Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

В. Н. Солев

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ В ГАУССОВСКОМ СТАЦИОНАРНОМ ШУМЕ: НОВЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

§1. Постановка задачи

Настоящая работа является продолжением работы [13]. Мы сохраним с понятными изменениями обозначения упомянутой работы, давая лишь краткие пояснения тем выводам, которые следуют непосредственно из результатов этой работы.

Предположим, что на растущем отрезке $[-T,T]$ наблюдается гауссовсий процесс $y(t)$,

$$dy(t) = s(t)\,dt + dx(t), \quad t \in [-T,T]. \tag{1}$$

Здесь $s(t)$ – неизвестная функция, лежащая в заданном выпуклом, центрально-симметричном подмножестве $\mathscr{L}_*$ банахова пространства $\mathscr{L}$ локально квадратично суммируемх функций s, таких что

$$\|s\|^2_{\mathscr{L}} = \sup_x \int\limits_x^{x+1} |s\,(t)|^2\; dt < \infty; \tag{2}$$

$x(t)$ – гауссовский процесс со стационарными приращениями, с нулевым средним и спектральной плотностью f (см. подробнее в [1,2]). Чтобы избежать терминологической путаницы, напомним, что для процесса со стационарными приращениями x (вообще говоря, не обязательно стационарного процесса) его спектральная плотность f совпадает со спектральной плотностью его производной – обобщенного процесса $\frac{d}{dt}\,x$, являющегося обобщенным стационарным процессом. При этом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u))}{1+u^2}\,du < \infty. \tag{3}$$

Ключевые слова: псевдопериодическая функция, непараметрическая оценка, процесс со стационарными приращениями.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00828, и программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Пусть $\widehat{s}_T$ – оценка неизвестной функции s, построенная по наблюдениям (1), $\widehat{s}_T \in \mathscr{L}_*$. Риск от использования оценки $\widehat{s}_T$ будем измерять величиной

$$\mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*\right) = \sup_{s \in \mathscr{L}_*} \mathbf{E}_{s,f} \, \|\widehat{s}_T - s\|^2_{\mathscr{L}} \,. \tag{4}$$

Обозначим $\mathscr{R}^*_T$ – минимаксный риск,

$$\mathscr{R}^*_T(\mathscr{L}_*) = \inf_{\widehat{s}_T} \mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T\right). \tag{5}$$

Задача состоит в поиске оценки $\widehat{s}_T$, имеющей тот же порядок малости величины $\mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*\right)$ при $T \to \infty$, что и минимаксный риск,

$$\mathscr{R}^*_T \leqslant \mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T\right) \leqslant C\,\mathscr{R}^*_T. \tag{6}$$

На протяжении всей работы мы будем иметь дело со случайными величинами

$$x\left[\varphi\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, dx(t),$$

определенными, например, для линейного множества S функций φ, удовлетворяющих условию

$$\varphi \in L^2, \quad |\widehat{\varphi}(u)|^2 \leqslant \frac{C(\varphi)}{1+u^2}, \quad \text{где} \;\; \widehat{\varphi}(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}\varphi(t)\, dt. \tag{7}$$

При этом

$$\mathbf{E}\, x\big[\psi\big] = 0, \;\; \mathbf{E}\left|x\big[\psi\big]\right|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\psi}(u)\right|^2 f(u)\, du < \infty, \;\; \psi \in S. \tag{8}$$

В силу модели (1) наблюдению доступны случайные величины

$$y[\varphi] = s[\varphi] + x[\varphi], \quad \varphi \in \mathscr{D}(T) = \{\varphi: \; \varphi \in S \;\, \operatorname{supp}\varphi \subset \,[-T, T]\}\,. \tag{9}$$

Здесь

$$y[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, dy(t), \quad s[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\overline{\varphi(t)}\, dt,$$

§2. Выбор параметрического множества $\mathscr{L}_*$

Пусть Λ – счетное множество в R^1, удовлетворяющее условию отделимости

$$\tau = \tau\,(\Lambda) = \inf_{\substack{u,v\in\Lambda,\\ u\neq v}} |u-v| > 0. \tag{10}$$

Обозначим $\mathscr{L}(\Lambda)$ введенный Степановым (смотри подробнее [5]) класс псевдо-периодических функций s,

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}, \quad \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 < \infty. \tag{11}$$

В [5] установлено, что $\mathscr{L}(\Lambda)$ – замкнутое подпространство банахова пространства $\mathscr{L}$. Наряду с банаховой нормой $\|s\|_{\mathscr{L}}$, определенной в (2), будем также рассматривать на $\mathscr{L}(\Lambda)$ гильбертовы нормы

$$\|s\|_* := \left\{\sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2\right\}^{1/2}, \quad \text{и} \quad \|s\|_{T} := \left\{\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} |s(t)|^2\,dt\right\}^{1/2}.$$

Как установлено в [6] при условии отделимости найдутся такие константы $0 < c_1$, $C_1 < \infty$ и $0 < c_2$, $C_2 < \infty$, что при $s \in \mathscr{L}(\Lambda)$

$$c_1\, \|s\|_* \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant C_1\, \|s\|_*\,, \tag{12}$$

и при достаточно большом $T > T_0$

$$c_2\, \|s\|_{T} \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant C_2\, \|s\|_{T}\,. \tag{13}$$

При этом величины c_1, c_2, C_1, C_2, T_0 зависят только от τ.

Очевидно, из условия (10) следует, что при $\beta > 0$ найдутся такие константы D и $m_0 > 0$, что для любого $m > m_0 > 0$

$$\sum_{\substack{u:\, u\in\Lambda,\\ |u|\leqslant m}} (1+|u|)^{2\beta} \leqslant D\, m^{2\beta+1}. \tag{14}$$

Мы будем предполагать, что точек из Λ в следующем смысле достаточно много на любом отрезке $[-m, m]$, если m достаточно велико: найдутся такие константа $d > 0$ и $m_0 > 0$, что для любого $m > m_0$

$$d\, m^{2\beta+1} \leqslant \sum_{\substack{u:\, u\in\Lambda,\\ |u|\leqslant m}} (1+|u|)^{2\beta}. \tag{15}$$

Обозначим $N(m)$ – число точек из Λ, содержащихся в отрезке $[-m, m]$. Ясно, что при условии (10)

$$\tau\,(N(m) - 1) \leqslant 2m. \tag{16}$$

Нам потребуется также оценка снизу для величины $N(m)$, справедливая при для достаточно больших m.

Лемма 2.1. *При условиях* (10) *и* (15) *найдутся такие константы* $0 < c \leqslant C$ *и* $m_0 > 0$, *что при* $m > m_0$

$$cm \leqslant N(m) \leqslant Cm. \tag{17}$$

Доказательство. Заметим, что по неравенству Коши и (14)

$$\sum_{\substack{u:\, u\in\Lambda,\\ |u|\leqslant m}} (1 + |u|)^{2\beta} \leqslant N(m)^{1/2}\left(B\, m^{4\beta+1}\right)^{1/2},$$

а по неравенству (15)

$$b\, m^{2\beta+1} \leqslant \sum_{\substack{u:\, u\in\Lambda,\\ |u|\leqslant m}} (1 + |u|)^{2\beta}.$$

Отсюда следует, что $cm \leqslant N(m)$ при подходящей константе $c > 0$. Верхняя оценка в (17) для $N(m)$ следует из (16), если $m > m_0$ и m_0 достаточно велико. □

В дальнейшем, когда нет сомнения в том, что суммирование производится по точкам $u \in \Lambda$, для краткости написания мы указание на это будем опускать.

Интересующее нас параметрическое множество $\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\beta, L)$ выделяется из функционального класса $\mathscr{L}(\Lambda)$ условием

$$\sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 (|u| + 1)^{2\beta} \leqslant L. \tag{18}$$

Пусть $\tau(u)$ – неотрицательная функция на Λ, такая что

$$\sum_{u\in\Lambda} |\tau(u)|^2 (|u| + 1)^{2\beta} \leqslant L. \tag{19}$$

По функции τ, удовлетворяющей (19), построим прямоугольник $\mathscr{L}_*^\tau$,

$$\mathscr{L}_*^\tau = \Big\{ s : \, s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut},\ |a(u)| \leqslant \tau(u) \Big\}. \tag{20}$$

Очевидно, что $\mathscr{L}_*^\tau \subset \mathscr{L}_*$. Поэтому нижние границы для величины минимаксного риска $\mathscr{R}_T(\mathscr{L}_*)$ могут быть получены при исследовании минимаксного риска $\mathscr{R}_T(\mathscr{L}_*^\tau)$.

§3. Класс $\mathscr{K}$ спектральных плотностей

Мы будем использовать для неотрицательных функций g при $\varepsilon > 0$ усредненные значения $g_\varepsilon(u)$ в точке u, вычисленные по ядру Пуассона

$$g_\varepsilon(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\pi\left((u-x)^2+\varepsilon^2\right)}\, g(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\,(y^2+1)}\, g(u+\varepsilon y)\, dy.$$

Для того, чтобы величина $g_\varepsilon(u)$ была конечной, необходимо, чтобы

$$\int\limits_{\infty}^{\infty} \frac{g(u)}{1+u^2}\, du < \infty.$$

Сначала мы будем предполагать, что спектральная плотность f удовлетворяет следующему локальному аналогу условию Маккенхаупта (см. подробнее в [7] и [13]):

$$\lambda(f) := \sup_{\substack{\varepsilon>0,\\ u\in\Lambda}} f_\varepsilon(u) \left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon (u) < \infty. \tag{21}$$

Стало быть, мы заранее предполагаем, что

$$\int\limits_{\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{1+u^2}\, du < \infty, \quad \int\limits_{\infty}^{\infty} \frac{1}{f(u)\,(1+u^2)}\, du < \infty.$$

Правильность поведения средних $f_\varepsilon(u)$ при $u \to \infty$ будет определено следующим условием: для некоторых $\alpha > -1$, $\beta > 1$, неотрицательных $b \leqslant B$ при достаточно больших m, $m > m_0$, и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$b\,\varepsilon^\alpha \leqslant \frac{1}{N(m)} \sum_{|u|\leqslant m} f_\varepsilon(u) \leqslant B\,\varepsilon^\alpha. \tag{22}$$

В дальнейшем нам будет интересен случай, когда положительное m и $\varepsilon > 0$ связаны соотношением

$$\varepsilon^{1+\alpha}\,(1+m)^{2\beta+1} = 1. \tag{23}$$

Лемма 3.1. *При условиях* (10), (22) *и* (23) *найдутся такие константы* $D_1 < \infty$ *и* $m_0 > 0$, *что при* $m > m_0$ *и* $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon \sum_{|u| \leqslant m} f_\varepsilon(u)\,(1+|u|)^{2\beta} \leqslant D_1. \tag{24}$$

Доказательство. Из (22) и (17) следует, что

$$\sum_{|u| \leqslant m} f_\varepsilon(u)\,(1+|u|)^{2\beta} \leqslant 2^{2\beta}\, m^{2\beta}\, \frac{Cm}{N(m)} \sum_{|u| \leqslant m} f_\varepsilon \leqslant C 2^{2\beta} B \varepsilon^\alpha m^{2\beta+1}.$$

Остается обратиться к (23). □

Мы будем обозначать через $\mathscr{K} = \mathscr{K}(K; \alpha, b, B)$ класс спектральных плотностей f, удовлетворяющих условию (22) и следующему условию

$$\lambda(f) = \sup_{\substack{\varepsilon > 0,\\ u \in \Lambda}} f_\varepsilon(u) \left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon (u) \leqslant K < \infty. \tag{25}$$

§4. Переход к дискретной модели

Стандартный прием, использованный, в частности, в [13], заключается в переходе от модели (1) к дискретной модели. Пусть

$$Y(u) = \theta(u) + X(u), \ u \in \Lambda, \tag{26}$$

где $Y(u) = y\big[g_u^T\big],\ \theta(u) = s\big[g_u^T\big],\ X(u) = x\big[g_u^T\big]$, при подходящем выборе системы функций $\{g_u^T,\ u \in \Lambda\}$ из $\mathscr{D}(T)$. Отметим, что $(X(u),\ u \in \Lambda)$ – гауссовский вектор с нулевым средним. Будем обозначать

$$\sigma^2(u) := \mathbf{E}\, X^2(u).$$

Разумеется, величина $\sigma^2(u) = \sigma^2(u, T)$ зависит от T.

Примем обозначение L_T^2 для L^2-пространства на отрезке $[-T, T]$, построенного по нормированной мере Лебега, со скалярным произведением $(s_1, s_2)_T$ и нормой $\|s\|_T^2 = (s, s)_T$.

Продолжим функции из L_T^2 на всю числовую ось, полагая их равными нулю вне отрезка $[-T, T]$. Обозначим $\varphi_u(T; t) = \mathbf{1}_{[-T,T]}(t)\, e^{iut}$. Пусть $r > T_0$ и $\{\psi_u^r,\ u \in \Lambda\}$ – система из $\mathscr{L}_r(\Lambda)$, сопряженная (в метрике пространства L_r^2) к системе $\{\varphi_u(r; \cdot),\ u \in \Lambda\}$:

$$\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \varphi_u(r; t)\, \overline{\psi_v^r(t)}\, dt = \delta_{u,v}.$$

При фиксированном $r > T_0(\tau)$ определим новую систему $\{g_u^T,\ u \in \Lambda\}$ соотношением

$$g_u^T(t) = \frac{T}{2r(T-r)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_u^r(t-s)\, \varphi_u(T-r; s)\, ds, \quad T > r. \qquad (27)$$

Подробнее о свойствах системы $\{g_u^T,\ u \in \Lambda\}$ см. в [13]. Для нас важно будет знать, что (это установлено в [13]) для функции $s(t) = \sum\limits_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{it}$, лежащей в $\mathscr{L}(\Lambda)$, величина $s\big[g_u^T\big] = a(u)$. Там же установлено, что при условии (25) найдутся такие константы $0 < c(\tau, r, K) \leqslant C(\tau, r, K) < \infty$, что при $\varepsilon = 1/T$ справедливы оценки

$$c(\tau, r, K)\, \varepsilon\, [f]_\varepsilon\, (u) \leqslant \mathbf{E}\, X^2(u) \leqslant C(\tau, r, K)\, \varepsilon\, [f]_\varepsilon\, (u). \qquad (28)$$

Рассмотрим задачу оценивания неизвестного вектора

$$\theta = (\theta(u), u \in \Lambda)\,,$$

лежащего в образе Θ подмножества $\mathscr{L}_*$ при отображении $s \to \theta$, по наблюдениям (26). Очевидно, что

$$\Theta = \big\{\theta : \sum_{u\in\Lambda} |\theta(u)|^2 (1 + |u|)^{2\beta} \leqslant L\big\}.$$

Положим $\|\theta\| = \sum\limits_{u\in\Lambda} |\theta_u|^2$, $\sigma = \big(\sigma^2(u),\ u \in \Lambda\big)$. Для оценки $\widehat{\theta}_T$ со значениями из Θ, построенной по наблюдениям (26), обозначим

$$R_T\big(\sigma, \widehat{\theta}_T; \Theta\big) = \sup_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\big\|\theta - \widehat{\theta}_T\big\|^2,\ R_T^*\big(\sigma; \Theta\big) = \inf_{\widehat{\theta}_T} R_T\big(\sigma, \widehat{\theta}; \Theta\big).$$

Эта задача подробно исследована (см., например [4,10]) в случае, когда $\{X(u),\ u \in \Lambda\}$ – независимые гауссовские величины, а Θ – выпуклое, центрально-симметричное подмножество пространства l_2.

Возможность перехода к зависимым величинам $\{X(u),\ u \in \Lambda\}$ дается следующей леммой, принадлежащей С. В. Решетову (см. [9, 10]).

Лемма 4.1. *Пусть $(X(u),\ u \in \Lambda)$ – гауссовский вектор с нулевым средним, Θ – выпуклое, центрально-симметричное подмножество l_2. Предположим также, что существует такая константа $c > 0$, что для любого конечного набора $\{b(v),\ v \in \Lambda\}$*

$$\mathbf{E}\, |X(u) - \sum_{v\neq u} b(v) X(v)|^2 \geqslant c\, \mathbf{E}|X(u|^2. \qquad (29)$$

Тогда найдется такая константы $C_1(c) > 0$, зависящиая только от c, что для любой неотрицательной функции $(\tau(u),\ u \in \Lambda) \in \Theta$

$$C_1(c) \sum_{u\in\Lambda} \tau(u)^2 \wedge \sigma(u)^2 \leqslant R_T^*\big(\sigma;\Theta\big). \tag{30}$$

В работе [13] доказано, что если спектральная плотность f удовлетворяет условию $\lambda(f) \leqslant K < \infty$, то неравенство (29) выполнено с конечным $c = c(K)$. Там же установлено, что при условии $\tau = \tau(\Lambda) > 0$ найдутся такие константы $0 < c \leqslant C \leqslant \infty$ и величина $T_0 > 0$, зависящие только от τ, что при $T > T_0$

$$c\,\mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T;\mathscr{L}_*\right) \leqslant R_T\big(\sigma,\widehat{\theta}_T;\Theta\big) \leqslant C\,\mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T;\mathscr{L}_*\right). \tag{31}$$

Здесь оценка $\widehat{s}_T$ связана с оценкой $\widehat{\theta}_T = (\widehat{\theta}_T(u),\ u \in \Lambda)$ соотношением

$$\widehat{s}_T(t) = \sum_{u\in\Lambda} \widehat{\theta}_T(u)\, e^{iut}. \tag{32}$$

Из (31) следует, что

$$c\,\mathscr{R}_T^*\left(\mathscr{L}_*\right) \leqslant R_T^*\big(\sigma,\Theta\big) \leqslant C\,\mathscr{R}_T^*\left(\mathscr{L}_*\right). \tag{33}$$

Пусть $\alpha > -1$, $\beta > 1$, величина $\varepsilon = 1/T$ и связана с неотрицательным m соотношением

$$m^{1+2\beta}\,\varepsilon^{1+\alpha} = 1.$$

Координаты $\widehat{\theta}_T(u)$ вектора $\widehat{\theta}_T$ будем выбирать следующим образом:

$$\widehat{\theta}_T(u) = y\big[g_u^T\big],\ \text{если } |u| \leqslant m; \quad \widehat{\theta}_T(u) = 0,\ \text{если } |u| > m. \tag{34}$$

§5. Оценка снизу величины $\mathscr{R}_T^*\big(\mathscr{L}_*\big)$

Мы предположим, что спектральная плотность $f \in \mathscr{K}(K;\alpha,b,B)$ (см. (25)) при $\alpha > -1$. Параметрическое множество $\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\beta,L)$ при некоторых $\beta > 1$, $L > 0$ (см. (18)). Относительно спектрального множества Λ мы предположим, что $\tau(\Lambda) > 0$ и выполнено условие (15). При описанных условиях мы планируем при подходящим образом выбранных $c > 0$, $T_0 > 0$ и $m_0 > 0$ получить оценку

$$\mathscr{R}_T^*\big(\mathscr{L}_*\big) \geqslant c\,T^{-\frac{2\beta\,(1+\alpha)}{1+2\beta}}. \tag{35}$$

В силу неравенств (33) для этого достаточно (может быть при другой константе c) получить такую же оценку для $R_T^*\big(\sigma,\Theta\big)$.

При $T > T_0$ возьмем $\varepsilon = 1/T$ и положительное m, выбрав его исходя из соотношения $m^{1+2\beta}\varepsilon^{1+\alpha} = 1$. Неотрицательную функцию $\tau(u)$ определим на Λ следующим образом:

$$\tau^2(u) = \frac{L\,\sigma^2(u)}{\sum\limits_{|u|\leqslant m} \sigma^2(u)(1+|u|)^{2\beta}}, \text{ если } |u| \leqslant m; \quad \tau(u) = 0, \text{ если } |u| > m. \tag{36}$$

Очевидно, что

$$\tau \in \Theta = \Big\{\theta : \sum_{u\in\Lambda} |\theta(u)|^2(1+|u|)^{2\beta} \leqslant L\Big\}.$$

Из соотношения $\sigma^2(u) = \mathbf{E}\,X^2(u)$ и неравенств (28) и (24) следует, что при некотором $c_1 > 0$ величина $\tau^2(u) \wedge \sigma^(u) > c_1\varepsilon\, f_\varepsilon(u)$ при $|u| \leqslant m$. Отсюда и из (30) и (22) мы выводим, что некоторых $c_2, c_3 > 0$

$$R^*_T\big(\sigma,\Theta\big) \geqslant c_2\varepsilon \sum_{|u|\leqslant m} f_\varepsilon(u) \geqslant c_3\, N(m)\, \varepsilon^{1+\alpha}.$$

Теперь воспользуемся неравенством (17) и равенством $m^{1+2\beta}\varepsilon^{1+\alpha} = 1$. Получаем при подходящем $C > 0$

$$R^*_T\big(\sigma,\Theta\big) \geqslant C\, m\varepsilon^{1+\alpha} = C\,\varepsilon^{\frac{2\beta(1+\alpha)}{2\beta+1}} = C\,T^{-\frac{2\beta\,(1+\alpha)}{1+2\beta}}.$$

Отсюда, как уже отмечалось, следует (35) с подходящей константой $c > 0$.

§6. Оценка сверху величины $R_T\big(\sigma,\widehat{\theta}_T;\Theta\big)$

Мы сохраним предположения и обозначения предыдущего пункта. Пусть $\theta_T = (\theta_T(u),\, u\in\Lambda)$, а $\widehat{\theta}_T = (\widehat{\theta}_T(u),\, u\in\Lambda)$ – оценка, описанная в (34):

$$\widehat{\theta}_T(u) = y\big[g_u^T\big], \text{ если } |u| \leqslant m; \quad \widehat{\theta}_T(u) = 0, \text{ если } |u| > m.$$

Мы выберем величину m, исходя из соотношения

$$m^{2\beta+1}\varepsilon^{1+\alpha} = 1. \tag{37}$$

Заметим, что

$$\widehat{\theta}_T(u) = \theta_T(u) + X(u), \quad u\in\Lambda, \tag{38}$$

где $(X(u),\ u\in\Lambda)$ – гауссовский вектор,

$$\mathbf{E}\,X(u) = 0, \quad \mathbf{E}\,X^2(u) = \sigma^2(u), \quad u\in\Lambda.$$

Так как $\theta_T \in \Theta$, то

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|\theta_T - \widehat{\theta}_T\right\|^2 &= \sum_{|u|\leqslant m} \mathbf{E}\, X^2(u) + \sum_{|u|>m} |\theta_T(u)|^2 \\
&\leqslant \sum_{|u|\leqslant m} \mathbf{E}\, X^2(u) + m^{-2\beta} \sum_{|u|>m} |\theta_T(u)|^2 \,(1+|u|)^{2\beta} \\
&\leqslant \sum_{|u|\leqslant m} \mathbf{E}\, X^2(u) + L m^{-2\beta}.
\end{aligned}$$

Далее, из (37) следует, что

$$m^{-2\beta} = T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{1+2\beta}},$$

а из (28), (22) и (17) следует, что при некотором $c < \infty$

$$\sum_{|u|\leqslant m} \mathbf{E}\, X^2(u) \leqslant c\,\varepsilon^{1+\alpha}\, m = C\, T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{1+2\beta}}.$$

Поэтому найдется такая константа $C < \infty$, что

$$R_T\big(\sigma, \widehat{\theta}_T; \Theta\big) \leqslant C T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{1+2\beta}}.$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме, в которой через $\widehat{s}_T$ обозначена оценка, определенная в (32) и (34). При этом предполагается, что $m^{2\beta+1}\varepsilon^{1+\alpha} = 1$, $\varepsilon = 1/T$.

Теорема 6.1. *Предположим, что спектральная плотность $f \in \mathscr{K}(K;\alpha,b,B)$ при $\alpha > -1$, параметрическое множество $\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\beta, L)$ при некоторых $\beta > 1, L > 0$, величина $T > T_0$. Относительно спектрального множества Λ мы предположим, что $\tau(\Lambda) > 0$ и выполнено условие* (15). *Тогда найдутся такие $0 \leqslant c \leqslant C < \infty$ и $T_0 > 0$, зависящие от величин $\alpha, \beta, K, d, D, b, B, \tau$, что*

$$c\, T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{1+2\beta}} \leqslant \mathscr{R}^*_T\big(\mathscr{L}_*\big) \leqslant \mathscr{R}_T\big(\widehat{s}_T, \mathscr{L}_*\big) \leqslant T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{1+2\beta}}.$$

Список литературы

1. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы.* Мир, М., 1963.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы.* Мир, М., 1974.
3. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *О непараметрическом оценивании значения линейного функционала в гауссовском белом шуме.* — Теория вероятн. и ее применен., **29**, No. 1 (1984), 19–32.
4. D. L. Donoho, R. C. Liu , B. MacGibbon, *Minimax Risk Over Hyperrectangles, and Implications.* — Ann. Statist. **18**, No. 3 (1990), 1416–1437.

5. W. Stepanoff, *Sur quelques generalisations des fonctions presque-periodiques.* — Comptes Rendus **181** (1925), 90–92.
6. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости.* Наука, М., 1964.
7. J. B. Garnett, *Bounded analytic functions.* Academic Press, New York, 1981.
8. В. Н. Солев, *Условие локальной асимптотической нормальности для гауссовских стационарных процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 225–247.
9. С. В. Решетов, *Минимаксный риск для квадратично выпуклых множеств.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **368** (2009), 181–189.
10. С. В. Решетов, *Минимаксная оценка псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума.* — Вестник СПбГУ, Серия 1, **2** (2010), 106–115.
11. В. Н. Солев, *Оценка функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума: дискретизация* — Зап. научн. семин. ПОМИ **441** (2015), 286–298.
12. В. Н. Солев, *Адаптивная оценка функции, наблюдаемой на фоне гауссовского стационарного шума* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 261–275.
13. В. Н. Солев, *Локальная версия условия Маккенхаупта и точность оценивания неизвестной псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 261–275.

Solev V. N. An estimation of function in Gaussian stationary noise: new spectral condition.

In the paper, we construct the lower and upper bounds of the minimax risk in the estimation problem, as we observe the unknoun pseudo-periodic function in stationary noise with the spectral density satisfying the new spectral condition.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
С.-Петербург 191023, Россия;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: vnsolev@gmail.com

Поступило 10 ноября 2018 г.