Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

А. Г. Качуровский

ИНТЕГРАЛЫ ФЕЙЕРА И ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ФОН НЕЙМАНА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Интегралы Фейера конечных мер на прямой и нормы отклонений от предела в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем вычисляются фактически по одним и тем же формулам (интегрированием ядер Фейера) – так что сама эта эргодическая теорема является утверждением об асимптотике роста интегралов Фейера в точке 0 спектральной меры соответствующей динамической системы. Это дает возможность перерабатывать известные оценки скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана в оценки интегралов Фейера в точке для конечных мер: например, мы получаем естественные критерии степенного роста и степенного убывания этих интегралов. И наоборот, имеющиеся в литературе многочисленные оценки уклонений интегралов Фейера в точке позволяют получать новые оценки скоростей сходимости в этой эргодической теореме.

1. Пусть $\mathcal{L}$ – множество всех (абсолютно) интегрируемых по Лебегу на $(-\infty, \infty)$ вещественнозначных функций. Для каждой функции $\rho(x) \in \mathcal{L}$ рассмотрим ее интегралы Фейера $\sigma_t(x)$ (непрерывные чезаровские средние интегралов Фурье): определив при $t > 0$ ядра Фейера

$$F_t(x) = \frac{t}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{tx}{2}}{\frac{tx}{2}}\right)^2, \quad x \neq 0; \quad F_t(0) = \frac{t}{2\pi},$$

положим для всех $x \in (-\infty, \infty)$

$$\sigma_t(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_t(s)\rho(x+s)ds$$

Ключевые слова: интегралы Фейера, критерии степенного роста и степенного убывания, эргодическая теорема фон Неймана, скорости сходимости, стационарные в широком смысле процессы.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2., проект № 0314-2016-0005.

(см., например, [1, глава III, §62]). Свойства интегралов Фейера аналогичны свойствам сумм Фейера (чезаровских средних рядов Фурье) периодических функций. Например, как хорошо известно (теорема 14 в [2, глава I, §1.16]: Г.Х. Харди, 1912 г.), в случае непрерывности $\rho \in \mathcal{L}$ ее интегралы Фейера $\sigma_t(x)$ поточечно всюду сходятся к $\rho(x)$ при $t \to \infty$ (равномерно по x – в случае равномерной непрерывности функции ρ: [3, глава VII, §2]); величины $|\sigma_t(x) - \rho(x)|$ называют уклонениями интегралов Фейера.

Пусть, далее, $\mathcal{M}$ – множество всех конечных σ-аддитивных мер на σ-алгебре измеримых по Лебегу подмножеств вещественной прямой $\mathbb{R}$. Для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}$ рассмотрим ее преобразование Фурье

$$c_t = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} d\mu(x), \tag{1}$$

и интегралы Фейера

$$\sigma_t(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_t(s) d\mu(x+s)$$

при $t > 0$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$. В точке $x = 0$ получаем:

$$\sigma_t(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_t(s) d\mu(s). \tag{2}$$

2. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ – пространство с вероятностной мерой, $\{T^t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ – полупоток на нем, т.е. такая однопараметрическая полугруппа эндоморфизмов T^t пространства Ω, что для любой измеримой функции $f(\omega)$ на Ω функция $f(T^t\omega)$ измерима на прямом произведении $\Omega \times \mathbb{R}^+$. Напомним, что эндоморфизмом пространства Ω называется отображение $T : \Omega \to \Omega$, такое что для всех $A \in \mathfrak{F}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит $\mathfrak{F}$, и $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}A)$.

Через $\{U^t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ обозначим однопараметрическую полугруппу изометрических операторов, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ по формуле $U^t f = f \circ T^t$; положим

$$A_t f(\omega) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t U^\tau f(\omega) d\tau.$$

Тогда статистическая эргодическая теорема фон Неймана утверждает существование в $L_2(\Omega)$ предела $\lim_{t\to\infty} A_t f = f^*$, причем f^* оказывается ортогональной проекцией f на подпространство неподвижных векторов полугруппы $\{U^t\}$, и выполняется равенство $\int\limits_\Omega f d\lambda = \int\limits_\Omega f^* d\lambda$.

Определим теперь корреляционную функцию $b_t f$ вектора f: $b_t f = (U^t f, f)$ при $t \geqslant 0$, и $b_t f = \overline{b_{-t} f}$ при $t < 0$, и его спектральную меру μ_f, т.е. такую (единственную) конечную борелевскую меру на прямой, что

$$b_t f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\mu_f(x)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ (см., например, [4], глава 1, §7). Так как для вещественнозначных f будет $b_t f = b_{-t} f$, то в этом случае корреляционую функцию $b_t f$ можно рассматривать как (умноженное на 2π) обычное преобразование Фурье спектральной меры μ_f – см. (1).

Пусть $L_2^0(\Omega)$ – подпространство функций с нулевым средним в $L_2(\Omega)$. Так как $f - f^* \in L_2^0(\Omega)$, то и $A_t(f - f^*) \in L_2^0(\Omega)$ для всех $t > 0$. Как хорошо известно (теорема 18.3.1 в [5]), для каждой $g \in L_2^0(\Omega)$

$$\|A_t g\|_2^2 = \frac{2\pi}{t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_t(x)\, d\mu_g(x);$$

поэтому для всех $t > 0$ получаем интегральное представление

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = \|A_t(f - f^*)\|_2^2 = \frac{2\pi}{t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_t(x) d\mu_{f-f^*}(x) \qquad (3)$$

(выведенное еще Дж. фон Нейманом в [6] при оригинальном доказательстве своей эргодической теоремы). Заметим, что переход от μ_f к μ_{f-f^*} осуществляется простым отбрасыванием сосредоточенной в точке 0 меры $\mu_f\{0\} = \|f^*\|_2^2$ (поскольку f^* и есть ортогональная проекция f на подпространство собственных векторов полугруппы U^t, отвечающих собственному значению 1).

Скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана измеряют скоростью сходимости величин $\|A_t f - f^*\|_2^2$ к нулю при $t \to \infty$; см. специальный обзор [7].

3. Сопоставление равенств (2) и (3) немедленно дает любопытную формулу, связывающую нормы отклонений эргодических средних $A_t f$ от их предела f^* в эргодической теореме фон Неймана – и значения $\sigma_t(0)$ интегралов Фейера в точке 0 для спектральной меры μ_{f-f^*}:

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = \frac{2\pi}{t}\sigma_t(0). \tag{4}$$

Эта формула показывает, что утверждение эргодической теоремы фон Неймана с непрерывным временем является утверждением об асимптотике интегралов Фейера в точке 0 для спектральной меры соответствующей динамической системы: $\sigma_t(0) = o(t)$ при $t \to \infty$. И что задача оценки скоростей сходимости в этой эргодической теореме фактически совпадает с задачей гармонического анализа оценки интералов Фейера в точке для мер класса $\mathcal{M}$.

В разделах 4 и 5 ниже мы покажем, как результаты о степенной скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана из [8, 9] переформулируются соотношением (4) в утверждения о степенном росте или убывании интегралов Фейера в точке для мер класса $\mathcal{M}$.

Здесь следует отметить, что доказательства всех этих переформулированных с помощью (4) оценок получаются дословным повторением доказательств их исходных эргодических аналогов, поскольку проделанные в [8, 9] выкладки никак не использовали спектральное происхождение исследуемых мер.

При этом перенесение оценок с точки 0 (как в эргодической теории) на любую другую точку очевидно: для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}$ ее интегралы Фейера в любой точке x_0 очевидно равны соответствующим интегралам Фейера в точке 0 меры $\mu_{x_0} \in \mathcal{M}$, получающейся из μ сдвигом на x_0, т.е. такой, что $\mu_{x_0}(A) = \mu(x_0 + A)$ для всех измеримых множеств A:

$$\sigma_t(x_0, \mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_t(x)d\mu(x_0 + x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_t(x)d\mu_{x_0}(x) = \sigma_t(0, \mu_{x_0}). \tag{5}$$

И, наконец, в последнем разделе 6 мы обсудим как, наоборот, имеющиеся в литературе для некоторых классов функций из $\mathcal{L}$ классические оценки (некоторые более чем столетней давности) уклонений интегралов Фейера в точке позволяют получать новые оценки скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем. Отметим здесь, что получаемые так оценки справедливы не только для эргодических средних, т.е. для ЗБЧ для стационарных в узком смысле процессов, но и в случае ЗБЧ для процессов стационарных в широком смысле [10]: поскольку работающая здесь спектральная теория стационарных процессов у них общая, то и доказательства совпадают дословно.

Аналогичные результаты для сумм Фейера периодических мер и эргодической теоремы фон Неймана с дискретным временем представлены в [11] (аналоги наших результатов разделов 4 и 6), и в [12] (аналоги теорем раздела 5).

4. Переформулировка с помощью (4) и (5) на язык гармонического анализа спектрального критерия степенной скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана – теоремы 1 из [8] – немедленно дает следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\mu \in \mathcal{M}$, *и* σ_t *– ее интегралы Фейера. Для любых* $x \in \mathbb{R}$ *и* $\alpha \in [0, 2)$ *равносильны следующие соотношения:*

1) $\sigma_t(x) = O(t^{1-\alpha})$ *при* $t \to \infty$;

2) $\mu(x - \delta, x + \delta] = O(\delta^\alpha)$ *при* $\delta \to 0$.

Утверждение теоремы верно также при замене обоих "O" на "o".

При $\alpha < 1$ теорема 1 дает критерий степенного роста интегралов Фейера мер класса $\mathcal{M}$, при $\alpha > 1$ – критерий степенного убывания уклонений этих интегралов.

Замечание 1. При $\alpha = 0$ случай "O" этой теоремы реализуется тогда и только тогда, когда мера μ имеет в точке x атом положительной меры. Случай "o" при $\alpha = 0$, как показывает формула (4), соответствует эргодической теореме фон Неймана (спектральная мера μ_{f-f^*} атома положительной меры в точке 0 не имеет: см. раздел 2).

Замечание 2. В случае $\alpha = 2$ утверждение теоремы, вообще говоря, не имеет места: как для "O", так и для "o" из 2) не всегда следует 1) (см., например, замечание 2 в [9]).

Для решения популярного при исследовании уклонений сумм и интегралов Фейера вопроса о равномерности получаемых оценок нужно еще перейти в утверждениях теоремы 1 от асимптотических соотношений на языке "O" и "o" – к соответствующим оценкам с конкретными константами. Для оценок скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана это было сделано в [9]; переформулировка с помощью

(4) и (5) этих результатов на язык интегралов Фейера немедленно дает следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $\mu \in \mathcal{M}$, *и* σ_t – *ее интегралы Фейера; и пусть* $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 2)$. *Тогда:*

1. *Если мера* μ *имеет степенную особенность в точке* x, *т.е. если для некоторой положительной константы* A *при всех* $\delta > 0$ *выполняется неравенство*

$$\mu(x-\delta, x+\delta] \leqslant A\delta^{\alpha},$$

то скорость убывания (роста) интегралов Фейера $\sigma_t(x)$ – *степенная с показателем степени* $1-\alpha$, *т.е. для всех* $t > 0$

$$\sigma_t(x) \leqslant Bt^{1-\alpha},$$

где $B = A(2\pi)^{\alpha-1}\left(1+\frac{2^{\alpha-2}-1+2C}{\pi^2}\right)$, $\quad C = \begin{cases} \frac{3^{\alpha-1}}{2} + \frac{1}{2-\alpha}, & \alpha \in [0,1) \\ 3^{\alpha-1} + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}2^{\alpha-2}, & \alpha \in [1,2). \end{cases}$

2. *Если скорость убывания (роста) интегралов Фейера* $\sigma_t(x)$ – *степенная с показателем* $1-\alpha$, *т.е. если для некоторой положительной константы* B *при всех* $t > 0$ *выполняется неравенство*

$$\sigma_t(x) \leqslant Bt^{1-\alpha},$$

то мера μ *имеет степенную особенность в точке* x *с показателем степени* α, *т.е. для любого* $\delta > 0$

$$\mu(x-\delta, x+\delta] \leqslant A\delta^{\alpha}, \text{ где } A = \frac{\pi^{3-\alpha}}{2}B.$$

5. Как известно, для каждой функции $\rho(x) \in \mathcal{L}$ справедливо следующее представление ее интегралов Фейера $\sigma_t(x)$: при всех $t > 0$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$

$$\sigma_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\left(1-\frac{|\tau|}{t}\right)e^{i\tau x}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(s)e^{-i\tau s}\,ds\,d\tau$$

(см., например, формулу (1.16.1) в [2, глава I, раздел 1.16]). Рассмотрев аналогичное представление для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}$, в точке $x = 0$ по (1) получаем:

$$\sigma_t(0) = \int_{-t}^{t}\left(1-\frac{|\tau|}{t}\right)c_\tau\,d\tau. \tag{6}$$

Вернемся к скоростям сходимости в эргодической теореме фон Неймана – см. раздел 2. Как хорошо известно (теорема 18.3.1 в [5]), для каждой $g \in L_2^0(\Omega)$

$$\|A_t g\|_2^2 = \frac{1}{t^2}\int\limits_{-t}^{t}(t-|\tau|)b_\tau g d\tau;$$

поэтому для всех $t > 0$ получаем (выведенное еще Дж. фон Нейманом в [6] при оригинальном доказательстве своей эргодической теоремы) представление

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = \|A_t(f-f^*)\|_2^2 = \frac{1}{t^2}\int\limits_{-t}^{t}(t-|\tau|)b_\tau(f-f^*)d\tau,$$

т.е.

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = \frac{2\pi}{t^2}\int\limits_{-t}^{t}(t-|\tau|)c_\tau(\mu_{f-f^*})d\tau \tag{7}$$

(сопоставление равенств (6) и (7) дает еще одно доказательство формулы (4)). Известно также (см., например, теорему 18.3.1 в [5] и ее обсуждение в [9]), что в случае абсолютной непрерывности спектральной меры μ_{f-f^*} с непрерывной в точке 0 плотностью ρ справедливо асимптотическое соотношение

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = 2\pi\rho(0)t^{-1} + o(t^{-1}) \tag{8}$$

при $t \to \infty$. Как следует из (4) и (5), на языке уклонений интегралов Фейера это соответствует тому, что для любой функции $\rho \in \mathcal{L}$, непрерывной в точке x_0,

$$\sigma_t(x_0,\rho) - \rho(x_0) \to 0 \tag{9}$$

при $t \to \infty$ – хорошо известному (см., например, теорему 14 в [2, глава I, раздел 1.17]) утверждению.

Переформулировка с помощью (4) и (5) на язык гармонического анализа оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана по скорости убывания корреляционной функции $b_t(f-f^*)$ (т.е. умноженного на 2π преобразования Фурье спектральной меры μ_{f-f^*}) – теоремы 3 из [8] и уточняющей ее леммы 3 из [9] – немедленно дает следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\mu \in \mathcal{M}$, $\sigma_t(x,\mu)$ – ее интегралы Фейера, $x_0 \in \mathbb{R}$, и c_t – преобразование Фурье меры μ_{x_0} (получающейся из μ сдвигом на x_0 вправо). Тогда:*

1. $\sigma_t(x_0,\mu) \leqslant \int\limits_{-t}^{t} |c_\tau| d\tau$ *для любого* $t > 0$.
2. *Если* $c_\tau \in L_p([-t,t])$ *для некоторых* $p \in [1,+\infty]$ *и* $t > 0$, *то*

$$\sigma_t(x_0,\mu) \leqslant \|c_\tau\|_p t^{1-\frac{1}{p}}.$$

3. *Если* $c_\tau \in L_1(\mathbb{R})$, *то меры* μ_{x_0} *и* μ *абсолютно непрерывны с непрерывными (неотрицательными) плотностями* ρ_{x_0} *и* ρ, *соответственно (здесь* $\rho_{x_0}(x) = \rho(x_0 + x)$ *для всех* x*); при этом* $\rho_{x_0}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c_\tau e^{-ix\tau} d\tau$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$, *и, следовательно,* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} c_\tau d\tau = \rho_{x_0}(0) = \rho(x_0)$. *При этом для всех* $t > 0$ *будет* $\sigma_t(x_0,\mu) = \sigma_t(x_0,\rho)$, *и справедливо асимптотическое соотношение (9), причем для всех* $t > 0$

$$\sigma_t(x_0,\rho) - \rho(x_0) = -\frac{1}{t} \int\limits_{|\tau|<t} |\tau| c_\tau d\tau - \int\limits_{|\tau|\geqslant t} c_\tau d\tau.$$

4. *Если, кроме того,* $\tau c_\tau \in L_1(\mathbb{R})$, *то, более того, плотности* ρ_{x_0} *и* ρ *мер* μ_{x_0} *и* μ, *соответственно, непрерывно дифференцируемы (и* $\rho'_{x_0}(x) = \rho'(x_0 + x)$ *для всех* x*); при этом* $\rho'_{x_0}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau c_\tau e^{i\tau x} d\tau$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$. *И, следовательно,* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tau| c_\tau d\tau = (\rho')^c(x_0)$, *где* $(\rho')^c(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tau| c_\tau e^{i\tau x} d\tau$ *– тригонометрически сопряженная функция к* $\rho'(x)$ *(см.* [13, глава VIII], [14, раздел 12.8]*). При этом для всех* $t > 0$ *будет* $\sigma_t(x_0,\mu) = \sigma_t(x_0,\rho)$, *и справедливо асимптотическое соотношение*

$$\sigma_t(x_0,\rho) - \rho(x_0) = -(\rho')^c(x_0) t^{-1} + o(t^{-1}) \tag{10}$$

при $t \to \infty$, *причем для всех* $t > 0$

$$\sigma_t(x_0,\rho) - \rho(x_0) + (\rho')^c(x_0) t^{-1} = \frac{1}{t} \int\limits_{|\tau|\geqslant t} (|\tau| - t) c_\tau d\tau.$$

Оценки эргодического прототипа нашей теоремы 3–леммы 3 в [9] были конкретизированы в теореме 2 там же для популярного в приложениях случая степенного убывания корреляционных коэффициентов. Переформулировка с помощью (4) и (5) этих результатов на язык интегралов Фейера немедленно дает следующее уточнение и нашей теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть $\mu \in \mathcal{M}$, $\sigma_t(x,\mu)$ – ее интегралы Фейера, $x_0 \in \mathbb{R}$, и c_t – преобразование Фурье меры μ_{x_0} (получающейся из μ сдвигом на x_0 вправо). И пусть c_t со степенной скоростью стремится к нулю при $t \to \infty$, т.е. для некоторой положительной константы C при всех $t > 0$ выполнено неравенство $|c_t| \leqslant Ct^{-\gamma}$. Тогда:*

1. *Если $0 \leqslant \gamma < 1$, то для всех $t > 0$*

$$\sigma_t(x_0,\mu) \leqslant \frac{2C}{1-\gamma} t^{1-\gamma}.$$

2. *Если $\gamma = 1$, то для всех $t > 1$*

$$\sigma_t(x_0,\mu) \leqslant \frac{1}{\pi}\mu(\mathbb{R}) + 2C\ln t.$$

Если $\gamma > 1$, то мера μ абсолютно непрерывна с непрерывной плотностью ρ; при этом $\rho(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c_\tau e^{-i\tau x} d\tau$ для всех $x \in \mathbb{R}$, и, следовательно, $\rho(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c_\tau d\tau \leqslant \frac{1}{\pi}\mu(\mathbb{R}) + \frac{2C}{\gamma-1}$. Для всех t будет $\sigma_t(x_0,\mu) = \sigma_t(x_0,\rho)$, и справедливо асимптотическое соотношение (9), *причем:*

3. *Если $1 < \gamma < 2$, то для всех $t > 0$*

$$|\sigma_t(x_0,\rho) - \rho(x_0)| \leqslant \frac{2C}{(\gamma-1)(2-\gamma)} t^{1-\gamma}.$$

4. *Если $\gamma = 2$, то для всех $t > 1$*

$$|\sigma_t(x_0,\rho) - \rho(x_0)| \leqslant 2\left(\frac{1}{2\pi}\mu(\mathbb{R}) + C\ln t + C\right) t^{-1}.$$

5. *Если $\gamma > 2$, то, более того, плотность ρ меры μ непрерывно дифференцируема; при этом тригонометрически сопряженная к ее производной функция $(\rho')^c(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tau| c_\tau e^{i\tau x} d\tau$ корректно определена (и непрерывна) на $\mathbb{R}$; следовательно, $(\rho')^c(x_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tau| c_\tau d\tau$, и*

$|(\rho')^c(x_0)| \leqslant 2C\int\limits_0^\infty \tau^{1-\gamma}d\tau \leqslant \frac{1}{\pi}\mu(\mathbb{R}) + \frac{2C}{\gamma-2}$. *Справедливо асимптотическое соотношение* (10), *причем для всех* $t > 0$

$$\left|\sigma_t(x_0,\rho) - \rho(x_0) + (\rho')^c(x_0)t^{-1}\right| \leqslant \frac{2C}{\gamma-2}t^{1-\gamma}.$$

6. *Если, более того, преобразование Фурье меры* μ *убывает экспоненциально, т.е.* $|c_\tau| \leqslant Ae^{-B\tau}$ *для некоторых положительных констант* A *и* B *при всех* $\tau > 0$ (*в этом случае плотность* ρ *допускает аналитическое продолжение с действительной оси в полосу на плоскости комплексного переменного – см., например,* [15, глава VIII, §4, раздел 2.7]), *то*

$$\rho(x_0) \leqslant \frac{2A}{B}, \qquad |(\rho')^c(x_0)| \leqslant \frac{2A}{B^2},$$

и для всех $t > 0$

$$\left|\sigma_t(x_0,\rho) - \rho(x_0) + (\rho')^c(x_0)t^{-1}\right| \leqslant \frac{2A}{B}\left(1 + \frac{1}{Bt}\right)e^{-Bt}.$$

6. И напоследок еще раз вернемся к скоростям сходимости в эргодической теореме фон Неймана – см. раздел 2. Как уже отмечалось, в случае абсолютной непрерывности спектральной меры μ_{f-f^*} с непрерывной в точке 0 плотностью ρ справедливо асимптотическое соотношение (8) – равносильное соотношению (9), т.е. тому факту, что для любой функции $\rho \in \mathcal{L}$, непрерывной в точке x, ее интегралы Фейера $\sigma_t(x)$ сходятся к $\rho(x)$ при $t \to \infty$. Имеющиеся в литературе многочисленные уточнения (см., например, [2, глава I, §1.16]) этого хорошо известного утверждения дают возможность получать и соответствующие уточнения соотношения (8).

Например, справедлив следующий удобный достаточный признак сходимости интегралов Фейера (см. там же): для сходимости в точке $x \in \mathbb{R}$ интегралов Фейера $\sigma_t(x)$ функции $\rho \in \mathcal{L}$ к числу s достаточно, чтобы функция $\Phi_x(h) = \int\limits_0^h |\rho(x+u) + \rho(x-u) - 2s|du$ удовлетворяла асимптотическому соотношению $\Phi_x(h) = o(h)$ при $h \to 0$. Отсюда немедленно вытекает, например, следующий аналог соотношения (8) для случая, когда плотность ρ спектральной меры имеет в точке 0 разрыв первого рода, с (конечными) левосторонним пределом $\rho^-(0)$ и правосторонним $\rho^+(0)$:

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = \pi(\rho^+(0) + \rho^-(0))t^{-1} + o(t^{-1})$$

при $t \to \infty$.

Отметим, что повышение регулярности плотности ρ спектральной меры асимптотическое соотношение (8) почти не улучшает. Даже в случае ее аналитичности будет

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = 2\pi\rho(0)t^{-1} + O(t^{-2})$$

при $t \to \infty$ – см., например, [9].

Можно получать и ослабленные аналоги соотношения (8) для существенно разрывных в точке 0 функций. Например, как нетрудно заметить, ограниченность функции $\rho \in \mathcal{L}$ влечет равномерную ограниченность ее интегралов Фейера, причем если $M_1 \leqslant \rho(x) \leqslant M_2$ при всех x, то и $M_1 \leqslant \sigma_t(x) \leqslant M_2$ для всех $t > 0$ и x (доказательство ничем не отличается от случая сумм Фейера в [13, глава I, §48]). Отсюда с учетом (4) немедленно получаются двусторонние оценки скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана в случае ограниченности плотности ρ спектральной меры: если $M_1 \leqslant \rho(x) \leqslant M_2$ при всех x, то

$$2\pi M_1 t^{-1} \leqslant \|A_t f - f^*\|_2^2 \leqslant 2\pi M_2 t^{-1}$$

для всех $t > 0$.

Список литературы

1. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, ГИТТЛ, М.-Л. (1947)
2. Е. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье*, ГИТТЛ, М.-Л. (1948)
3. Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Специальный курс*, Гос. изд-во физ.-мат. лит., М. (1960)
4. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М. (1980)
5. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М. (1965)
6. J. von Neumann, *Proof of the quasi-ergodic hypothesis.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **18**, No. 1 (1932), 70–82.
7. А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин, *Оценки скоростей сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа.* — Тр. ММО **77**, No. 1 (2016), 1–66.
8. А. Г. Качуровский, А. В. Решетенко, *О скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем.* — Мат. сб. **201**, No. 4 (2010), 25–32.

9. Н. А. Джулай, А. Г. Качуровский, *Константы оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем.* — Сиб. мат. журн. **52**, No. 5 (2011), 1039–1052.
10. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М. (1989)
11. А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин, *Суммы Фейера периодических мер и эргодическая теорема фон Неймана.* — Докл. РАН **481**, No. 4 (2018).
12. А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин, *Суммы Фейера и коэффициенты Фурье периодических мер.* — Докл. РАН **482**, No. 4 (2018).
13. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М. (1961)
14. Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении.* Т. 2, Мир, М. (1985)
15. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М. (1976)

Kachurovskii A. G. The Fejer integrals and the von Neumann ergodic theorem with continuous time.

The Fejer integrals for finite measures on the real line and the norms of the deviations from the limit in the von Neumann ergodic theorem both are calculating, in fact, with the same formulas (by integrating of the Fejer kernels) – and so, this ergodic theorem is a statement about the asymptotic of the growth of the Fejer integrals at zero point of the spectral measure of corresponding dynamical system. It gives a possibility to rework well-known estimates of the rates of convergence in the von Neumann ergodic theorem into the estimates of the Fejer integrals in the point for finite measures: for example, we obtain natural criteria of polynomial growth and polynomial decay of these integrals. And vice versa, numerous in the literature estimates of the deviations of Fejer integrals in the point allow to obtain new estimates of the rate of convergence in this ergodic theorem.

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. акад. Коптюга 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: agk@math.nsc.ru

Поступило 12 ноября 2018 г.