Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

М. В. Платонова, С. В. Цыкин

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПОРЯДКА $\alpha \in \bigcup_{m=3}^{\infty}(m-1,m)$.

§1. Введение

Рассмотрим задачу Коши

$$-i\,\frac{\partial u}{\partial t} = c_\alpha \mathcal{D}^\alpha u, \ \ u(0,x) = \varphi(x), \tag{1}$$

где

$$\alpha \in \bigcup_{m=3}^{\infty}(m-1,m),$$

$\mathcal{D}^\alpha$ – симметричный оператор дробного дифференцирования порядка α, а константа c_α имеет вид

$$c_\alpha = -\frac{1}{\alpha\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}.$$

Оператор $\mathcal{D}^\alpha$ является псевдодифференциальным оператором с символом $\cos(\frac{\pi\alpha}{2})|p|^\alpha$. При $\alpha = 2$ оператор $\mathcal{D}^\alpha$ – это оператор дифференцирования второго порядка, а соответствующая задача Коши (1) отвечает уравнению Шрёдингера.

В работе [6] был предложен метод построения представления вероятностной аппроксимации решения задачи Коши (1) для $\alpha \in (1,2)$. Для построения вероятностной аппроксимации в этой работе использовалось семейство $\xi_\varepsilon(t)$ сложных пуассоновских процессов. При каждом

Ключевые слова: дробные производные, уравнение Шрёдингера, предельные теоремы, пуассоновские точечные поля.

Работа первого автора (лемма 2) выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант No. 14-21-00035. Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (грант 16-01-00443а).

$\varepsilon > 0$ процесс $\xi_\varepsilon(t)$ определялся, как

$$\xi_\varepsilon(t) = \int\limits_{[0,t]\times(\varepsilon,\infty)} x\,\widetilde{\nu}(dt, dx),$$

где ν – пуассоновская случайная мера на $(0,\infty)\times(0,\infty)$ с интенсивностью

$$d\mu = -\frac{dt\,dx}{\Gamma(1-\alpha)x^{1+\alpha}},$$

а $\widetilde{\nu} = \nu - \mathbf{E}\,\nu$ – соответствующая центрированная мера.

Далее, для каждого $\varepsilon > 0$ определялась полугруппа P_ε^t операторов в $L_2(\mathbf{R})$. Каждый такой оператор действовал на $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ по формуле

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \mathbf{E}\left[(P_-\varphi * g_\varepsilon)(x - \sigma\xi_\varepsilon(t)) + (P_+\varphi * g_\varepsilon)(x + \sigma\xi_\varepsilon(t))\right],$$

где $P_\pm$ – проекторы Рисса, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H^2(\mathbf{C}_\pm)$ в верхней и нижней полуплоскостях, $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}(1-\frac{1}{\alpha})}$, а функция g_ε определялась своим преобразованием Фурье

$$\widehat{g_\varepsilon}(p) = \exp\Big(\frac{t\,p^2\varepsilon^{2-\alpha}}{2\,\Gamma(1-\alpha)(2-\alpha)}\Big).$$

В [6] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ полугруппы P_ε^t аппроксимируют в смысле сильной операторной сходимости полугруппу

$$P^t = \exp\big(itc_\alpha\mathcal{D}^\alpha\big)$$

(напомним, что по определению для каждого $t > 0$ оператор P^t переводит начальную функцию φ в решение задачи Коши (1)).

Данная работа обобщает результаты работы [6] на случай произвольного $\alpha \in \bigcup\limits_{m=3}^{\infty}(m-1, m)$.

Отметим еще, что в случае $\alpha = 2$ соответствующая аппроксимация была построена в работах [2, 3].

Авторы выражают благодарность Н. В. Смородиной за внимание к работе и полезные замечания.

§2. Основные обозначения и определения

Прямое преобразование Фурье в настоящей работе определяется как

$$\widehat{\varphi}(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{ipx}\,dx,$$

а, соответственно, обратное преобразование как

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(p) e^{-ipx}\, dp.$$

Через $W_2^k(\mathbf{R})$ обозначим пространство функций Соболева, определенных на $\mathbf{R}$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно ([8, с. 146]). Стандартная норма в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ определяется формулой

$$\|\psi\|_k^2 = \sum_{l=0}^{k} \int\limits_{\mathbf{R}} |\psi^{(l)}(x)|^2\, dx.$$

Нам удобно использовать в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ другую норму, эквивалентную стандартной (см. [8], с. 190),

$$\|\psi\|^2_{W_2^k(\mathbf{R})} = \int\limits_{\mathbf{R}} (1 + |p|^{2k}) |\widehat{\psi}(p)|^2 dp.$$

Оператор A, действующий по правилу

$$(A\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-ipx} A(p) \widehat{\varphi}(p) dp,$$

называется псевдодифференциальным оператором с символом $A(p)$.

Для ограниченного оператора $A : W_2^k(\mathbf{R}) \to W_2^l(\mathbf{R})$ через

$$\|A\|_{W_2^k \to W_2^l}$$

будем обозначать соответствующую операторную норму.

Для $\alpha > 0$ через $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ будем обозначать целую и дробную часть числа α.

Симметричный оператор дробной производной определяется на гладких функциях f формулой (подробнее см. [7])

$$(\mathcal{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y) - f(x) + \sum\limits_{j=1}^{[\alpha]} \frac{(-1)^{j-1} y^j f^{(j)}(x)}{j!}}{|y|^{1+\alpha}}\, dy,$$

где $\alpha \in \bigcup\limits_{m=3}^{\infty} (m-1, m)$. Оператор дробного дифференцирования является псевдодифференциальным оператором. Легко показать, что для преобразования Фурье дробной производной справедливо

$$\widehat{(\mathcal{D}^\alpha \varphi)}(p) = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)|p|^\alpha \widehat{\varphi}(p),$$

то есть оператор $\widehat{\mathcal{D}^\alpha}$ действует как оператор умножения на $\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)|p|^\alpha$.

Через $\mathbf{C}$ обозначим комплексную плоскость, а через $\mathbf{C}_+$ и $\mathbf{C}_-$ – соотвественно верхнюю и нижнюю полуплоскости.

Далее напомним определение классов Харди $H^2(\mathbf{C}_+)$ и $H^2(\mathbf{C}_-)$. Функция F, аналитическая в верхней (нижней) полуплоскости комплексной плоскости принадлежит классу $H^2(\mathbf{C}_+)$ (соответственно, $H^2(\mathbf{C}_-)$), если существует константа C, такая что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dx \leqslant C$$

при всех $y > 0$ ($y < 0$). Хорошо известно (см. [7]), что носитель преобразования Фурье граничного значения функции из $H^2(\mathbf{C}_-)$ лежит на положительной полуоси, а носитель преобразования Фурье граничного значения функции из $H^2(\mathbf{C}_+)$ содержится на отрицательной полуоси. Кроме того, верно и обратное утверждение. Именно, если $\Phi \in L_2(\mathbf{R})$ и $\Phi(p) = 0$ почти всюду при $p \geqslant 0$ ($p \leqslant 0$), то существует функция F из $H^2(\mathbf{C}_+)$ (или $H^2(\mathbf{C}_-)$), для которой $\widehat{F}(p) = \Phi(p)$.

§3. Вероятностная аппроксимация решения задачи Коши

Пусть ν – пуассоновская случайная мера на $(0,\infty)\times(0,\infty)$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(dt,dx) = dt\,\mu(dx),$$

где мера μ имеет вид

$$d\mu(x) = \frac{(-1)^{[\alpha]}dx}{\Gamma(1-\alpha)x^{1+\alpha}}, \quad x > 0.$$

Для $\varepsilon > 0$ определим случайную величину $\xi_\varepsilon(t)$, полагая

$$\xi_\varepsilon(t) = \int\limits_{[0,t]\times(\varepsilon,\infty)} x\,\nu(dt,dx).$$

Рассмотрим проекторы Рисса $P_{\pm}$, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H^2(\mathbf{C}_{\pm})$. Любую функцию $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ представим в виде

$$\varphi(x) = P_+\varphi(x) + P_-\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x),$$

где носитель преобразования Фурье функции φ_+ сосредоточен на отрицательной полуоси, а носитель преобразования Фурье φ_- – на положительной полуоси. Заметим, что $P_+\varphi$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости, а $P_-\varphi$ – аналитическая функция в нижней. Через φ_+ обозначим действие проектора Рисса P_+ на функцию φ, а через φ_- обозначим действие проектора P_- на функцию φ.

Выберем комплексное число

$$\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Заметим, что $\sigma \in \mathbf{C}_+$ и $\operatorname{Re}\sigma > 0$.

Для $\varepsilon > 0$ определим полугруппу операторов P_ε^t, которая действует на $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ как

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \mathbf{E}\big[(\varphi_- * g_\varepsilon)(x - \sigma\xi_\varepsilon(t)) + (\varphi_+ * g_\varepsilon)(x + \sigma\xi_\varepsilon(t))\big], \qquad (2)$$

где функция $g_\varepsilon(x)$ определяется своим преобразованием Фурье: для $m = 2k,\ k \in \mathbf{N}$, формулой

$$\widehat{g_\varepsilon}(p) = \exp\Big(-t\int_\varepsilon^\infty \sum_{j=1}^{m-1}\frac{(i|p|\sigma x)^j}{j!}d\mu(x)\Big)\exp\Big(t\int_0^\varepsilon \frac{(i|p|\sigma x)^m}{m!}d\mu(x)\Big),$$

а для $m = 2k+1$ формулой

$$\widehat{g_\varepsilon}(p) = \exp\Big(-t\int_\varepsilon^\infty \sum_{j=1}^{m-1}\frac{(i|p|\sigma x)^j}{j!}\,d\mu(x)\Big)$$
$$\cdot\exp\Big(t\int_0^\varepsilon\Big(\frac{(i|p|\sigma x)^m}{m!} + \frac{(i|p|\sigma x)^{m+1}}{(m+1)!}\Big)\,d\mu(x)\Big).$$

Покажем, что $\widehat{g_\varepsilon}(p)$ убывает на бесконечности. Для этого заметим, что в случае $m = 2k$ знак вещественной части коэффициента при $|p|^m$ под знаком экспоненты определяется величиной

$$\operatorname{Re}(i\sigma)^{2k} = \cos\left(\frac{\pi k}{\alpha}\right) < 0,$$

а при $m = 2k+1$ знак вещественной части коэффициента при $|p|^{m+1}$ под знаком экспоненты определяется величиной

$$\mathrm{Re}(i\sigma)^{2k+2} = \cos\left(\frac{\pi(k+1)}{\alpha}\right) < 0.$$

Таким образом, $\widehat{g_\varepsilon}(p)$ убывает по p со скоростью $e^{-c_\varepsilon p^m t}$ при $m = 2k$ и со скоростью $e^{-c_\varepsilon p^{m+1} t}$ при $m = 2k+1$, где c_ε – некоторая положительная константа, зависящая от ε.

Заметим, что при каждом фиксированном ε величина, стоящая под знаком математического ожидания в (2), ограничена. Пользуясь теоремой Фубини, получаем

$$\begin{aligned} P_\varepsilon^t\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \widehat{\varphi_+}(p)\widehat{g_\varepsilon}(p)e^{-ipx}\mathbf{E}\,e^{-ip\sigma\xi_\varepsilon(t)}dp \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \widehat{\varphi_-}(p)\widehat{g_\varepsilon}(p)e^{-ipx}\mathbf{E}\,e^{ip\sigma\xi_\varepsilon(t)}dp \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(p)\widehat{g_\varepsilon}(p)e^{-ipx}\mathbf{E}\,e^{i|p|\sigma\xi_\varepsilon(t)}dp. \end{aligned} \tag{3}$$

В силу теоремы Кэмпбелла (см. [5, с. 44]), имеем

$$\mathbf{E}\,e^{i|p|\sigma\xi_\varepsilon(t)} = \exp\left(t\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\left(e^{i|p|\sigma x} - 1\right)d\mu(x)\right).$$

Лемма 1. *Пусть* $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}$. *Тогда*

$$\int\limits_0^\infty\left(e^{i|p|\sigma x} - \sum_{j=0}^{[\alpha]}\frac{(i|p|\sigma x)^j}{j!}\right)d\mu(x) = \frac{-i|p|^\alpha}{\alpha}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $p \geqslant 0$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty \Big(e^{ip\sigma x} - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(ip\sigma x)^j}{j!}\Big) d\mu(x) \\
&= (-1)^{[\alpha]} \int\limits_0^\infty \Big(e^{ip\sigma x} - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(ip\sigma x)^j}{j!}\Big) \frac{dx}{\Gamma(1-\alpha)x^{1+\alpha}} \\
&= (-1)^{[\alpha]} \frac{(ip\sigma)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int\limits_{ip\sigma\varepsilon}^{ip\sigma R} \Big(e^y - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{y^j}{j!}\Big) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Так как $\sigma \in \mathbf{C}_+$, то $\operatorname{Re}\big(ip\sigma R\big) \leqslant 0$, поэтому интеграл

$$
J = \int\limits_\Gamma \Big(e^y - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{y^j}{j!}\Big) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}
$$

по замкнутому контуру Γ (Рис. 1)

$$
\begin{aligned}
\Gamma \;\; = \;\; & \Big\{z \in \mathbf{C} : |z| \in [p\varepsilon, pR],\ \arg z = \frac{\pi}{2}\big(2 - \frac{1}{\alpha}\big)\Big\} \\
\cup \;\; & \Big\{z \in \mathbf{C} : |z| = pR,\ \arg z \in \big[\frac{\pi}{2}\big(2 - \frac{1}{\alpha}\big), \pi\big]\Big\} \\
\cup \;\; & \big\{z \in \mathbf{C} : |z| \in \big[pR, p\varepsilon\big],\ \arg z = \pi\big\} \\
\cup \;\; & \Big\{z \in \mathbf{C} : |z| = p\varepsilon,\ \arg z \in \big[\pi, \frac{\pi}{2}\big(2 - \frac{1}{\alpha}\big)\big]\Big\}
\end{aligned}
$$

равен нулю.

Интегралы по дугам $|z| = |ip\sigma R|$, $|z| = |ip\sigma\varepsilon|$ стремятся к нулю при $R \to \infty, \varepsilon \to 0$, поэтому, переходя к пределу по R, ε, получаем

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty \Big(e^{ip\sigma x} - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(ip\sigma x)^j}{j!}\Big) d\mu \\
&= (-1)^{[\alpha]} \frac{(ip\sigma)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^0 \Big(e^y - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{y^j}{j!}\Big) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \\
&= \frac{(-ip\sigma)^\alpha}{\alpha}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

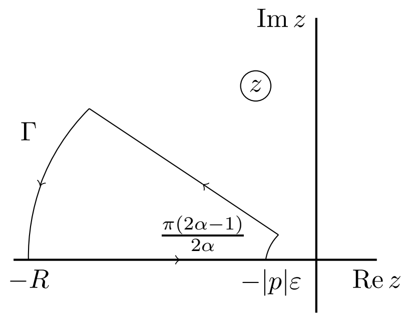

Рис. 1. Контур интегрирования Γ.

Используя выражение (3) для функции $P_\varepsilon^t\varphi(x)$ и лемму 3, получаем

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(p)e^{-ipx}\exp\Big(-\frac{i|p|^\alpha}{\alpha}t\Big)\delta_\varepsilon^t(p)\,dp, \tag{5}$$

где при $m = 2k$

$$\delta_\varepsilon^t(p) = \exp\Big[-t\int\limits_0^\varepsilon\Big(e^{i|p|\sigma x} - \sum_{j=0}^{m}\frac{(i|p|\sigma x)^j}{j!}\Big)d\mu(x)\Big],$$

а при $m = 2k+1$

$$\delta_\varepsilon^t(p) = \exp\Big[-t\int\limits_0^\varepsilon\Big(e^{i|p|\sigma x} - \sum_{j=0}^{m+1}\frac{(i|p|\sigma x)^j}{j!}\Big)d\mu(x)\Big].$$

Далее, обозначим через P^t полугруппу операторов

$$P^t = \exp\Big(-\frac{it}{\alpha\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\mathcal{D}^\alpha\Big).$$

По определению оператор P^t переводит начальную функцию φ в решение задачи Коши (1).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. 1. *Пусть $m = 2k$. Тогда для любого $l \geqslant 0$ существует число $C = C(l) > 0$, такое что для любой функции $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$*

и всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\|P^t\varphi - P^t_\varepsilon\varphi\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant Ct\varepsilon^{1-\{\alpha\}}\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}.$$

2. *Пусть $m = 2k+1$. Тогда для любого $l \geqslant 0$ существует число $C = C(l) > 0$, такое что для любой функции $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+2}(\mathbf{R}), l \geqslant 0$ и всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\|P^t\varphi - P^t_\varepsilon\varphi\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant Ct\varepsilon^{2-\{\alpha\}}\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+2}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geqslant 0$) операторная полугруппа

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [4, гл. IX, §2, п. 1, с. 614]

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{\tau(A+B)}Be^{(t-\tau)A}d\tau. \tag{6}$$

Применим формулу (6) для случая, когда $A = -\frac{i}{\alpha\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\mathcal{D}^\alpha$, а $A+B = F_\varepsilon$, где F_ε – генератор полугруппы P^t_ε. Из (5) следует, что F_ε есть псевдодифференциальный оператор с символом $\widehat{f}_\varepsilon(p)$, где

$$\widehat{f}_\varepsilon(p) = \ln(\delta^t_\varepsilon(p)) - \frac{i|p|^\alpha}{\alpha}.$$

В нашем случае для любого $q > 0$ справедливо равенство

$$\|U_A(\tau)\|_{W_2^q\to W_2^q} = 1. \tag{7}$$

Заметим, что оператор B является псевдодифференциальным оператором с символом

$$\widehat{b}_\varepsilon(p) = -\ln(\delta^t_\varepsilon(p)).$$

При $m = 2k$ оценим норму оператора $\|B\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}\to W_2^l}$. Имеем

$$\begin{aligned}\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l(\mathbf{R})} &= \int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2\\ &\leqslant Ct^2\int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p)|^2\Big(\int\limits_0^{\varepsilon}|p|^m x^m d\mu(x)\Big)^2\\ &\leqslant Ct^2\varepsilon^{2m-2\alpha}\int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2l+2m})|\widehat{\varphi}(p)|^2 \leqslant Ct^2\varepsilon^{2m-2\alpha}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m}(\mathbf{R})}. \qquad (8)\end{aligned}$$

При $m = 2k+1$ оценим норму оператора $\|B\|_{W_2^{l+[\alpha]+2}\to W_2^l}$. Имеем

$$\begin{aligned}\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l(\mathbf{R})} &= \int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2\\ &\leqslant Ct^2\int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p)|^2\Big(\int\limits_0^{\varepsilon}|p|^{m+1} x^{m+1} d\mu(x)\Big)^2\\ &\leqslant Ct^2\varepsilon^{2(m+1)-2\alpha}\int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2l+2m+2})|\widehat{\varphi}(p)|^2\\ &\leqslant Ct^2\varepsilon^{2(m+1)-2\alpha}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}. \qquad (9)\end{aligned}$$

Для доказательства утверждения осталось оценить норму оператора $\|U_{A+B}(\tau)\|_{W_2^q\to W_2^q}$ для любого $q > 0$. Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $2m-2 < \alpha < 2m$, $\alpha \neq 2m-1$, $m = 2, 3, \ldots$. *Для любого* $x \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}\Big(e^{i\sigma x} - \sum_{j=0}^{2m}\frac{(i\sigma x)^j}{j!}\Big) \geqslant 0,$$

где $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}$.

Доказательство. Обозначим

$$d^{-1} = \cos\Big(\frac{\pi}{2}\big(1-\frac{1}{\alpha}\big)\Big) > 0.$$

Масштабным преобразованием переменной x утверждение леммы можно свести к следующему неравенству: при $x \geqslant 0$

$$\operatorname{Re}\Big(e^{i\sigma x d} - \sum_{j=0}^{2m} \frac{(i\sigma x d)^j}{j!}\Big) \geqslant 0.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \operatorname{Re}\Big(e^{i\sigma x d} - \sum_{j=0}^{2m} \frac{(i\sigma x d)^j}{j!}\Big).$$

Заметим, что

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ \ldots,\ f^{(2m)}(0) = 0.$$

Вычислим производную порядка $2m+1$ функции $f(x)$

$$\begin{aligned} f^{(2m+1)}(x) &= \operatorname{Re}\Big((i\sigma d)^{2m+1} e^{i\sigma x d}\Big) \\ &= d^{2m+1} e^{-x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)} \cos\Big(x + \pi - \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha}\Big). \end{aligned}$$

Производная $f^{(2m+1)}(x)$ неотрицательна на интервалах

$$x \in \Big[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} + 2\pi k,\ \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} + 2\pi k\Big],\ k = 0, 1, 2, \ldots \quad (10)$$

и неположительна на интервалах

$$x \in \Big[-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} + 2\pi k\Big],\ k = 0, 1, 2, \ldots. \quad (11)$$

Это означает, что $f^{(2m)}(x)$ не убывает на интервалах (10) и не возрастает на интервалах (11). Отсюда следует, что функция $f^{(2m)}(x)$ имеет локальные минимумы в точках

$$x_k = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} + 2\pi k,\ k = 0, 1, \ldots.$$

Вычислим $2m$–ую производную функции $f(x)$

$$\begin{aligned} f^{(2m)}(x) &= \operatorname{Re}\Big((i\sigma d)^{2m} e^{i\sigma x d} - (i\sigma d)^{2m}\Big) \\ &= d^{2m} e^{-x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)} \cos\Big(x - \frac{\pi m}{\alpha}\Big) - d^{2m} \cos\Big(\frac{\pi m}{\alpha}\Big). \end{aligned}$$

Определим знак $f^{(2m)}(x)$ в точках локальных минимумов x_k. Угол $\frac{\pi m}{\alpha}$ лежит в интервале от $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(m-1)}\right)$, а значит

$$\cos\left(\frac{\pi m}{\alpha}\right) < 0.$$

Угол

$$x_k - \frac{\pi m}{\alpha} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} + 2\pi k - \frac{\pi m}{\alpha} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\alpha} + 2\pi k$$

лежит во втором квадранте, а значит,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\alpha}\right) < 0.$$

Заметим, что $0 < e^{-x\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)} \leqslant 1$ при $x > 0$, и

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\alpha}\right) - \cos\left(\frac{\pi m}{\alpha}\right) > 0$$

при $2m-2 < \alpha < 2m-1$. Отсюда следует, что значение $f^{(2m)}(x_k) > 0$ для любого $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, а значит и $f^{(2m)}(x) > 0$ для всех $x > 0$.

Рассмотрим теперь случай $2m-1 < \alpha < 2m$.

Через x_1 и x_2 обозначим решения $f^{(2m)}(x) = 0$ на промежутке $\left[\frac{2\pi m}{\alpha}, 2\pi\right]$. Тогда производная $f^{(2m-1)}(x)$ не убывает на промежутках

$$\left[2\pi k,\, x_1 + 2\pi k\right] \cup \left[x_2 + 2\pi k,\, 2\pi + 2\pi k\right], \quad k = 0, 1, \ldots, L$$

и

$$\left[2\pi + 2\pi L,\, \infty\right),$$

а не возрастает на промежутках

$$\left[x_1 + 2\pi k,\, x_2 + 2\pi k\right],\ k = 0, 1, \ldots, L.$$

Вычислим производную порядка $(2m-1)$ функции $f(x)$

$$\begin{aligned} f^{(2m-1)}(x) &= \mathrm{Re}\left((i\sigma d)^{2m-1} e^{i\sigma x d} - (i\sigma d)^{2m-1} - (i\sigma d)^{2m} x\right) \\ &= d^{2m-1} e^{-x\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)} \cos\left(x + \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi m}{\alpha} - \pi\right) \\ &- d^{2m-1}\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi m}{\alpha} - \pi\right) - d^{2m}\cos\left(\frac{\pi m}{\alpha}\right) x. \end{aligned}$$

Отметим, что при $2m-1 < \alpha < 2m$ выполнены неравенства

$$\cos\left(\frac{\pi m}{\alpha}\right) < 0,\ \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi m}{\alpha} - \pi\right) < 0.$$

Уравнение $f^{(2m-1)}(x)=0$ может быть переписано в виде

$$\cos\Big(x+\frac{\pi}{2\alpha}-\frac{\pi m}{\alpha}-\pi\Big)$$
$$=\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{2\alpha}-\frac{\pi m}{\alpha}-\pi\Big)+\cos\Big(\frac{\pi m}{\alpha}\Big)xd\Big)\,e^{x\,\mathrm{tg}\,\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)}.$$

Нетрудно заметить, что левая часть последнего равенства больше правой на промежутках

$$\Big[\frac{2\pi m}{\alpha}+2\pi k,\,2\pi+2\pi k\Big],\quad k=0,1,\dots,L,$$

а значит на этих промежутках $f^{(2m-1)}(x)\geqslant 0$. Этого наблюдения достаточно для доказательства леммы. $\square$

Из леммы 3 вытекает оценка

$$|\delta_\varepsilon^t(p)|\leqslant 1.$$

Из последней оценки немедленно следует неравенство для операторной нормы

$$\|U_{A+B}(t-\tau)\|_{W_2^k\to W_2^k}\leqslant 1. \tag{12}$$

Утверждение теоремы следует теперь из (7), (8), (9) и (12). $\square$

Следствие 1. *Для любых функций $\varphi\in L_2(\mathbf{R})$ справедливо*

$$\|P^t\varphi-P_\varepsilon^t\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})}\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0.$$

Доказательство. Так как

$$\|P^t\|_{L_2\to L_2}\leqslant 1\quad\text{и}\quad\|P_\varepsilon^t\|_{L_2\to L_2}\leqslant 1,$$

а классы Соболева $W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ и $W_2^{l+[\alpha]+2}(\mathbf{R})$ плотны в пространстве $L_2(\mathbf{R})$, то утверждение следствия вытекает из теоремы 1 и теоремы Банаха–Штейнгауза (см. [1, II.1.18]). $\square$

Список литературы

1. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория.* — Изд-во иностр. лит-ры, М., 1962.
2. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Предельная теорема о сходимости функционалов от случайного блуждания к решению задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\Delta u$ с комплексным параметром σ.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **420** (2013), 88–102.
3. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши с оператором Шрёдингера.* – Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 158–175.

4. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М., 1972.
5. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы.* МЦНМО, М., 2007.
6. М. В. Платонова, С. В. Цыкин, *Вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера с оператором дробного дифференцирования.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 257–272.
7. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Наука и техника, Минск, 1987.
8. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева, *Избранные главы анализа и высшей алгебры.* Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1981, 200 с.

Platonova M. V., Tsikin S. V. Probabilistic approach to Cauchy problem solution for the Schrödinger equation with a fractional derivative of order $\alpha \in \bigcup_{m=3}^{\infty}(m-1,m)$.

We construct a probabilistic approximation of the Cauchy problem solution for the nonstationary Schrödinger equation with a symmetric fractional derivative of order $\alpha \in \bigcup_{m=3}^{\infty}(m-1,m)$ in the right hand side.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова, Фонтанка 27, С.-Петербург 191023;
СПбГУ, Лаборатория им. П. Л. Чебышева, 14 линия В.О., дом 29Б, С.-Петербург 199178, Россия
С.-Петербургский государственный университет, Университетская наб., д. 7/9, С.-Петербург 199034, Россия

Поступило 29 октября 2018 г.