma_2^2 > 0$ общая для всех элементов последовательности (ξ_n).

Примечание. Из теоремы сравнения, применённой к марковскому диффузионному процессу без обрыва (см. [3]), вытекает справедливость условия А для любого $\epsilon \in (0, c)$, если коэффициент $A(x)$ уравнения (7) выбран "антисимметричным" образом, т.е. $A(x) = -A(-x)$ для любого $x \in (-c, c)$.

Сходимость к винеровской мере

Для процесса восстановления, соответствующего возрастающей последовательности (T_n), определим считающую функцию

$$\nu_t \equiv \max\{k : T_k \leqslant t\}.$$

Из теоремы 17.3 из книги [1] вытекает сходимость по вероятности

$$\frac{\nu_n}{n} \to \frac{1}{\mu} \quad (n \to \infty).$$

Действительно, из условия А следует

$$\frac{1}{\sigma_1 n^{1/2}} \sum_{i=1}^{[nt]} (\eta_t - \mu) \to W_t \quad (n \to \infty),$$

где W_t – винеровский процесс. Отсюда $Z_n(t) \to W_t$, где для любого $t > 0$

$$Z_n(t) \equiv \frac{\nu_{nt} - nt/\mu}{\sigma_1 \mu^{-3/2} n^{1/2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\nu_{nt}/nt - 1/\mu}{\sigma_1 \mu^{-3/2}} \to \frac{1}{n^{1/2} t} W_t \to 0,$$

откуда $\nu_{nt}/nt \to 1/\mu$ и при $t = 1$

$$\nu_n/n \to 1/\mu.$$

Далее из теоремы 17.1 и теоремы Донскера при выполнении условия A вытекает сходимость по распределению

$$\left(\frac{1}{\sigma_2 \nu_n^{1/2}} S_{[\nu_n t]}\right)_{t \geqslant 0} \to (W_t)_{t \geqslant 0} \equiv W,$$

где

$$S_n \equiv \xi_1 + \cdots + \xi_n \equiv \int\limits_0^{T_n} X(s)\, ds.$$

Примечание. В общем случае при любом i пара (ν_i, ξ_i) состоит из зависимых случайных величин. Однако их зависимость не отражается на доказательстве теоремы 17.1, в условие которой входит только, что ν_n при любом n – целочисленная случайная величина, определённая на том же самом вероятностном пространстве, что и ξ_n. Это свойство справедливо для ν_n, определённого в условии теоремы 17.3 из книги Биллингсли.

Список литературы

1. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Москва, Наука (1977).
2. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы.* СПб, Наука (2001).
3. Б. П. Харламов, *О недостижимой границе интервала значений диффузионного процесса: полумарковский подход.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 313–330.

Harlamov B. P. On the integral of diffusion process on an interval with unattainable edges boundaries: semi-Markov approach.

A one-dimension semi-Markov process of diffusion type is considered. A range of values of this process is an open finite interval. It is supposed to have unattainable edges. An integral of this process as a function of time is studied. The invariance principle for this integral is proved.

Институт проблем
машиноведения РАН
E-mail: b.p.harlamov@gmail.com

Поступило 1 ноября 2018 г.