Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

А. К. Николаев, М. В. Платонова

НЕВЕРОЯТНОСТНЫЕ АНАЛОГИ ПРОЦЕССА КОШИ

§1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}_0 u, \;\; u(0,x) = \varphi(x), \tag{1}$$

где оператор $\mathcal{A}_0$ задается формулой

$$\mathcal{A}_0\varphi(x) = \text{v.p.}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)}{y^2}dy,$$

а функция φ принадлежит соболевскому классу $W_2^2(\mathbf{R})$.

Отметим, что оператор $\mathcal{A}_0$ является псевдодифференциальным оператором с символом

$$a_0(p) = \text{v.p.}\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\cos(p\,y)-1}{y^2}\,dy.$$

Известно, что для решения задачи Коши (1) справедливо вероятностное представление

$$u(t,x) = \mathbf{E}\,\varphi(x+\xi(t)), \tag{2}$$

где $\xi(t)$ – стандартный процесс Коши.

В настоящей работе мы получим аналогичные вероятностные представления для решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^m \mathcal{A}_m u, \;\; u(0,x) = \varphi(x),$$

где $m \in \mathbf{N}$, а оператор $\mathcal{A}_m$ определяется как

$$\mathcal{A}_m\varphi(x) = \text{v.p.}\int\limits_{\mathbf{R}} \left(\varphi(x+y)-\varphi(x)-\sum_{j=1}^{m}\frac{\varphi^{(2j)}(x)y^{2j}}{(2j)!}\right)\frac{dy}{y^{2m+2}}.$$

Ключевые слова: случайные процессы, процесс Коши, эволюционное уравнение, предельные теоремы.

При каждом m оператор $\mathcal{A}_m$ также является псевдодифференциальным оператором с символом

$$a_m(p) = \text{v.p.} \int\limits_{\mathbf{R}} \left(\cos(p\,y) - 1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j (p\,y)^{2j}}{(2j)!} \right) \frac{dy}{y^{2m+2}}.$$

Заметим, что при $m \geqslant 1$ получить в точности вероятностное представление вида (2) невозможно, так как фундаментальное решение соответствующего уравнения не будет вероятностной плотностью. В данном случае для получения вероятностного представления решения задачи Коши мы воспользуемся методом, предложенным в [3, 6–9] и основанном на использовании теории обобщенных функций (см. [1]).

Случаи четных и нечетных m, то есть $m = 2k$ и $m = 2k-1$, мы будем рассматривать отдельно. Случай $m = 2k - 1$ является более сложным и требует использования комплекснозначных процессов.

Авторы выражают благодарность Н. В. Смородиной за внимание к работе и полезные замечания.

§2. Основные обозначения и определения

Прямое преобразование Фурье в настоящей работе определяется как

$$\widehat{\varphi}(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{ipx}\, dx,$$

а, соответственно, обратное преобразование как

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(p)\, e^{-ipx}\, dp.$$

Через $W_2^k(\mathbf{R})$ обозначим пространство Соболева функций, определенных на $\mathbf{R}$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно (см. [11], с. 146). Стандартная норма в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ определяется формулой

$$\|\psi\|_k^2 = \sum_{l=0}^{k} \int\limits_{\mathbf{R}} |\psi^{(l)}(x)|^2\, dx.$$

Нам удобно использовать в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ другую норму, эквивалентную стандартной (см. [11], с. 190),

$$\|\psi\|^2_{W_2^k} = \int\limits_{\mathbf{R}} (1+|p|^{2k})\,|\widehat{\psi}(p)|^2\,dp.$$

Оператор A, действующий по правилу

$$(A\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{-ipx}\,\widehat{A}(p)\,\widehat{\varphi}(p)\,dp,$$

называется псевдодифференциальным оператором с символом $\widehat{A}(p)$.

Для ограниченного оператора $A : W_2^k(\mathbf{R}) \to W_2^l(\mathbf{R})$ через $\|A\|_{W_2^k\to W_2^l}$ обозначается соответствующая операторная норма.

Через $\mathbf{C}$ обозначим комплексную плоскость, а через $\mathbf{C}_+$ и $\mathbf{C}_-$ – верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно.

§3. Случай $m = 2k$

Пусть $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,\infty)\times\mathbf{R}$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(dt,dx) = dt\,\Lambda(dx) = \frac{dt\,dx}{x^{4k+2}}.$$

Мера Λ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \min(x^2,1)\Lambda(dx) = \infty$$

и не является мерой Леви ни для какого процесса Леви.

Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим сложный пуассоновский процесс $\xi_\varepsilon(t)$ вида

$$\xi_\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} x\,\nu(ds,dx).$$

По процессу $\xi_\varepsilon(t)$ построим полугруппу операторов P_ε^t, полагая для $\varphi\in L_2(\mathbf{R})$

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \mathbf{E}[(\varphi * h_\varepsilon)(x+\xi_\varepsilon(t))],$$

где функция h_ε определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{h}_\varepsilon(p) = \exp\Bigg(t\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}\sum_{j=1}^{2k}\frac{(-1)^{j+1}p^{2j}x^{2j}}{(2j)!}\,\frac{dx}{x^{4k+2}}\Bigg).$$

Важно отметить, что функция $\widehat{h}_\varepsilon(p)$ является быстро убывающей.

Лемма 1. 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ оператор P_ε^t является псевдодифференциальным оператором с символом $\widehat{q}_\varepsilon$, где*

$$\widehat{q}_\varepsilon(p) = \exp\left(t \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\cos(p\,x) - 1}{x^{4k+2}} dx\right) \widehat{h}_\varepsilon(p).$$

2. *Для любых $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство $|\widehat{q}_\varepsilon(p)| \leqslant 1$.*

Доказательство. Преобразуем выражение для $P_\varepsilon^t\,\varphi(x)$ к интегральному виду

$$P_\varepsilon^t\,\varphi(x) = \mathbf{E}\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(p)\widehat{h}_\varepsilon(p) e^{-i\,p\,(x+\xi_\varepsilon(t))} dp$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(p)\widehat{h}_\varepsilon(p) e^{-ipx} \mathbf{E} e^{-i\,p\,\xi_\varepsilon(t)} dp = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(p)\widehat{q}_\varepsilon(p) e^{-i\,p\,x} dp\,,$$

где $\widehat{q}_\varepsilon(p) = \widehat{h}_\varepsilon(p)\,\mathbf{E}\,e^{-i\,p\,\xi_\varepsilon(t)}$.

Из теоремы Кэмпбелла (см. [5, §3.2]) следует, что

$$\widehat{q}_\varepsilon(p) = \exp\left(t \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\cos(p\,x) - 1}{x^{4k+2}} dx\right) \widehat{h}_\varepsilon(p).$$

Далее, имеем

$$\widehat{q}_\varepsilon(p) = \exp\left(t \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\cos(px) - 1}{x^{4k+2}}\, dx\right) \exp\left(t \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} \sum_{j=1}^{2k} \frac{(-1)^{j+1}(p\,x)^{2j}}{(2j)!}\, \frac{dx}{x^{4k+2}}\right)$$

$$= \exp\left(t \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} \left(\cos(p\,x) - 1 + \sum_{j=1}^{2k} \frac{(-1)^{j+1}(p\,x)^{2j}}{(2j)!}\right) \frac{dx}{x^{4k+2}}\right).$$

Сделаем в интеграле замену переменной $s = |p|x$. Тогда

$$\widehat{q}_\varepsilon(p) = \exp\left(t|p|^{4k+1} \int\limits_{|s|\geqslant\varepsilon|p|} \left(\cos s - 1 + \sum_{j=1}^{2k} \frac{(-1)^{j+1} s^{2j}}{(2j)!}\right) \frac{ds}{s^{4k+2}}\right).$$

Из неравенства

$$\cos s - 1 + \sum_{j=1}^{2k} \frac{(-1)^{j+1} s^{2j}}{(2j)!} < 0 \tag{3}$$

при любом вещественном $s \neq 0$ следует утверждение п. 2. $\square$

Покажем теперь, что семейство $u_\varepsilon(t,x) = P_\varepsilon^t \varphi(x)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ к точному решению задачи Коши $u(t,x) = P^t \varphi(x)$, и получим оценку скорости сходимости.

Теорема 1. *Пусть $l \geqslant 0$, $k \in \mathbf{N}$. Тогда существует константа $C > 0$, такая что для любой функции $\varphi \in W_2^{l+4k+2}(\mathbf{R})$ и всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot\,) - u(t,\cdot\,)\|_{W_2^l} \leqslant Ct\varepsilon\|\varphi\|_{W_2^{l+4k+2}}.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся известной формулой теории возмущений (см. [4, гл. IX, §2, п. 1]).

Пусть A принадлежит классу операторов, определенных на гильбертовом пространстве H, такому что для $t \geqslant 0$ существует ограниченная полугруппа операторов

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть оператор B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа $U_{A+B}(t)$ ограничена. Тогда справедлива формула

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int_0^t e^{\tau(A+B)} B e^{(t-\tau)A} d\tau. \tag{4}$$

Применим формулу (4) для случая, когда $e^{tA} = P_\varepsilon^t$, $e^{t(A+B)} = e^{t\mathcal{A}_{2k}}$. Напомним, что эти операторы являются псевдодифференциальными с символами $\widehat{q}_\varepsilon(p)$ и $e^{ta_{2k}(p)}$ соответственно. Из леммы 1 следует, что $\|e^{tA}\|_{W_2^d \to W_2^d} \leqslant 1$ для любого $d \in \mathbf{N}$ и $t > 0$, а из (3) следует справедливость неравенства $\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^d \to W_2^d} \leqslant 1$. Таким образом, остается оценить норму $\|B\|_{W_2^{l+4k+2} \to W_2^l}$.

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi(x)$

$$
\begin{aligned}
\widehat{B\varphi}(p) &= 2\widehat{\varphi}(p)\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\cos(py)-1-\sum_{j=1}^{2k}\frac{(-1)^j(py)^{2j}}{(2j)!}\right)\frac{dy}{y^{4k+2}}\\
&= 2\widehat{\varphi}(p)\,|p|^{4k+1}\int\limits_0^{\varepsilon|p|}\left(\cos y-1-\sum_{j=1}^{2k}\frac{(-1)^j y^{2j}}{(2j)!}\right)\frac{dy}{y^{4k+2}}.
\end{aligned}
$$

Оценим модуль соответствующего выражения в двух случаях: $\varepsilon|p|<1$ и $\varepsilon|p|\geqslant 1$. Если $\varepsilon|p|<1$, то справедливо неравенство

$$
|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant \frac{2}{(4k+2)!}\,|\widehat{\varphi}(p)|\,p^{4k+2}\,\varepsilon.
$$

Если же $\varepsilon|p|\geqslant 1$, то справедливо неравенство

$$
|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C_1\,|\widehat{\varphi}(p)|\,|p|^{4k+1},
$$

где C_1 – некоторая константа.

Теперь мы можем оценить величину $\|B\varphi\|^2_{W_2^l}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
\|B\varphi\|^2_{W_2^l} = &\int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}}(1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2\,dp\ + \int\limits_{|p|\geqslant\frac{1}{\varepsilon}}(1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2\,dp\\
&\leqslant \int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}}(1+|p|^{2l})\Big(\frac{2}{(4k+2)!}|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k+2}\varepsilon\Big)^2dp\\
&\quad + \int\limits_{|p|\geqslant\frac{1}{\varepsilon}}(1+|p|^{2l})\Big(C_1|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k+1}\Big)^2dp\\
&\qquad\leqslant C_2\varepsilon^2\int\limits_{\mathbf{R}}(1+|p|^{2l})p^{8k+4}|\widehat{\varphi}(p)|^2dp, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

где C_2 – некоторая константа. Заметим, что при $l\geqslant 0$ справедливо неравенство

$$
\frac{(1+|p|^{2l})p^{8k+4}}{1+|p|^{2l+8k+4}} \leqslant \frac{2p^{8k+4}}{1+p^{8k+4}} < 2. \qquad (6)
$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\|B\varphi\|^2_{W_2^l} \leqslant C\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbf{R}} (1+|p|^{2l+8k+4})|\widehat{\varphi}(p)|^2 dp = C\varepsilon^2 \|\varphi\|^2_{W_2^{l+4k+2}}.$$

Окончательно получаем

$$\|P^t_\varepsilon \varphi - P^t \varphi\|_{W_2^l} \leqslant Ct\varepsilon \|\varphi\|_{W_2^{l+4k+2}}. \qquad \square$$

Следствие 1. *Для любой функции* $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ *справедливо*

$$\|P^t_\varepsilon \varphi - P^t \varphi\|_{L_2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Доказательство. Так как операторные нормы $\|P^t\|_{L_2 \to L_2}$ и $\|P^t_\varepsilon\|_{L_2 \to L_2}$ не больше единицы, а класс Соболева $W_2^{4k+2}(\mathbf{R})$ плотен в пространстве $L_2(\mathbf{R})$, то утверждение следствия немедленно вытекает из утверждения теоремы 1 и теоремы Банаха–Штейнгауза (см. [2, II.1.18]). $\square$

§4. Случай $m = 2k - 1$

Пусть $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,\infty) \times \mathbf{R}$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\nu(dt, dx) = dt\, \Lambda(dx) = \frac{dt\, dx}{x^{4k}}.$$

Отметим, что в данном случае мы не можем построить полугруппу операторов P^t_ε так, как это было сделано в предыдущем параграфе, потому что в этом случае функция $\widehat{q}_\varepsilon$ будет иметь экспоненциальный рост.

Введем сначала некоторые обозначения. Через $P_\pm$ обозначим проекторы Рисса, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H^2_+(\mathbf{C}_+)$ и $H^2_-(\mathbf{C}_-)$ соответственно. На классе функций $L_1 \cap L_2$ действие проекторов Рисса определяется следующими формулами

$$\varphi_+(x) = P_+\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx} \widehat{\varphi}(p) dp,$$

$$\varphi_-(x) = P_-\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ipx} \widehat{\varphi}(p) dp.$$

Отметим, что функции $P_+\varphi$, $P_-\varphi$ аналитически продолжаются в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно.

Теперь для каждого $\varepsilon > 0$ определим сложные пуассоновские процессы $\xi_\varepsilon^+(t)$ и $\xi_\varepsilon^-(t)$, полагая

$$\xi_\varepsilon^+(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,\infty)} x\,d\nu(s,x), \quad \xi_\varepsilon^-(t) = \iint\limits_{[0,t]\times(-\infty,-\varepsilon]} x\,d\nu(s,x).$$

Случайные величины $\xi_\varepsilon^+(t)$ и $\xi_\varepsilon^-(t)$ независимы, так как они задаются стохастическими интегралами по непересекающимся множествам.

Построим теперь полугруппу операторов P_ε^t, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \mathbf{E}\,\varphi_- * h_\varepsilon(x + \sigma_-\xi_\varepsilon^+(t) + \sigma_+\xi_\varepsilon^-(t)) \\ + \mathbf{E}\,\varphi_+ * h_\varepsilon(x + \sigma_+\xi_\varepsilon^+(t) + \sigma_-\xi_\varepsilon^-(t)),$$

где $\sigma_+ = e^{\frac{i\pi}{4k-1}}$, $\sigma_- = e^{-\frac{i\pi}{4k-1}}$, а функция h_ε определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{h}_\varepsilon(p) = \exp\Big(- t\sum_{j=1}^{4k-1}\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{(-i|p|\sigma_- y)^j}{j!}\frac{dy}{y^{4k}} - t\sum_{j=1}^{4k-1}\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{(-i|p|\sigma_+ y)^j}{j!}\frac{dy}{y^{4k}}\Big).$$

Несложно заметить, что функция $\widehat{h}_\varepsilon(p)$ может быть переписана в виде

$$\widehat{h}_\varepsilon(p) = \exp\Big(- 2t\sum_{j=1}^{4k-1}\int\limits_\varepsilon^\infty \cos\Big(\frac{(4k+1)\pi j}{8k-2}\Big)\frac{(|p|y)^j}{j!}\frac{dy}{y^{4k}}\Big).$$

Определенная таким образом функция $\widehat{h}_\varepsilon(p)$ является быстро убывающей, так как коэффициент при старшей степени $|p|^{4k-1}$ равен нулю, а при степени $|p|^{4k-2}$ отрицателен.

Лемма 2. *Для любого $z \geqslant 0$ справедливы неравенства*

1. $\operatorname{Re}\Big(e^{iz\sigma_+} - \sum_{j=0}^{4k-2}\frac{(iz\sigma_+)^j}{j!}\Big) \leqslant 0.$ **2.** $\operatorname{Re}\Big(e^{-iz\sigma_-} - \sum_{j=0}^{4k-2}\frac{(-iz\sigma_-)^j}{j!}\Big) \leqslant 0.$

Доказательство. Доказательство леммы приведено в диссертации М. В. Платоновой (см. [10, с. 66]). □

Лемма 3. 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ оператор P_ε^t является псевдодифференциальным оператором с символом*

$$\widehat{r}_\varepsilon(p) = \exp\Big(t\int\limits_\varepsilon^\infty (e^{-i|p|\sigma_- y} - 1)\frac{dy}{y^{4k}}\Big)\exp\Big(t\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} (e^{-i|p|\sigma_+ y} - 1)\frac{dy}{y^{4k}}\Big)\widehat{h}_\varepsilon(p).$$

2. *Для любых* t, ε, p *справедливо неравенство*

$$\left|\widehat{r}_\varepsilon(p)\right| \leqslant 1.$$

Доказательство. Преобразуем выражение для $P_\varepsilon^t\varphi(x)$ к виду

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \widehat{\varphi}_-(p)e^{-ipx}\mathbf{E}\, e^{-ip\sigma-\xi_\varepsilon^+(t)}\mathbf{E}\, e^{-ip\sigma+\xi_\varepsilon^-(t)}\widehat{h}_\varepsilon(p)\, dp$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^0 \widehat{\varphi}_+(p)e^{-ipx}\mathbf{E}\, e^{-ip\sigma-\xi_\varepsilon^-(t)}\mathbf{E}\, e^{-ip\sigma+\xi_\varepsilon^+(t)}\widehat{h}_\varepsilon(p)\, dp.$$

Из теоремы Кэмпбелла (см. [5, §3.2]) следует, что

$$\mathbf{E}\, e^{-ip\sigma+\xi_\varepsilon^+(t)} = \exp\left(t\int\limits_\varepsilon^\infty \left(e^{-ip\sigma+y}-1\right)\frac{dy}{y^{4k}}\right), \quad p<0,$$
$$\mathbf{E}\, e^{-ip\sigma-\xi_\varepsilon^-(t)} = \exp\left(t\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \left(e^{-ip\sigma-y}-1\right)\frac{dy}{y^{4k}}\right), \quad p<0,$$
$$\mathbf{E}\, e^{-ip\sigma-\xi_\varepsilon^+(t)} = \exp\left(t\int\limits_\varepsilon^\infty \left(e^{-ip\sigma-y}-1\right)\frac{dy}{y^{4k}}\right), \quad p>0,$$
$$\mathbf{E}\, e^{-ip\sigma+\xi_\varepsilon^-(t)} = \exp\left(t\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \left(e^{-ip\sigma+y}-1\right)\frac{dy}{y^{4k}}\right), \quad p>0.$$

Тогда

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-ip\,x}\,\widehat{\varphi}(p)\,\widehat{r}_\varepsilon(p)\, dp.$$

Из последней формулы следует, что оператор P_ε^t является псевдодифференциальным оператором с символом $\widehat{r}_\varepsilon(p)$.

Так как в выражении для $\widehat{h}_\varepsilon(p)$ нет члена порядка $|p|^{4k-1}$, то из леммы 2 следует неравенство

$$\left|\widehat{r}_\varepsilon(p)\right| \leqslant 1. \qquad \square$$

Покажем теперь, что семейство $u_\varepsilon(t,x) = P_\varepsilon^t \varphi(x)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ к точному решению задачи Коши $u(t,x) = P^t \varphi(x)$, и получим оценку скорости сходимости.

Теорема 2. *Пусть $l \geqslant 0$, $k \in \mathbf{N}$. Тогда существует константа $C > 0$, такая что для любой функции $\varphi \in W_2^{l+4k}(\mathbf{R})$ и всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t,\,\cdot\,) - u(t,\,\cdot\,)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant Ct\varepsilon \|\varphi\|_{W_2^{l+4k}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Применим формулу (4) для случая, когда $e^{tA} = P_\varepsilon^t$, $e^{t(A+B)} = e^{-t\mathcal{A}_{2k-1}}$. Напомним, что эти операторы являются псевдодифференциальными с символами $\widehat{r}_\varepsilon(p)$ и $e^{-ta_{2k-1}(p)}$ соответственно. Из леммы 3 следует, что $\|e^{tA}\|_{W_2^d \to W_2^d} \leqslant 1$ для любого $d \in \mathbf{N}$ и $t > 0$, а из неравенства

$$\cos s - 1 + \sum_{j=1}^{2k-1} \frac{(-1)^{j+1} s^{2j}}{(2j)!} \geqslant 0$$

следует справедливость неравенства $\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^d \to W_2^d} \leqslant 1$. Таким образом, остается оценить норму $\|B\|_{W_2^{l+4k+2} \to W_2^l}$.

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi(x)$. Имеем

$$\widehat{B\varphi}(p) = -\widehat{\varphi}(p)|p|^{4k-1} \int\limits_\gamma \left(e^{iz} - 1 - \sum_{j=1}^{4k-2} \frac{(iz)^j}{j!} \right) \frac{dz}{z^{4k}},$$

где

$$\gamma = \Big\{ z \in \mathbf{C} : \arg z \in \big[0, \frac{\pi}{4k-1}\big] \cup \big[\frac{\pi(4k-2)}{4k-1}, \pi\big],\ |z| = \varepsilon|p| \Big\}$$
$$\cup \{ z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z = 0,\ |\operatorname{Re} z| \leqslant \varepsilon |p| \}.$$

Оценим модуль соответствующего выражения в двух случаях: $\varepsilon|p| < 1$ и $\varepsilon|p| \geqslant 1$. Заметим, что в случае, если $\varepsilon|p| < 1$, справедливо неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C_1 \varepsilon |p|^{4k} |\widehat{\varphi}(p)|.$$

Если $\varepsilon|p| \geqslant 1$, тогда

$$|\widehat{B\varphi}(p)| = |\widehat{\varphi}(p)||p|^{4k-1} \left| \int\limits_\gamma \left(e^{iz} - 1 - \sum_{j=1}^{4k-2} \frac{(iz)^j}{j!} \right) \frac{dz}{z^{4k}} \right| \leqslant C_2 |p|^{4k-1} |\widehat{\varphi}(p)|.$$

Теперь мы можем оценить величину $\|B\varphi\|^2_{W_2^l}$. Имеем

$$\|B\varphi\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}} (1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2 dp + \int\limits_{|p|\geqslant\frac{1}{\varepsilon}} (1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2 dp$$

$$\leqslant \int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}} (1+|p|^{2l})\Big(C_1\varepsilon\,|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k}\Big)^2 dp + \int\limits_{|p|\geqslant\frac{1}{\varepsilon}} (1+|p|^{2l})\Big(C_2|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k-1}\Big)^2 dp$$

$$\leqslant C_3\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbf{R}} (1+|p|^{2l})p^{8k}|\widehat{\varphi}(p)|^2 dp, \quad (7)$$

где C_3 – некоторая константа. Заметим, что в случае $l \geqslant 0$

$$\frac{(1+|p|^{2l})|p|^{8k}}{1+|p|^{2(l+4k)}} \leqslant \frac{2|p|^{8k}}{1+|p|^{8k}} < 2. \quad (8)$$

Тогда из (7) и (8) следует, что

$$\|B\varphi\|^2_{W_2^l} \leqslant C^2\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbf{R}} (1+|p|^{2(l+4k)})|\widehat{\varphi}(p)|^2 dp = C^2\varepsilon^2\|\varphi\|^2_{W_2^{l+4k}}.$$

Окончательно получаем

$$\|P^t_\varepsilon\varphi - P^t\varphi\|_{W_2^l} \leqslant Ct\varepsilon\|\varphi\|_{W_2^{l+4k}}. \qquad \square$$

Следствие 2. *Для любой функции* $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ *справедливо*

$$\|P^t_\varepsilon\varphi - P^t\varphi\|_{L_2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Доказательство. Так как операторные нормы $\|P^t\|_{L_2\to L_2}$ и $\|P^t_\varepsilon\|_{L_2\to L_2}$ не больше единицы, а класс Соболева $W_2^{4k}(\mathbf{R})$ плотен в пространстве $L_2(\mathbf{R})$, то утверждение следствия немедленно вытекает из утверждения теоремы 2 и теоремы Банаха–Штейнгауза (см. [2, II.1.18]). $\square$

Список литературы

1. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Государственное издательство физико-математической литературы. М., 1959.
2. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория.* Издательство иностранной литературы. М., 1962.
3. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 158–175.
4. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М., 1972.
5. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы.* МЦНМО М., 2007.

6. М. В. Платонова *Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **442** (2015), 101–117.
7. М. В. Платонова *Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором Римана–Лиувилля.* — Теория вероятн. и ее примен. **61**, No. 3 (2016), 417–438.
8. М. В. Платонова, *Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования высокого порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 220–237.
9. М. В. Платонова, С. В. Цыкин, *Вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера с оператором дробного дифференцирования.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 257–272.
10. М. В. Платонова, *Аппроксимация решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана–Лиувилля математическими ожиданиями функционалов от стохастических процессов.* Диссертация кандидата физико-математических наук, С.-Петербург, ПОМИ РАН, 2017.
11. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева, *Избранные главы анализа и высшей алгебры.* Изд–во Ленингр. ун–та. Л., 1981.

Nikolaev A. K., Platonova M. V. Nonprobabilistic analogues of the Cauchy process.

It is known that a solution of the Cauchy problem for an evolution equation having a convolution operator with a generalized function $|x|^{-2}$, in the right-hand side admits a probabilistic representation in the form of the expectation of a trajectory functional of the Cauchy process. We construct similar representations for evolution equations having a convolution operator with a generalized function $(-1)^m|x|^{-2m-2}$ for arbitrary $m \in \mathbf{N}$.

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: nikolaiev.96@bk.ru

Поступило 26 октября 2018 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургский государственный университет,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербург, Россия
E-mail: mariyaplat@rambler.ru