Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

В. В. Петров

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА И ВЕРОЯТНОСТИ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВКЛИЧИН

Пусть $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность случайных величин на некотором вероятностном пространстве, $\{a_n; n = 1, 2, \dots\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, такая что $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Положим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. В [1] введено следующее условие (условие D): для любых положительных ε и $\varepsilon_0 < \varepsilon$ существует положительное число γ, такое что

$$\mathbf{P}\big(\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k > (1+\varepsilon)a_n\big) \leqslant \gamma\,\mathbf{P}\big(S_n > (1+\varepsilon_0)a_n\big) \tag{1}$$

для всех достаточно больших n.

Неравенство (1) имеет своим отправным пунктом классическое неравенство Колмогорова $\mathbf{P}(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant x) \leqslant 2\mathbf{P}(S_n \geqslant x - (2B_n)^{1/2})$ для любого x, где S_n есть сумма n независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и конечными диперсиями, $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{E}X_k^2$. В [1] найдены достаточные условия, включающие условие D, для выполнения неравенства

$$\limsup S_n/a_n \leqslant 1 \ \text{ п.н.} \tag{2}$$

При этом в [1], как и настоящей работе, отсутствуют предположения о независимости случайных величин из исходной последовательности $\{X_n\}$ и о существовании каких-либо моментов у этих случайных величин.

Нас будут интересовать условия, достаточные для выполнения неравенства

$$\limsup S_n/L_n \leqslant 1 \ \text{ п.н.} \tag{3}$$

где

$$L_n = (2B_n \log\log B_n)^{1/2}, \tag{4}$$

Ключевые слова: закон повторного логарифма, суммы случайных величин.

$\{B_n\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$, т.е. условия, достаточные для классической формы одностороннего закона повторного логарифма.

Теорема. *Пусть* $\{B_n; n = 1, 2, \dots\}$ *– неубывающая последовательность положительных чисел,* $B_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$*, и пусть выполнено условие* D *с заменой* a_n *на* L_n*, определённое равенством* (4)*. Пусть, далее,*

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant xL_n) \leqslant M(\log(B_n))^{-x^2} \tag{5}$$

для любого x *из некоторого невырожденного интервала* $(1, 1+\beta)$ *и всех достаточно больших* n*, где* M *– постоянная. Тогда имеет место неравенство* (3)*.*

Заметим, что неравенство (5) можно записать в следующей форме:

$$\mathbf{P}(Z_n \geqslant xt_n) \leqslant M\exp\{-x^2t_n^2/2\}, \tag{6}$$

где $Z_n = S_n/B_n^{1/2}$, $t_n = (2\log\log B_n)^{1/2}$. Таким образом, условие (5) представляет собой оценку вероятностей умеренных уклонений сумм зависимых случайных величин.

В [2] указаны достаточные условия для выполнения неравенства (3), где L_n определено равенством (4), для последовательности независимых случайных величин с конечными дисперсиями и математическими ожиданиями, равными нулю. При этом предполагается выполненной некоторая оценка вероятностей умеренных уклонений нормированной суммы $S_n/B_n^{1/2}$, где $B_n = \mathbf{E}X_1^2 + \dots + \mathbf{E}X_n^2$.

Проверка выполнения оценок типа (6) для хвостовых вероятностей сумм случайных величин облегчается наличием ряда результатов, относящихся к предельным теоремам для вероятностей умеренных уклонений сумм случайных величин. Эта тематика была начата Рубином [3] и Сетураманом [3, 4] (см. также [5] и указанную там литературу).

Доказательство. Пусть c – произвольное положительное число, удовлетворяющее условию $c > 1$. Используя условия, наложенные на последовательность $\{B_n\}$, определим последовательность целых положительных чисел $\{n_k\}$ следующим образом: пусть n_1 таково, что $B_{n_1} > c$; при данном n_{k-1} $(k = 2, 3, \dots)$ определим n_k как наименьшее число, для которого $B_{n_k} > cB_{n_{k-1}}$. Таким образом,

$$B_{n_k-1} \leqslant cB_{n_{k-1}} < B_{n_k}. \tag{7}$$

Очевидно, что $n_{k-1} < n_k$ для любого k и $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Неравенство (3), где L_n определено равенством (4), будет доказано, если мы докажем, что

$$\mathbf{P}(S_n > (1+\varepsilon)L_n \text{ б.ч.}) = 0 \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Докажем сначала, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_k \mathbf{P}\big(\max_{1\leqslant j\leqslant n_k-1}(S_j) > (1+\varepsilon)L_{n_{k-1}}\big) < \infty. \tag{9}$$

Используя условие D при $a_n = L_n$, неубывание последовательности $\{L_n\}$ и неравенства (7), получим

$$\mathbf{P}\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n_k-1}(S_j) > (1+\varepsilon)L_{n_{k-1}}\Big) \leqslant \gamma \mathbf{P}\big(S_{n_k-1} > (1+\varepsilon_0)L_{n_{k-1}}\big) \tag{10}$$

для любых положительных ε и $\varepsilon_0 < \varepsilon$ и всех достаточно больших k.

Далее, $(\log(B_{n_k-1}))^{-x^2} \leqslant ((k-2)\log c)^{-x^2}$ для любого целого $k \geqslant 3$ и $x > 1$ в силу неравенства $B_{n_k-1} \geqslant B_{n_{k-1}} \geqslant c^{k-2}B_{n_1} \geqslant c^{k-2}$, вытекающего из (7). Поэтому

$$\sum_k \mathbf{P}(S_{n_k-1} > (1+\varepsilon)L_{n_{k-1}}) < \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$ вследствие условия (5) при c, достаточно близком к 1. С учётом (10) отсюда следует (9).

Для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(S_n > (1+\varepsilon)L_n \text{ б.ч.}\big) &\leqslant \mathbf{P}\big(\max_{n_{k-1}\leqslant n<n_k} S_n > (1+\varepsilon)L_{n_{k-1}} \text{ б.ч.}\big)\\ &\leqslant \mathbf{P}\big(\max_{1\leqslant j\leqslant n_k-1} S_j > (1+\varepsilon)L_{n_{k-1}} \text{ б.ч.}\big) = 0\end{aligned}$$

в силу (9) и леммы Бореля–Кантелли. Доказанное утверждение (8) завершает доказательство теоремы. □

Список литературы

1. В. В. Петров, *О законе повторного логарифма без предположений о существовании моментов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 208–210.
2. В. В. Петров, *О законе повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин с конечными дисперсиями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 182–186.
3. H. Rubin, J. Sethuraman, *Probabilities of moderate deviations.* — Sankhya A **27**, No. 2–4 (1965), 325–346.

4. J. Sethuraman, *Probabilities of deviations.* Essays in probability and statistics (ed. R. C. Bose et al.), Univ. North Carolina Press, Chapel Hill (1970), 655–672.
5. В. В. Петров, *О вероятностях умеренных уклонений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **260** (1999), 214–217.

Petrov V. V. The law of the iterated logarithm and probabilities of moderate deviations of sums of dependent random variables.

Sufficient conditions are found for the applicability of a classical law of the iterated logarithm to sequences of random variables without conditions of independence and the existence of any moments.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: petrov2v@mail.ru

Поступило 11 октября 2017 г.