Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

П. Н. Иевлев

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА В d-МЕРНОМ ШАРЕ

§1. Введение

В настоящей работе мы рассматриваем процессы, связанные с начально-краевыми задачами Дирихле и Неймана для семейства уравнений

$$2u_t = \sigma^2 \Delta u, \quad x \in D, \quad \operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0, \tag{1}$$

где область D – это единичный шар в $\mathbb{R}^d$.

При вещественных σ уравнение (1) есть уравнение теплопроводности, а случай $\sigma = \exp(i\pi/4)$ соответствует уравнению Шрёдингера.

Хорошо известно вероятностное представление решения задачи Коши $u(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ для уравнения (1) при вещественных σ:

$$u(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}\, f(\mathbf{x} + \sigma w(t)), \tag{2}$$

где $w(t)$ – это стандартный d-мерный винеровский процесс. При комплексных σ правая часть равенства (2) не имеет смысла, так как значения начальной функции f в $\mathbb{C}^d$ вообще говоря не определены. В работе [5] был предложен способ построения вероятностного представления решения указанной задачи Коши на прямой, связанный с разложеним функции из $L_2(\mathbb{R})$ в сумму двух функций – аналитической в верхней полуплоскости и аналитической в нижней. В работе автора [4] этот результат был обобщён на многомерный случай. Однако, в настоящей работе мы будем отталкиваться от идей, использованных в статьях [6, 7]. В них был предложен способ аппроксимации начальной функции f целыми аналитическими функциями, позволяющий придать смысл правой части (2) в том числе и для комплексных σ. В этих же работах было показано, что такое представление действительно имеет вероятностный характер, так как в представлении (2)

Ключевые слова: предельные теоремы, уравнение Шрёдингера, начально-краевые задачи, эволюционные уравнения, гиперсферические функции Бесселя.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (грант 17-11-01136).

винеровский процесс может быть заменён его аппроксимацией суммами независимых случайных величин. В работах [2] и [3] тот же способ аппроксимации начальной функции f использовался для решения начально-краевых задач Дирихле и Неймана в двумерных областях. Данная работа является непосредственным продолжением этих работ и обобщает их результат на случай, когда областью D является шар произвольной размерности.

Следует отметить, что для вещественных σ вероятностное представление решений начально-краевых задач для уравнения (1) известно (см. [1]):

$$u(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}\, f(X_{\mathbf{x}}(t)),$$

где $X_{\mathbf{x}}(t)$ – это процесс, траектории которого получаются некоторой деформацией траекторий винеровского процесса $w_{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x} + \sigma w(t)$. Для задачи Дирихле

$$u\big|_{\partial D} = \gamma_0 f,$$

где $\gamma_0 \colon W_2^2(D) \to W_2^{3/2}(\partial D)$ – оператор сужения на границу, в качестве $X_{\mathbf{x}}(t)$ можно взять винеровский процесс, остановленный в момент τ первого достижения границы: $X_{\mathbf{x}}(t) = w_{\mathbf{x}}(t \wedge \tau)$. Для решения задачи Неймана

$$\partial_n u\big|_{\partial D} = \gamma_0 \partial_n f$$

процесс $X_{\mathbf{x}}(t)$ представляет из себя винеровский процесс, отражающийся от границы при её достижении.

Задача о построении отражающегося процесса называется задачей Скорохода. Подробный обзор можно найти в работе [8].

Для рассматриваемого нами комплексного процесса $x + \sigma w(t)$ как понятие достижения границы, так и понятие отражения от границы теряют смысл. Поэтому для построения решений мы пользуемся другим методом (предложенным в работах [2] и [3]). В основе этого метода лежит идеология теории обобщённых функций. Именно, вместо того, чтобы деформировать траекторию процесса, превращая его в отражённый или остановленный, мы будем специальным образом менять начальную функцию. Для каждой начальной функции f, заданной в шаре, мы построим последовательности функций $\{f^M\}$ (разные для задач Дирихле и Неймана), аналитичные в $\mathbb{C}^d$, так чтобы для $\sigma \in \mathbb{R}$ выполнялось соотношение

$$\mathbf{E}\, f(X_{\mathbf{x}}(t)) = \lim_{M\to\infty} \mathbf{E}\, f^M(w_{\mathbf{x}}(t)), \tag{3}$$

а правая часть (3) была корректно определена и для комлексных σ и давала бы решение начально-краевой задачи.

Кроме того, мы покажем, что в вероятностном представлении решений правой частью (3) винеровский процесс может быть заменён его аппроксимацией последовательностью сложных пуассоновских процессов. Также будут получены оценки скорости сходимости в пространстве $L_2(D)$ вероятностных аппроксимаций к точным решениям.

§2. Обозначения и вспомогательные леммы

2.1. Сферические гармоники. Положим $x = |\mathbf{x}|$ и $\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/x$. Векторы со шляпками будем также использовать вместо координат на сфере S^{d-1}. Сужение меры Лебега на S^{d-1} обозначаем $d\widehat{\mathbf{x}}$.

Пусть $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid x < 1\}$ – d-мерный единичный шар. Как известно, оператор Лапласа может быть записан в виде ([9], формула (2.1))

$$\Delta = \frac{1}{x^{d-1}} \frac{\partial}{\partial x} x^{d-1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \Delta_{S^{d-1}},$$

где $\Delta_{S^{d-1}}$ называется оператором Лапласа–Бельтрами на сфере S^{d-1}. Собственные значения оператора Лапласа–Бельтрами хорошо известны: $\lambda(\lambda + d - 2)$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, при этом каждое из них является вырожденным. Число вырождения $d(\lambda)$ в общем случае даётся формулой ([9], формула (2.46)). Фиксируем в каждом из собственных подпространств ортонормированный в $L_2(S^{d-1})$ базис $\{Y_\lambda^\mu\}_\mu$. Вся система собственных функций $\{Y_\lambda^\mu \colon \mu = 1, \ldots, d(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{Z}_+\}$ является ортогональным базисом в $L_2(S^{d-1})$. Справедливо соотношение ортогональности

$$\int\limits_{S^{d-1}} Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{\lambda'}^{\mu'}(\widehat{\mathbf{x}})}\, d\widehat{\mathbf{x}} = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}. \tag{4}$$

Функции Y_λ^μ называются сферическими гармониками. Любая функция g из $L_2(S^{d-1})$ может быть разложена в ряд

$$g(\widehat{\mathbf{x}}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{d(\lambda)} g_{\lambda\mu} Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}}).$$

В дальнейшем мы будем опускать указание на индексы суммирования в таких суммах, предполагая, что значки λ и μ пробегают все свои возможные значения.

Рассмотрим сферические гармоники, отвечающие собственному значению $\lambda(\lambda+d-2)$. Такие гармоники являются сужениями однородных гармонических полиномов порядка λ на сферу S^{d-1}. Следовательно, $x^\lambda Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})$ – это гармонический полином.

2.2. Гармоническое продолжение. Пусть $\gamma_0\colon W_2^2(D)\to W_2^{3/2}(\partial D)$ – оператор сужения на границу ([11, с. 187]) и $H_0\colon W_2^{3/2}(\partial D)\to W_2^2(D)$ – оператор гармонического продолжения ([15, §9, с. 224]), заданный формулой

$$(H_0 g)(\mathbf{x}) = \sum g_{\lambda\mu} x^\lambda Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}}).$$

Можно показать, что оператор H_0 есть интегральный оператор с ядром Пуассона ([10], с. 145)

$$h_0(\mathbf{x},\ \widehat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{\omega_{d-1}}\frac{1-x^2}{|\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{y}}|^d} = \sum x^\lambda Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})\overline{Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{y}})}, \tag{5}$$

где ω_{d-1} – площадь $(d-1)$-мерной сферы.

Пусть $H=H_0\gamma_0\colon W_2^2(D)\to W_2^2(D)$ есть оператор проекции на гармоническую компоненту.

Пусть $\widetilde{H}_0\colon W_2^{1/2}(\partial D)\to W_2^2(D)$ задаётся формулой

$$(\widetilde{H}_0 g)(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda\neq 0} g_{\lambda\mu}\frac{x^\lambda}{\lambda} Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}}).$$

Если $\int\limits_{\partial D} g(\widehat{\mathbf{x}})\,d\widehat{\mathbf{x}} = 0$, то $f_h=\widetilde{H}_0 g$ – это гармоническая в D функция, удовлетворяющая условиям $\gamma_0\partial_n f_h = g$ и интеграл от f_h по шару равен нулю. Иначе говоря, $\widetilde{H}_0$ – это оператор гармонического продолжения, связанный с задачей Неймана.

Для ядра $\widetilde{h}_0$ справедлива формула

$$\widetilde{h}_0(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{\omega_{d-1}}\frac{1}{2-n}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{y}}|^{d-2}} - \frac{1}{|\widehat{\mathbf{y}}x-\widehat{\mathbf{x}}|^{d-2}}\right) = \sum_{\lambda\neq 0}\frac{x^\lambda}{\lambda} Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})\overline{Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{y}})}.$$

Положим $\widetilde{H}=\widetilde{H}_0\gamma_0\partial_n\colon W_2^2(D)\to W_2^2(D)$. Этот оператор тоже является проектором на гармоническую компоненту.

2.3. Собственные функции оператора Лапласа с условиями Дирихле или Неймана. Здесь и далее мы обозначаем

$$\alpha = d/2 - 1.$$

Собственные функции оператора Лапласа с условиями Дирихле в d-мерном шаре имеют вид

$$j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}}), \tag{6}$$

где j^d_λ – d-мерные гиперсферические функции Бесселя, являющиеся решениями радиальной части уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^d$ и связанные с обычными функциями Бесселя J_ν соотношением ([9], формула (4.24))

$$j^d_\lambda(x) = C_\alpha \frac{J_{\lambda+\alpha}(x)}{x^\alpha}, \qquad C_\alpha = \begin{cases} 1 & d \in 2\mathbb{Z}, \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & d \notin 2\mathbb{Z} \end{cases} \tag{7}$$

а $\varkappa_{\lambda k}$, $k \geqslant 0$, – это k-ый нуль функции $J_{\lambda+\alpha}$. Собственные значения оператора Лапласа с условиями Дирихле, отвечающие этим собственным функциям, суть $\varkappa^2_{\lambda k}$.

Введём дополнительно другую нумерацию для нормированных в пространстве $L_2(D)$ собственных функций, обозначая через s_m m-ую функцию в списке $j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}})/n_{\lambda\mu k}$ ($n_{\lambda\mu k}$ – нормировка собственных функций в L_2), упорядоченном по возрастанию собственных чисел $\varkappa^2_{\lambda k}$, а само соответствующее ей собственное число $\varkappa^2_{\lambda k}$ обозначим через $\varkappa^2_m$. Это нужно для того, чтобы воспользоваться асимптотикой Вейля ([12, с. 205, формула (17.3.6)]) для собственных значений оператора Лапласа с условиями Дирихле:

$$\varkappa^2_m \sim C m^{2/d} \text{ при } m \to \infty. \tag{8}$$

Лемма 2.1. *Функция f_0 класса $W^{2,0}_2(D)$ может быть разложена в ряд по собственным функциям оператора Лапласа с условиями Дирихле:*

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum c^0_m s_m(\mathbf{x}) = \sum c^0_{\lambda\mu k} j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}}),$$

при этом её соболевская норма может быть оценена с двух сторон как

$$\|f_0\|^2_{W^2_2(D)} \asymp \sum |c^0_m|^2 m^{4/d}.$$

Утверждение леммы следует из второго основного неравенства для эллиптического оператора ([15, гл. III, §8, с. 213]).

Собственными функциями оператора Лапласа с граничными условиями Неймана являются функции

$$j_\lambda^d(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\mathbf{x}),$$

где $\widetilde{\varkappa}_{\lambda k},\ k \geqslant 0$, – нули производной $J'_{\lambda+\alpha}(x)$.

Аналогично тому, как мы это делали для собственных функций оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле, введём вторую нумерацию для этих собственных функций. А именно, обозначим через $\widetilde{s}_m$ m-ую функцию в списке $j_\lambda^d(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})/\widetilde{n}_{\lambda\mu k}$ ($\widetilde{n}_{\lambda\mu k}$ – нормировка собственных функций в L_2), упорядоченном по возрастанию собственных чисел $\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}$, а само соответствующее ей собственное число $\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k}$ обозначим через $\widetilde{\varkappa}^2_m$. При этом асимптотика Вейля не изменится

$$\widetilde{\varkappa}^2_m \sim C m^{2/d} \text{ при } m \to \infty. \tag{9}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть функция f_0 класса $W_2^2(D)$ удовлетворяет условию $\gamma_0 \partial_n f_0 = 0$. Тогда она может быть разложена в ряд по собственным функциям оператора Лапласа с условиями Неймана:*

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum c_m^0 \widetilde{s}_m(\mathbf{x}) = \sum c^0_{\lambda\mu k} j_\lambda^d(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}}),$$

при этом её соболевская норма может быть оценена с двух сторон как

$$\|f_0\|^2_{W_2^2(D)} \asymp |c_0^0|^2 + \sum |c_m^0|^2 m^{4/d}.$$

2.4. Технические леммы. Нам потребуются выражения для интегралов вида

$$\int_0^\infty x^{d-1} j_\lambda^d(ux) R(x)\, dx,$$

где u – параметр, а R – это $x^\lambda 1_{[0,1]}(x)$, $j_\lambda^d(vx)$ или $j_\lambda^d(vx) 1_{[0,1]}(x)$. Можно показать, что для них справедливы соотношения, аналогичные соотношениям теории обычных бесселевых функций. Эти интегралы вычислены в следующих трёх леммах.

Лемма 2.3. *Для любых $u,\, v > 0$ справедливо соотношение*

$$\int_0^\infty x^{d-1} j_\lambda^d(ux)\, j_\lambda^d(vx)\ dx = \frac{C_\alpha^2}{u^{d-1}} \delta(u - v), \tag{10}$$

где δ – δ-функция Дирака.

Утверждение леммы следует из определения гиперсферических функций Бесселя (7) и известного ([13], с. 499, формула 3) соотношения для обычных функций Бесселя.

Лемма 2.4. *Справедливо соотношение*

$$\int\limits_0^1 x^{d-1} j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x)\, j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k'} x)\ dx = \frac{\delta_{mm'}}{2}\Big(j_{\lambda+1}^d(\varkappa_{\lambda k})\Big)^2.$$

Утверждение леммы вытекает из определения гиперсферических функций Бесселя (7) и известного ([13], с. 633, формула 4) соотношения для обычных функций Бесселя.

Лемма 2.5. *При* $u \geqslant 0$ *справедливо соотношение*

$$\int\limits_0^1 x^{d-1} j_\lambda^d(ux)\, x^\lambda\ dx = \frac{j_{\lambda+1}^d(u)}{u}.$$

Утверждение легко выводится из леммы 4.13 книги [10] (с. 170).

Воспользуемся соотношением ортогональности (4) и леммой 2.4, чтобы вычислить норму $j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})$ в $L_2(D)$

$$\begin{aligned} n_{\lambda\mu k}^2 &= \|j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})\|_{L_2(D)}^2 \\ &= \int\limits_0^1 x^{d-1}\big(j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x)\big)^2\ dx \int\limits_{S^{d-1}} |Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})|\ d\widehat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\big(j_{\lambda+1}(\varkappa_{\lambda k})\big)^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично можно вычислить норму функции $j_\lambda^d(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})$. Для этого нам понадобится формула ([13], с. 634, формула 6)

$$\begin{aligned} \widetilde{n}_{\lambda\mu k}^2 &= \|j_\lambda^d(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})\|_{L_2(D)}^2 \\ &= \int\limits_0^1 x^{d-1}\big(j_\lambda^d(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x)\big)^2\ dx = \frac{C_\alpha^2}{\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}^2}\int\limits_0^1 x\big(J_{\lambda+\alpha}(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x)\big)^2\ dx \\ &\qquad\qquad = \frac{C_\alpha^2}{\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}^{2\alpha}}\frac{(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}^2 - (\lambda+\alpha)^2)}{2\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}^2} J_{\lambda+\alpha}^2(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}). \end{aligned}$$

Окончательно,

$$\widetilde{n}_{\lambda\mu k}^2 = \frac{\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}^2 - (\lambda+\alpha)^2}{2\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}^2}\big(j_\lambda^d(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k})\big)^2. \tag{12}$$

Следующая лемма помогает при вычислении преобразований Фурье функций, данных в виде разложения по решениям уравнения Гельмгольца в шаре.

Лемма 2.6. *Пусть функция имеет вид произведения* $f(\mathbf{x}) = R(x) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})$. *Тогда её преобразование Фурье – это функция* $\widehat{f}(\mathbf{p}) = S(p) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{p}})$, *где*

$$S(p) = (-i)^\lambda (d-2)!! \omega_{d-1} \int\limits_0^\infty x^{d-1}\, j_\lambda^d(px)\, R(x)\; dx.$$

Доказательство использует известную формулу Релея для разложения плоской волны ([9], (4.25))

$$e^{i\mathbf{px}} = (d-2)!! \omega_{d-1} \sum i^\lambda j_\lambda^d(px)\, Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})\, \overline{Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{p}})}.$$

Пользуясь этой леммой и леммой 2.3, получим, что преобразование Фурье функции $j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})$ равно

$$(-i)^\lambda (d-2)!!\, \omega_{d-1} \frac{C_\alpha^2}{\varkappa_{\lambda k}^{d-1}}\; \delta(p - \varkappa_{\lambda k})\; Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{p}}), \tag{13}$$

то есть представляет собой заряд, сосредоточенный на сфере радиуса $\varkappa_{\lambda k}$. Следовательно, справедливо представление

$$j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}}) = (-i)^\lambda \frac{(d-2)!! \omega_{d-1} C_\alpha^2}{(2\pi)^d \varkappa_{\lambda k}^{d-1}} \int\limits_{S_{\varkappa_{\lambda k}}^{d-1}} Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{p}}) e^{-i\mathbf{px}}\; d\widehat{\mathbf{p}}.$$

Делая замену переменных в интеграле, получаем следующее утверждение:

Лемма 2.7. *Функция* $j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})$ *является аналитической функцией* d *переменных и представляется в виде преобразования Фурье некоторого заряда на сфере. Именно, справедлива формула*

$$j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}}) = (-i)^\lambda \frac{(d-2)!! \omega_{d-1} C_\alpha^2}{(2\pi)^d} \int\limits_{S^{d-1}} Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{p}}) e^{-i\varkappa_{\lambda k} \widehat{\mathbf{p}}\mathbf{x}}\; d\widehat{\mathbf{p}}.$$

Кроме того, нам потребуется следующее свойство гармонических функций.

Лемма 2.8. *Для любой гармонической фунции f и случайного вектора ξ, распределение которого инвариантно относительно поворотов, справедливо соотношение*

$$\mathbf{E}\, f(\mathbf{x}+\xi) = f(\mathbf{x}).$$

Утверждение теоремы следует из теоремы о среднем гармонической функции ([10, §2, теорема 1.1]).

§3. Задача Дирихле

3.1. Полугруппа, связанная с задачей Дирихле. Пусть начальная функция f задачи

$$\begin{cases} 2u_t = \sigma^2 \Delta u, \ \mathbf{x} \in D, \\ u(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \\ u\big|_{\partial D} = \gamma_0 f \end{cases} \tag{14}$$

принадлежит классу $W_2^2(D)$. Положим

$$f_h(\mathbf{x}) = (Hf)(\mathbf{x}).$$

Обозначим через $c_{\lambda\mu}^h$ коэффициенты разложения $\gamma_0 f$ по базису $\{Y_\lambda^\mu\}$. Тогда

$$f_h(\mathbf{x}) = \sum c_{\lambda\mu}^h x^\lambda Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}}).$$

При этом f_h принадлежит классу $W_2^2(D)$ и справедливо

$$\sum \lambda^3 |c_{\lambda\mu}^h|^2 < \infty.$$

Для каждого $M > 0$ определим гармонический полином f_h^M равенством

$$f_h^M(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda \leqslant M^{1/d}} c_{\lambda\mu}^h x^\lambda Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}}). \tag{15}$$

Определим функциюf_0, полагая $f_0 = f - f_h$. Ясно, что $f_0 \in W_2^{2,0}(D)$. Разложим f_0 по собственным функциям оператора Лапласа с условиями Дирихле (лемма 2.1)

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum c_k^0 s_k(\mathbf{x}) = \sum c_{\lambda\mu k}^0 j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}}).$$

Для $M > 0$ определим функцию f_0^M равенством

$$f_0^M(\mathbf{x}) = \sum_{m \leqslant M} c_m^0 s_m(\mathbf{x}).$$

Из леммы 2.7 следует, что f_0^M аналитическая функция d переменных. Наконец, положим $f^M = f_0^M + f_h^M$.

Теперь определим полугруппу P^t, полагая для $f \in W_2^2(D)$

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = (L_2) \lim_{M\to\infty} \mathbf{E}\, f^M(\mathbf{x} + \sigma w(t)).$$

Из леммы (2.8) следует, что

$$\mathbf{E}\, f_h^M(\mathbf{x} + \sigma w(t)) = f_h^M(\mathbf{x}).$$

Пользуясь леммой 2.7, получим

$$\mathbf{E}\, f_0^M(\mathbf{x} + \sigma w(t)) = \sum_{m\leqslant M} c_m^0 \exp\left(-\frac{\sigma^2 \varkappa_m^2 t}{2}\right) s_m(\mathbf{x}). \qquad (16)$$

Таким образом,

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \sum c_m^0 \exp\left(-\frac{\sigma^2 \varkappa_m^2 t}{2}\right) s_m(\mathbf{x}) + f_h(\mathbf{x}). \qquad (17)$$

Покажем, что при $M \to \infty$ имеет место сходимость $P^t f^M \to P^t f$.

Теорема 3.1. *Пусть $f \in W_2^2(D)$, $u(t, \mathbf{x}) = (P^t f)(\mathbf{x})$ и $u_M(t,\ \mathbf{x}) = (P^t f^M)(\mathbf{x})$. Тогда существует число $C > 0$, такое что*

$$\sup_{t\geqslant 0} \|u(t,\,\cdot\,) - u_M(t,\,\cdot\,)\|_{L_2(D)} \leqslant \frac{C}{M^{2/d}} \|f\|_{W_2^2(D)}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|u(t,\,\cdot\,) - u_M(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(D)} \leqslant 2\|f_0 - f_0^M\|^2_{L_2(D)} + 2\|f_h - f_h^M\|^2_{L_2(D)}.$$

В силу выбранной нормировки, первое слагаемое оценивается через хвост ряда $|c_k^0|^2$, тогда как члены разложения f_h не нормированы в $L_2(D)$:

$$\|x^\lambda Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})\|^2_{L_2(D)} = \int_0^1 x^{2\lambda} x^{d-1}\ dx \int\limits_{S^{d-1}} |Y_\lambda^\mu(\mathbf{x})|^2\ d\widehat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2\lambda + 2d}.$$

При $\lambda \geqslant M^{1/d}$ справедливо

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda + d} \leqslant \frac{\lambda^3}{M^{4/d}}$$

Следовательно,

$$\|u(t,\cdot)-u_M(t,\cdot)\|^2_{L_2(D)} \leqslant \frac{C}{M^{4/d}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|c_m^0|^2 m^{4/d}+\sum |c^h_{\lambda\mu k}|^2\lambda^3\right)$$
$$\leqslant \frac{C}{M^{4/d}}\left(\|f_0\|^2_{W_2^2(D)}+\|\gamma_0 f\|^2_{W_2^{3/2}(\partial D)}\right)\leqslant \frac{C}{M^{4/d}}\|f\|^2_{W_2^2(D)}.$$

В последнем неравенстве использована теорема о следе. □

3.2. Формулы для ядер. Получим теперь явные формулы для ядра оператора P^t. Подставим в (17) выражение для коэффициентов Фурье $c_m^0=(f_0,\ s_m)_{L_2(D)}$ и сменим порядок интегрирования. Получим

$$(P^t f)(\mathbf{x})=\int f_0(\mathbf{y})R_t(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}+f_h(\mathbf{x}), \tag{18}$$

где

$$R_t(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\sum s_m(\mathbf{x})\overline{s_m(\mathbf{y})}\exp\left(-\frac{\sigma^2\varkappa_m^2 t}{2}\right). \tag{19}$$

Подставим в (18) $f_0=f-f_h$ и $f_h=Hf$. Тогда

$$(P^t f)(\mathbf{x})=\int\limits_D f(\mathbf{y})R_t(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\,d\mathbf{y}+\int_{\partial D}(\gamma_0 f)(\widehat{\mathbf{y}})\,Q_t(\mathbf{x},\ \widehat{\mathbf{y}})\,d\widehat{\mathbf{y}},$$

где

$$Q_t(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}})=h_0(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}})-\int\limits_D R_t(\mathbf{x},\ \mathbf{u})\,h_0(\mathbf{u},\ \widehat{\mathbf{y}})\,d\mathbf{u}.$$

Вычислим второе слагаемое ядра Q_t. Первым шагом подставим в разложение R_t (17) явный вид нормированных собственных функций (формула (11)):

$$R_t(\mathbf{x},\mathbf{u})=\sum\frac{j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k}x)Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})}{n_{\lambda\mu k}}\frac{j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k}u)\overline{Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{u}})}}{n_{\lambda\mu k}}\exp\left(-\frac{\sigma^2\varkappa_{\lambda k}^2 t}{2}\right).$$

Затем воспользуемся известным разложением для ядра Пуассона

$$h_0(\mathbf{u},\widehat{\mathbf{y}})=\sum u^\lambda Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{u}})\overline{Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{y}})}.$$

Наконец применим соотношение ортогональности для сферических гармоник (4) и лемму 2.5

$$\int\limits_D R_t(\mathbf{x},\ \mathbf{u})\, h_0(\mathbf{u},\ \widehat{\mathbf{y}})\ d\mathbf{u}$$

$$= \sum \frac{1}{n^2_{\lambda\mu k}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \varkappa^2_{\lambda k} t}{2}\right) j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}}) \overline{Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{y}})} \int\limits_0^1 y^{d-1} j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} y) y^\lambda\, dy$$

$$= \sum 2 \left(j^d_{\lambda+1}(\varkappa_{\lambda k})\right)^{-2} \frac{j^d_{\lambda+1}(\varkappa_{\lambda k})}{\varkappa_{\lambda k}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \varkappa^2_{\lambda k} t}{2}\right) j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}}) \overline{Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{y}})}.$$

Окончательно,

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \int\limits_D f(\mathbf{y}) R_t(\mathbf{x},\, \mathbf{y})\ d\mathbf{y} + \int\limits_{\partial D} (\gamma_0 f)(\widehat{\mathbf{y}}) Q_t(\mathbf{x},\, \widehat{\mathbf{y}})\, d\widehat{\mathbf{y}}, \tag{20}$$

где

$$Q_t(\mathbf{x},\, \widehat{\mathbf{y}}) = h_0(\mathbf{x},\, \widehat{\mathbf{y}}) - 2 \sum \frac{\exp\left(-\sigma^2 \varkappa^2_{\lambda k} t/2\right)}{\varkappa_{\lambda k}\, j^d_{\lambda+1}(\varkappa_{\lambda k})} j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}}) \overline{Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{y}})}$$

и

$$R_t(\mathbf{x},\, \mathbf{u}) = 2 \sum \frac{\exp\left(-\sigma^2 \varkappa^2_{\lambda k} t/2\right)}{\left(j^d_{\lambda+1}(\varkappa_{\lambda k})\right)^2} j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} x) j^d_\lambda(\varkappa_{\lambda k} u) Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}}) \overline{Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{u}})}.$$

Как отмечалось в [3], в случае вещественного σ формула (20) имеет простой вероятностный смысл. Именно, для фиксированных $(t,\, \mathbf{x})$ формула (20) задаёт распределение винеровского процесса в момент времени t, выпущенного из точки $x \in D$ и прилипающего к границе ∂D в момент первого достижения. Функция $R_t(\mathbf{x},\, \cdot\,)$ есть плотность меры в области D, отвечающая тем траекториям $x + \sigma w(t)$, которые к моменту t ещё не вышли на границу, а $Q_t(\mathbf{x},\, \cdot\,)$ есть плотность меры на границе области, отвечающая распределению значания процесса в момент первого достижения границы.

При $\operatorname{Re} \sigma^2 > 0$ полученные формулы для фундаментального решения того же типа, что и для вещественного σ, однако $R_t(\mathbf{x},\, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$ и $Q_t(\mathbf{x},\, \widehat{\mathbf{y}})\, d\widehat{\mathbf{y}}$ теперь не вероятностные меры, а комплекснозначные заряды внутри круга D и на его границе ∂D соответственно. При этом сохраняется свойство

$$\int\limits_{D} R_t(\mathbf{x},\,\mathbf{y})\;d\mathbf{y} + \int\limits_{\partial D} Q_t(\mathbf{x},\,\widehat{\mathbf{y}})\;d\widehat{\mathbf{y}} = 1, \tag{21}$$

вытекающее из следующего наблюдения: $P^t 1 = 1$.

В случае же $\operatorname{Re}\sigma^2 = 0$ экспоненциальные сомножители по модулю равны единице, что влечёт расходимость рядов для R_t и Q_t. Соответственно, при фиксированных $(t,\,\mathbf{x})$ выражение $R_t(\mathbf{x},\,\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$ является теперь не мерой, а лишь функционалом, заданным на множестве конечных линейных комбинаций функций s_m. В частности, это означает, что при фиксированных $(t,\,\mathbf{x})$ невозможно придать смысл выражению

$$\int\limits_{D} f(\mathbf{y})\,R_t(\mathbf{x},\,\mathbf{y})\;d\mathbf{y} \tag{22}$$

для произвольного $f \in L_2(D)$. Однако мы можем, фиксировав $t > 0$, определить (22) при почти всех по мере Лебега $\mathbf{x} \in D$, продолжая оператор

$$\mathcal{U}_t\colon f \mapsto \int\limits_{D} f(\mathbf{y}) R_t(\mathbf{x},\,\mathbf{y})\;d\mathbf{y}$$

по изометрии (19) до унитарного оператора $\mathcal{U}_t\colon L_2(D) \to L_2(D)$.

§4. Задача Неймана

4.1. Полугруппа, связанная с задачей Неймана. В этом параграфе мы построим полугруппу, действующую на $f \in W_2^2(D)$, которая даёт решение задачи Неймана

$$\begin{cases} 2u_t = \sigma^2 \Delta u, \;\; \mathbf{x} \in D, \\ u(0,\,\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = \gamma_0 \dfrac{\partial f}{\partial n} \end{cases} \tag{23}$$

в том случае, когда выполнено условие разрешимости

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\;d\widehat{\mathbf{y}} = 0. \tag{24}$$

Если условие разрешимости не выполнено, построенная полугруппа будет давать решение некоторой вспомогательной задачи Неймана.

Через $\chi(\mathbf{x})$ обозначим функцию

$$\chi(\mathbf{x}) = \frac{x^2}{2|D|d}.$$

Функция χ очевидно является бигармонической и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial \chi}{\partial n}\, d\widehat{\mathbf{y}} = 1. \tag{25}$$

Рассмотрим $f \in W_2^2(D)$. Выделим из неё бигармоническую компоненту f_b, полагая

$$f_b(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\widehat{\mathbf{y}}.$$

Из (25) следует, что

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\widehat{\mathbf{y}} = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f_b}{\partial n}\, d\widehat{\mathbf{y}}.$$

Функция $f_1 = f - f_b$ удовлетворяет условию разрешимости задачи Неймана (24). Положим далее

$$f_h(\mathbf{x}) = (\widetilde{H} f_1)(\mathbf{x}).$$

Обозначим через $c^h_{\lambda\mu}$ коэффициенты разложения функции $\gamma_0 \partial_n f_1$ по базису $\{Y^\mu_\lambda\}$. Тогда

$$f_h(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda \neq 0} c^h_{\lambda\mu} \frac{x^\lambda}{\lambda} Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}}).$$

При этом f_h принадлежит классу $W_2^2(D)$ и справедливо

$$\sum \lambda |c^h_{\lambda\mu}|^2 < \infty.$$

Для каждого $M > 0$ определим гармонический полином f_h^M, полагая

$$f_h^M(\mathbf{x}) = \sum_{0 \neq \lambda \leqslant M^{1/d}} c^h_{\lambda\mu} \frac{x^\lambda}{\lambda} Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}}).$$

Рассмотрим теперь функцию $f_0 = f_1 - f_h$. Ясно, что f_0 удовлетворяет $\gamma_0 \partial_n f_0 = 0$. Разложим её в ряд по собственным функциям оператора Лапласа с условиями Неймана (лемма 2.2)

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum c^0_m \widetilde{s}_m(\mathbf{x}) = \sum c^0_{\lambda\mu k} j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}}).$$

Определим функцию f_0^M, полагая

$$f_0^M(\mathbf{x}) = \sum_{m \leqslant M} c_m^0 \widetilde{s}_m(\mathbf{x}).$$

Из леммы 2.7 следует, что f_0^M аналитическая функция d переменных. Наконец положим

$$f^M = f_b + f_0^M + f_h^M. \tag{26}$$

Теперь определим полугруппу P^t, полагая для $f \in W_2^2(D)$

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = (L_2) \lim_{M \to \infty} \mathbf{E}\, f^M(\mathbf{x} + \sigma w(t)).$$

Для бигармонической компоненты f_b справедливо

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\, f_b(\mathbf{x} + \sigma w(t)) &= \frac{\mathbf{E}\,(x + \sigma w(t))^2}{2|D|d} \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\widehat{\mathbf{y}} \\ &= f_b(\mathbf{x}) + \frac{\sigma^2 t}{2|D|d} \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\widehat{\mathbf{y}}.\end{aligned}$$

Из леммы (2.8) следует, что

$$\mathbf{E}\, f_h^M(\mathbf{x} + \sigma w(t)) = f_h^M(\mathbf{x}).$$

Для f_0^M, пользуясь представлением из леммы (2.7), получим

$$\mathbf{E}\, f_0^M(\mathbf{x} + \sigma w(t)) = \sum_{m \leqslant M} c_m^0 \exp\left(-\frac{\sigma^2 \widetilde{\varkappa}_m^2 t}{2}\right) \widetilde{s}_m(\mathbf{x}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}(P^t f)(\mathbf{x}) = f_b(\mathbf{x}) &+ \frac{\sigma^2 t}{2|D|d} \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\widehat{\mathbf{y}} \\ &+ \sum c_m^0 \exp\left(-\frac{\sigma^2 \widetilde{\varkappa}_m^2 t}{2}\right) \widetilde{s}_m(\mathbf{x}) + f_h(\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{27}$$

Покажем, что имеет место сходимость $P^t f^M \to P^t f$.

Теорема 4.1. *Пусть $f \in W_2^2(D)$, $u(t, \mathbf{x}) = (P^t f)(\mathbf{x})$ и $u_M(t, \mathbf{x}) = (P^t f^M)(\mathbf{x})$. Тогда существует число $C > 0$, такое что*

$$\sup_{t \geqslant 0} \|u(t, \cdot\,) - u_M(t, \cdot\,)\|_{L_2(D)} \leqslant \frac{C}{M^{2/d}} \|f\|_{W_2^2(D)}.$$

Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 3.1.

4.2. Формулы для ядер. Получим теперь явные формулы для ядра оператора P^t. Подставляя в формулу (27) выражение для коэффициентов Фурье $c_m^0 = (f_0,\ \widetilde{s}_m)_{L_2(D)}$ и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} (P^t f)(\mathbf{x}) = f_b(\mathbf{x}) + \frac{\sigma^2 t}{2|D|d} \int\limits_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\widehat{\mathbf{y}} \\ + \int f_0(\mathbf{y}) \widetilde{R}_t(\mathbf{x},\, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} + f_h(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\widetilde{R}_t(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \sum \widetilde{s}_m(\mathbf{x}) \overline{\widetilde{s}_m(\mathbf{y})} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \widetilde{\varkappa}_m^2 t}{2}\right).$$

Подставим в (28) $f_0 = f - f_b - f_h$ и $f_h = \widetilde{H}(f - f_b)$. Получим

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \int\limits_D f(\mathbf{y}) \widetilde{R}_t(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int\limits_{\partial D} (\gamma_0 \partial_n f)(\widehat{\mathbf{y}})\, \widetilde{Q}_t(\mathbf{x},\ \widehat{\mathbf{y}})\, d\widehat{\mathbf{y}},$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_t(\mathbf{x},\, \widehat{\mathbf{y}}) = \chi(\mathbf{x}) + \frac{\sigma^2 t}{2|D|d} + \widetilde{h}_0(\mathbf{x},\, \widehat{\mathbf{y}}) \\ - \int\limits_D \widetilde{R}_t(\mathbf{x},\ \mathbf{u})\, \widetilde{h}_0(\mathbf{u},\ \widehat{\mathbf{y}})\, d\mathbf{u} - \int\limits_D \widetilde{R}_t(\mathbf{x},\, \mathbf{u}) \chi(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{29}$$

Вычислим четвёртое слагаемое ядра $\widetilde{Q}_t$. Первым шагом подставим в разложение $\widetilde{R}_t$ (27) явный вид нормированных собственных функций (12):

$$\widetilde{R}_t(\mathbf{x},\, \mathbf{u}) = \sum \frac{j_\lambda^d(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})}{\widetilde{n}_{\lambda\mu k}} \frac{j_\lambda^d(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} u) \overline{Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{u}})}}{\widetilde{n}_{\lambda\mu k}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \widetilde{\varkappa}_{\lambda k}^2 t}{2}\right).$$

Затем воспользуемся известным разложением для ядра Пуассона–Неймана

$$\widetilde{h}_0(\mathbf{u},\, \widehat{\mathbf{y}}) = \sum \frac{u^\lambda}{\lambda} Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{u}}) \overline{Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{y}})}$$

и применим соотношение ортогональности для сферических гармоник (4) и лемму 2.5

$$\int\limits_D \widetilde{R}_t(\mathbf{x},\ \mathbf{u})\,\widetilde{h}_0(\mathbf{u},\ \widehat{\mathbf{y}})\ d\mathbf{u}$$

$$= \sum \frac{\exp\left(-\sigma^2 \widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k} t/2\right)}{\widetilde{n}^2_{\lambda\mu k}} j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}}) \overline{Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{y}})} \int\limits_0^1 y^{d-1}\, j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} y)\, \frac{y^\lambda}{\lambda}\ dy$$

$$= \sum \frac{\exp\left(-\sigma^2 \widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k} t/2\right)}{\widetilde{n}^2_{\lambda\mu k}} j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}}) \overline{Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{y}})} \frac{j^d_{\lambda+1}(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k})}{\lambda \widetilde{\varkappa}_{\lambda k}}.$$

В случае, когда f удовлетворяет условию разрешимости (24), из формулы (29) для ядра на границе можно удалить первое, второе и пятое слагаемые. При этом получаются следующие формулы для решений:

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \int\limits_D f(\mathbf{y}) \widetilde{R}_t(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\ d\mathbf{y} + \int\limits_{\partial D} (\gamma_0 f)(\widehat{\mathbf{y}}) \widetilde{Q}_t(\mathbf{x},\ \widehat{\mathbf{y}})\, d\widehat{\mathbf{y}}, \tag{30}$$

где

$$R_t(\mathbf{x},\ \mathbf{u}) = 2 \sum \left(\frac{\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}}{j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k})} \right)^2 \times \frac{\exp(-\sigma^2 \widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k} t/2)}{\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k} - (\lambda+\alpha)^2} j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} u) Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}}) \overline{Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{u}})}$$

и

$$\widetilde{Q}_t(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}}) = \widetilde{h}_0(\mathbf{x},\ \widehat{\mathbf{y}}) - 2 \sum \frac{\widetilde{\varkappa}_{\lambda k}}{\lambda} \frac{\exp(-\sigma^2 \widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k} t/2)}{\widetilde{\varkappa}^2_{\lambda k} - (\lambda+\alpha)^2} \frac{j^d_{\lambda+1}(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k})}{\left(j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k})\right)^2} j^d_\lambda(\widetilde{\varkappa}_{\lambda k} x) Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{x}}) \overline{Y^\mu_\lambda(\widehat{\mathbf{y}})}.$$

В случае вещественного σ, как и для задачи Дирихле, формула (30) имеет простой вероятностный смысл. Именно, для фиксированных $(t,\ \mathbf{x})$ формула (30) задаёт распределение винеровского процесса в момент времени t, выпущенного из точки $x \in D$ и отражающегося от границы ∂D по нормали. Функции $\widetilde{Q}_t(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ естественно придать смысл накопленного к моменту t в точке $\mathbf{y}$ "скачка нормальной производной" отражающегося винеровского процесса.

§5. Предельные теоремы

В этом параграфе мы заменим винеровский процесс его аппроксимацией нормированными суммами случайных величин и докажем теоремы о сходимости.

Пусть $\{\xi_j\}_{j\geqslant 1}$ – последовательность независимых одинаково распределённых вещественных d-векторов с общим распределением $\mathcal{P}$. Будем предполагать, что распределение $\mathcal{P}$ инвариантно относительно поворотов, случайный вектор ξ_1 имеет единичную матрицу ковариаций, а также для некоторого $\gamma > 0$ конечен экспоненциальный момент $\mathbf{E}\exp(\gamma|\xi_1|)$. Пусть, кроме того, $\eta(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от $\{\xi_j\}_{j\geqslant 1}$. Определим сложный пуассоновский процесс $\zeta_n(t)$, полагая для $n \in \mathbb{N},\ t \in [0,T]$

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j.$$

Начнём с задачи Дирихле. Из (2.8) следует, что

$$\mathbf{E}\, f_h^M(\mathbf{x} + \sigma\zeta_n(t)) = f_h^M(\mathbf{x}).$$

Немного сложнее обстоит дело с f_0. Для доказательства аналога формулы (16) воспользуемся интегральным представлением из леммы 2.7:

$$\mathbf{E}\, s_m(\mathbf{x} + \sigma\zeta_n(t)) \\ = (-i)^\lambda \frac{(d-2)!!\omega_{d-1}C_\alpha^2}{(2\pi)^d} \int\limits_{S^{d-1}} Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{p}}) e^{-i\varkappa_{\lambda k}\widehat{\mathbf{p}}\mathbf{x}}\, \mathbf{E}\, e^{-i\sigma\varkappa_{\lambda k}\widehat{\mathbf{p}}\zeta_n(t)}\, d\widehat{\mathbf{p}}.$$

Пользуясь инвариантностью $\zeta_n(t)$ относительно поворотов, получаем

$$a_{\lambda k} = \mathbf{E}\, e^{-i\sigma\varkappa_{\lambda k}\widehat{\mathbf{p}}\zeta_n(t)} \\ = \exp\left(nt \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i\sigma\varkappa_{\lambda k} y/\sqrt{n}} - 1 \right) \mathcal{P}_1(dy) \right),$$

где $\mathcal{P}_1$ – общее распределение случайных величин ξ_j^1 (единица в верхнем индексе указывает на то, что это первая компонента вектора ξ_j).

Окончательно получаем

$$\mathbf{E}\, f_0^M(\mathbf{x} + \sigma\zeta_n(t)) = \sum_{m\leqslant M} c_m^0 a_m s_m(\mathbf{x}),$$

где a_m – числа $a_{\lambda k}$, перенумерованные так же, как соответствующие им функции s_m.

Теорема 5.1. *Пусть* $f \in W_2^2(D)$, $M(n) = n^{d/4}$ *и*

$$u_n(t,\, \mathbf{x}) = \mathbf{E}\, f^{M(n)}(\mathbf{x} + \sigma\zeta_n(t)).$$

Тогда существует такое число $C = C(T) > 0$, *что справедлива оценка*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t,\,\cdot\,) - u_n(t,\,\cdot\,)\|_{L_2(D)} \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}} \|f\|_{W_2^2(D)},$$

где $u(t,\, \mathbf{x})$ *– точное решение начально-краевой задачи Дирихле* (14).

Доказательство. Воспользуемся формулой

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)(A+B)} B e^{\tau A}\, d\tau, \tag{31}$$

в которой положим $A = -\sigma^2\varkappa_m^2/2$ и

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sigma^2\varkappa_m^2 t}{2} + nt \int \Big(e^{-i\sigma\varkappa_m y/\sqrt{n}} - 1\Big)\mathcal{P}_1(dy) \\ &= nt \int g\left(\frac{-i\sigma\varkappa_m y}{\sqrt{n}}\right)\mathcal{P}_1(dy), \end{aligned}$$

где

$$g(z) = e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}.$$

Нетрудно увидеть, что $|e^{tA}| \leqslant 1$ и $|e^{t(A+B)}| \leqslant 1$. Таким образом для оценки разности экспонент остаётся оценить B. Очевидно, что

$$\left| g\left(\frac{-i\sigma\varkappa_m y}{\sqrt{n}}\right) \right| \leqslant \frac{\varkappa_m^4 y^4}{n^2} \exp\left(\frac{\varkappa_m |y|}{\sqrt{n}}\right).$$

Поскольку мы предполагали, что у распределения $\mathcal{P}$ существует конечный экпоненциальный момент, справедливо неравенство

$$|B| \leqslant nt \int \left| g\left(\frac{-i\sigma\varkappa_m y}{\sqrt{n}}\right) \right| \mathcal{P}_1(dy) \leqslant \frac{C\varkappa_m^4}{n},$$

где константа C зависит от T и распределения $\mathcal{P}_1$. Воспользуемся ещё тем, что, согласно (8), при $m \leqslant M$ существует такая $C > 0$, что справедливо $\varkappa_m^2 \leqslant CM^{2/d}$. Оценим с помощью этого неравенства

$$\varkappa_m^4 = \varkappa_m^2 \varkappa_m^2 \leqslant CM^{2/d} m^{2/d}.$$

Итак, из (31) следует, что

$$|e^{t(A+B)} - e^{tB}| \leqslant T|B| \leqslant \frac{Cm^{2/d} M^{2/d}}{n}.$$

Оценим теперь саму L_2-норму разности:

$$\begin{aligned} &\|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|^2_{L_2(D)} \\ &\qquad \leqslant \sum_{m \leqslant M} |c_m^0|^2 \Big| e^{t(A+B)} - e^{tA} \Big|^2 + \sum_{m > M} |c_m^0|^2 \\ &\qquad \leqslant \frac{CM^{4/d}}{n^2} \sum_{m \leqslant M} k^{4/d} |c_m^0|^2 + \frac{1}{M^{4/d}} \sum_{m > M} k^{4/d} |c_m^0|^2 \\ &\qquad\qquad \leqslant \frac{C}{n} \|f\|^2_{W_2^2(D)}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы положили $M(n) = n^{d/4}$. □

Для задачи Неймана справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 5.2. *Пусть $f \in W_2^2(D)$ и удовлетворяет условию разрешимости* (24). *Положим $M(n) = n^{d/4}$ и*

$$u_n(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}\, f^{M(n)}(\mathbf{x} + \sigma \zeta_n(t)),$$

где функция $f^{M(n)}$ определена формулой (26).

Тогда существует такое $C = C(T) > 0$, что справедлива оценка

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t,\cdot) - u_n(t,\cdot)\|_{L_2(D)} \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}} \|f\|_{W_2^2(D)},$$

где $u(t, \mathbf{x})$ – точное решение начально-краевой задачи Неймана (23).

Список литературы

1. С. Ватанабэ, Н. Икеда, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.* Наука, М., 1986.
2. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Начально-краевые задачи в ограниченной области: вероятностные представления решений и предельные теоремы,* I. — Теория вероятн. и ее примен. **61**, No. 4 (2016), 733–752
3. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Начально-краевые задачи в ограниченной области: вероятностные представления решений и предельные теоремы,* II. — Теория вероятн. и ее примен. **62**, No. 3 (2017), 446–467
4. П. Н. Иевлев, *Вероятностное представление решения задачи Коши для многомерного уравнения Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 145–158.
5. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **454** (2016), 158–176.
6. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Предельные теоремы о сходимости функционалов от случайных блужданий к решению задачи Коши для уравнения* $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta u$ *с комплексным* σ. — Зап. научн. семин. ПОМИ **420** (2013), 88–102.
7. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Комплексный аналог центральной предельной теоремы и вероятностная аппроксимация интеграла Фейнмана.* — Доклады РАН **459**, No. 3 (2014), 400–402.
8. A. Pilipenko, *An introduction to stochastic differential equations with reflection.* Potsdam: Universitätsverlag, 2014.
9. James Emil Avery, John Scales Avery, *Hyperspherical Harmonics and Their Physical Applications.* World Scientific, 2017.
10. E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, 1971.
11. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева и др., *Избранные главы анализа и высшей алгебры.* Издательство Ленинградского университета, 1981.
12. Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.* Издательство иностранной литературы, М., 1961.
13. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций. Часть первая.* Издательство иностранной литературы, М., 1949.
14. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М., 1972
15. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, М., 1973.
16. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы.* Издательство МЦНМО, М., 2007.

Ievlev P. N. Probabilistic representations for initial-boundary value problem solutions to the non-stationary Schrödinger equation in d-hyperball.

We extend the construction of probabilistic representations for initial-boundary value problem solutions to the non-stationary Schrödinger equation in d-hyperball first obtained in the works by I. Ibragimov, N. Smorodina and M. Faddeev to a multidimensional case. Further on, we show that in these representations the Wiener process could be replaced by a random walk approximation. The L_2-convergence rates are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
С.-Петербург 191023, Россия;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: ievlev.pn@gmail.com

Поступило 30 октября 2018 г.