Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

И. А. Ибрагимов

ОДНА ЗАДАЧА ОЦЕНКИ ПЛОТНОСТИ ИНТЕНСИВНОСТИ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА

1. Проблема и результаты. Ниже мы рассматриваем следующую задачу непараметрического оценивания. Процесс Пуассона $X_\varepsilon(t)$ с плотностью интенсивности $\varepsilon^{-1}\lambda(t)$ наблюдается на интервале $[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, вещественной оси. Функция $\lambda(t)$ неизвестна и подлежит оценке по наблюдениям $X_\varepsilon(t)$. Параметр ε предполагается известным. Мы рассматриваем асимптотическую постановку задачи при $\varepsilon \to 0$.

Пример. Пусть на отрезке $[a,b]$ наблюдаются n независимых процессов Пуассона $Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)$ с одной и той же плотностью интенсивности $\lambda(t)$. В задаче оценки $\lambda(t)$ по выборке $(Y_1,\dots,Y_n)$ статистика $X_\varepsilon(t) = \sum\limits_1^n Y_j(t)$ является достаточной. Наблюдение $X_\varepsilon(t)$ – это процесс Пуассона с плотностью интенсивности $\lambda_\varepsilon(t) = n\lambda(t) = \varepsilon^{-1}\lambda(t)$, $\varepsilon = n^{-1}$.

Обозначим $\mathcal{A}(G,M)$ класс функций $f(t)$, определенных на отрезке $[a,b]$, допускающих аналитическое продолжение в область $G \supset [a,b]$ комплексной плотности и ограниченных там константой M. Ниже мы рассматриваем нашу задачу оценивания в предположении, что неизвестная функция $\lambda \in \mathcal{A}(G,M) = \mathcal{A}$ с известными G и M.

Теорема 1. *Существуют оценки $\widehat{\lambda}_\varepsilon$ неизвестной функции λ, такие что*

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{A}} \mathbf{E}_\lambda \|\widehat{\lambda}_\varepsilon - \lambda\|_p \leqslant c_p\Big(\varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{1/2}, \quad 1 \leqslant p < 4, \tag{1.1}$$

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{A}} \mathbf{E}_\lambda \|\widehat{\lambda}_\varepsilon - \lambda\|_4 \leqslant c_4\Big(\varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{1/2}\Big(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{1/4}, \tag{1.2}$$

$$\sup_{\lambda\in\mathcal{A}} \mathbf{E}_\lambda \|\widehat{\lambda}_\varepsilon - \lambda\|_p \leqslant c_p\sqrt{\varepsilon}\Big(\ln\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{1-\frac{2}{p}}, \quad 4 < p \leqslant \infty. \tag{1.3}$$

Ключевые слова: процесс Пуассона, плотность интенсивности, проекционные оценки.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 17-01-00828.

Выбор оценки $\widehat{\lambda}_\varepsilon$ *не зависит от* p. *Постоянные* c_p, *кроме* p, *зависят от* M *и* G.

Теорема 2. *Имеют место неравенства*

$$\Delta_p(\mathcal{A}) = \inf_{\widehat{\lambda}_\varepsilon} \sup_{\lambda\in\mathcal{A}} \mathbf{E}_\lambda \|\widehat{\lambda}_\varepsilon - \lambda\|_p \geqslant C_p \sqrt{\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}}, \quad 1 \leqslant p < 4, \tag{1.4}$$

$$\Delta_4(\mathcal{A}) = \inf_{\widehat{\lambda}_\varepsilon} \sup_{\lambda\in\mathcal{A}} \mathbf{E}_\lambda \|\widehat{\lambda}_\varepsilon - \lambda\|_4 \geqslant C_4 \sqrt{\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}} \sqrt[4]{\ln\ln \frac{1}{\varepsilon}}, \tag{1.5}$$

$$\Delta_p(\mathcal{A}) = \inf_{\widehat{\lambda}_\varepsilon} \sup_{\lambda\in\mathcal{A}} \mathbf{E}_\lambda \|\widehat{\lambda}_\varepsilon - \lambda\|_p \geqslant C_p \sqrt{\varepsilon} \Bigl(\ln \frac{1}{\varepsilon}\Bigr)^{1-\frac{2}{p}}, \quad 4 < p \leqslant \infty. \tag{1.6}$$

Постоянные $C_p > 0$ *зависят от* $\mathcal{A}$ *и* p.

Теорема 3. *Имеют место следующие асимптотические соотношения, выполняющиеся при* $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}
&\Delta_p(\mathcal{A}) \asymp \sqrt{\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}}, \quad 1 \leqslant p < 4,\\
&\Delta_4(\mathcal{A}) \asymp \sqrt{\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}} \sqrt[4]{\ln\ln \frac{1}{\varepsilon}},\\
&\Delta_p(\mathcal{A}) \asymp \sqrt{\varepsilon} \Bigl(\ln \frac{1}{\varepsilon}\Bigr)^{1-\frac{2}{p}}, \quad 4 < p \leqslant \infty.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Теорема 3 есть очевидное следствие теорем 1 и 2. Теорема 1 доказывается в разделе 2, теорема 2 – в разделе 3.

В работе [1] автор рассматривал сходные задачи оценки принадлежащих классам $\mathcal{A}(G, M)$ функции, наблюдаемой в белом шуме, плотности распределения вероятностей и функции регрессии. Сходные с [1] детали доказательства не повторяются, и мы ограничиваемся ссылкой на [1].

Для упрощения записи ниже мы опускаем индекс ε и пишем $X(t)$ вместо $X_\varepsilon(t)$ и $\widehat{\lambda}$ вместо $\widehat{\lambda}_\varepsilon$. Вместо $\mathbf{E}_\lambda(\,\cdot\,)$, $\mathbf{P}_\lambda(\,\cdot\,)$ мы пишем $\mathbf{E}(\,\cdot\,)$ и $\mathbf{P}(\,\cdot\,)$. Подобные сокращения не должны помешать читателю.

2. Доказательство теоремы 1. Без потери общности можно считать, что и делается ниже, что $[a, b] = [-1, 1]$. Множество G содержит в себе эллипсы E с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей $R > 1$. Всякая функция f из $\mathcal{A}(G, M)$ принадлежит также $\mathcal{A}(E, M)$.

Разложим функцию $\lambda(t)$ в ряд Фурье по ортонормированным полиномам Лежандра $P_k(t)$,

$$\lambda(t) = \sum_0^\infty a_k P_k(t), \quad a_k = \int_0^1 \lambda(t) P_k(t)\,dt.$$

Величина наилучшего приближения функции $\lambda(t)$ в $L_2([-1,1])$ полиномами Q степени не выше n равна

$$\sum_{n+1}^\infty |a_j|^2 = \left(\inf_Q \int_{-1}^1 |\lambda(t) - Q(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$
$$\leqslant \left(\inf_Q \int_{-1}^1 |\lambda(t) - Q(t)|^2 (1-t^2)^{-1/2}\,dt\right)^{1/2}$$
$$\leqslant \left(\frac{\pi}{R^2-1}\right)^{1/2} \frac{\max\limits_{z\in E}|\lambda(z)|}{R^n} \leqslant \left(\frac{\pi}{R^2-1}\right)^{1/2} \cdot \frac{M}{R^n}. \qquad \square$$

Относительно последнего неравенства см., например, [2, гл. 2]. Следовательно, коэффициенты a_n удовлетворяют неравенствам

$$|a_k| \leqslant c_1 e^{-\gamma k}, \quad c_1 = M\left(\frac{\pi}{2(l-1)}\right)^{1/2}, \quad \gamma = \ln R > 0.$$

Рассмотрим теперь следующие оценки $\widehat{\lambda}_N$ функции λ

$$\widehat{\lambda}_N(t) = \sum_0^N \widehat{a}_k P_k(t),$$

где в свою очередь оценка для a_k

$$\widehat{a}_k = \varepsilon \int_{-1}^1 P_k(t) dX(t) = a_k + z_k,$$

случайные величины

$$z_k = \int_{-1}^1 P_k(t)(\varepsilon dX(t) - \lambda(t)\,dt) = \varepsilon \int_{-1}^1 P_k(t)\Big(dX(t) - \frac{\lambda(t)}{\varepsilon}\,dt\Big).$$

Таким образом, разность

$$\widehat{\lambda}_N(t) - \lambda(t) = Z_N(t) - \sum_{N+1}^{\infty} a_k P_k(t);$$

случайный полином степени N

$$Z_N(t) = \sum_{0}^{N} z_k P_k(t)$$

и

$$\|\widehat{\lambda}_N - \lambda\|_p \leqslant \|Z_N\|_p + \Big\| \sum_{N+1}^{\infty} a_k P_k(t)\Big\|_p. \tag{2.1}$$

Полиномы Лежандра $P_k(t)$ удовлетворяют неравенствам (см. [3, теоремы 7.3.1, 7.3.3])

$$\begin{aligned} &|P_k(t)| \leqslant P_k(1) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}, \\ &|P_k(t)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{2k+1}{2k}}(1-t^2)^{-1/4} \leqslant \sqrt{\frac{3}{\pi}}(1-t^2)^{-1/4}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

так что

$$\Big\| \sum_{N+1}^{\infty} a_k P_k(t)\Big\|_p \leqslant c\sqrt{N} e^{-\gamma N}. \tag{2.3}$$

Случайный полином $Z_N(t)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} Z_N(t) &= \sum_{0}^{N} (\widehat{a}_k - \mathbf{E}\widehat{a}_k) P_k(t) \\ &= \varepsilon \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{N} P_k(s) P_k(t) d(X(s) - \mathbf{E}X(s)) \\ &= \varepsilon \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{N} P_k(s) P_k(t) d\pi(s), \end{aligned}$$

где $\pi(s)$ – центрированный процесс Пуассона с плотностью интенсивности $\varepsilon^{-1}\lambda(s)$.

Если $1 \leqslant p \leqslant 2$, то

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\|Z_N\|_p &\leqslant \sqrt{2}\mathbf{E}\|Z_N\|^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}\biggl(\sum_0^N \mathbf{E}|\widehat{a}_\nu - a_\nu|^2\biggr)^{1/2} \\
&= \sqrt{2\varepsilon}\biggl(\sum_0^N \int_{-1}^1 |P_k(t)|^2 \lambda(t)\,dt\biggr)^{1/2} \\
&\leqslant \sqrt{\varepsilon}\sqrt{2M}\sqrt{N+1} \leqslant 2\sqrt{M}\sqrt{N\varepsilon} = c\sqrt{N\varepsilon}. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Для того, чтобы оценить $\mathbf{E}\|Z_N\|_p$ для $p > 2$, мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.1. *Пусть $\Pi(t)$ – центрированный процесс Пуассона с плотностью интенсивности $\Lambda(t)$. Тогда для $p > 2$*

$$\mathbf{E}\biggl|\int_a^b f(t)d\Pi(t)\biggr|^p \leqslant C_p\biggl(\int_a^b |f(t)|^p \Lambda(t)\,dt + \biggl(\int_a^b |b(t)|^2 \Lambda(t)\,dt\biggr)^{p/2}\biggr).$$

Постоянная C_p зависит только от p.

Утверждение леммы легко следует из неравенства Розенталя для сумм независимых случайных величин (см. [4, гл. 3, §5] и мы опустим это почти очевидное доказательство.

В силу неравенства леммы для $p > 2$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\|Z_N(t)\|_p^p &= \varepsilon^p \int_{-1}^1 \mathbf{E}\biggl|\int_{-1}^1 \sum_0^N P_k(t)P_k(s)d\pi(s)\biggr|^p dt \\
&\leqslant C_p\biggl(\varepsilon^{p-1}\int_{-1}^1\int_{-1}^1 \biggl|\sum_0^N P_k(t)P_k(s)\biggr|^p \lambda(s)\,dt\,ds \\
&\quad + \varepsilon^{p/2}\int_{-1}^1 dt\biggl(\int_{-1}^1 \biggl(\sum_0^N P_k(t)P_k(s)\biggr)^2 \lambda(s)\,ds\biggr)^{p/2}. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

В силу (2.2) первое слагаемое в (2.5) не превзойдет

$$C_p\varepsilon^{p-1}N^{2(p-2)}M\cdot\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\Big|\sum_{0}^{N}P_\nu(t)P_\nu(s)\Big|^2\,dtds,$$

$$C_p\varepsilon^{p-1}MN^{2(p-2)}(N+1)\leqslant 2C_pM\varepsilon^{p-1}N^{2p-3}.$$

Второе слагаемое в (2.5) не больше

$$C_p\varepsilon^{p/2}M^{p/2}\int\limits_{-1}^{1}dt\bigg(\int\limits_{-1}^{1}\Big(\sum_{0}^{N}P_k(t)P_k(s)\Big)^2ds\bigg)^{p/2}$$

$$=C_p\varepsilon^{p/2}M^{p/2}\int\limits_{-1}^{1}\Big(\sum_{0}^{N}P_k^2(t)\Big)^{p/2}dt.$$

Из неравнств (2.2) легко следует (см. подробности в [1]), что

$$\int\limits_{-1}^{1}\Big|\sum_{0}^{N}P_k^2(t)\Big|^{p/2}dt\leqslant cN^2\ln N,\quad p=4, \tag{2.6}$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\Big|\sum_{0}^{N}P_k^2(t)\Big|^{p/2}dt\leqslant cN^{p-2},\quad p>4. \tag{2.7}$$

Из неравенств (2.4), (2.6), (2.7) следует, что

$$\mathbf{E}\|Z_N\|_p\leqslant cp\sqrt{\varepsilon N},\quad 1\leqslant p<4, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{E}\|Z_N\|_4\leqslant c_4\sqrt{\varepsilon N}\ln^{\frac14}N, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{E}\|Z_N\|_p\leqslant c_p\sqrt{\varepsilon}\cdot N^{1-\frac{2}{p}},\quad 4<p<\infty. \tag{2.10}$$

Чтобы получить соответствующее неравенство для $\|Z_N\|_\infty$, воспользуемся следующим известным результатом.

Лемма 2.2. *Пусть Q – алгебраический полином степени n. Тогда*

$$\|Q\|_\infty\leqslant(p+1)^{1/p}n^{2/p}\|Q\|_p. \tag{2.11}$$

Доказательство леммы можно найти, например, в [5]. Из неравенств (2.9), (2.11) следует, что

$$\mathbf{E}\|Z_N\|_\infty\leqslant c_\infty N.$$

Объединяя неравенства (2.8)–(2.11) с (2.1), мы найдем, что

$$\mathbf{E}\|\lambda_n-\lambda\|_p \leqslant c_p(\sqrt{\varepsilon N}+e^{-\gamma N}\cdot\sqrt{N}), \quad 1\leqslant p<4, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{E}\|\lambda_N-\lambda\|_4 \leqslant c_4(\sqrt{\varepsilon N}\ln^{\frac14} N+e^{-\gamma N}\sqrt{N}), \tag{2.13}$$

$$\mathbf{E}\|\lambda_N-\lambda\|_p \leqslant c_p(\sqrt{\varepsilon}N^{1-\frac{2}{p}}+c^{-\gamma N}\sqrt{N}), \quad 4<p\leqslant\infty. \tag{2.14}$$

Выберем теперь $N=N_\varepsilon=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\gamma}\right]$ и положим $\lambda_{N_\varepsilon}=\lambda_\varepsilon$.

3. Доказательство теоремы 2.

3.1. В этом разделе мы приведем один общий результат о нижних границах в задачах оценки плотности интенсивности пуассоновского случайного поля.

Предположим, что наблюдается случайный процесс Пуассона (случайное пуассоновское множество) $\Pi_\varepsilon=\{X\}$ в измеримом пространстве $(\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ с σ-конечной мерой μ. Процесс Π_ε имеет по отношению к мере μ плотность интенсивности $\lambda_\varepsilon=\frac{\lambda}{\varepsilon}$. Неизвестная функция λ принадлежит известному множеству $\Lambda\subseteq L_2(d\mu)$. Пусть на Λ определена метрика ρ. Пусть далее $l(x)$ определенная на $[0,\infty)$ неубывающая функция с $l(0)=0$. Следующая лемма указывает нижние границы для функции риска $\mathbf{E}_\lambda l(\rho(T,\lambda))$ оценки T.

Лемма 3.1. *Допустим, что для любого $\delta>0$ существуют множества $\{\lambda_{i\delta}, i=1,2,\ldots,N(\delta)\}\subseteq\Lambda$ δ-различимых плотностей интенсивности $\lambda_{i\delta}$, $\rho(\lambda_{i\delta},\lambda_{j\delta})>\delta$. Положим*

$$\delta(\varepsilon,\Lambda)=\sup_{\lambda_0,\{\lambda_{i\delta}\}}\left\{\delta:\big(\ln N(\delta)\big)^{-1}\max_{1\leqslant i\leqslant N(\delta)}\left\|\frac{\lambda_{i\delta}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0}}\right\|_{L_2}\leqslant\frac12\,\varepsilon\right\}$$

и верхняя грань берется по всем δ-различимым подмножествам Δ. Тогда для любой оценки T плотности интенсивности λ выполняется неравенство

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{E}_\lambda l\left(\frac{\rho(T,\lambda)}{\delta(\varepsilon,\Lambda)}\right)\geqslant\frac12\,l\left(\frac12\right).$$

Доказательство леммы см. в [6].

3.2. Доказательство теоремы для случая $p\neq4$ полностью повторяет доказательство теоремы 2 из [1, п. 2.2], и мы опустим его, отметив только, что вместо леммы 3.2 из [1] теперь нужно использовать лемму 3.1 предыдущего п. 3.1. Пусть теперь $p=4$. Рассмотрим множество

Γ плотностей интенсивности

$$\lambda_a(t) = m + \sqrt{\varepsilon}\sum_1^N a_j P_j(t).$$

Вектор $a = (a_1, \dots, a_N)$ пробегает шар $G = \{a : \sum_1^N a_j^2 \leqslant N^4\}$, а $N \sim \gamma \ln \frac{1}{\varepsilon}$, $\gamma > 0$. Для должным образом выбранных m, γ множество $\Gamma \subseteq \Lambda$.

Следовательно, для всех $\widehat{\lambda}$

$$\begin{aligned}
&\sup_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{E}_\lambda \|\widehat{\lambda} - \lambda\|_4 \\
&\quad\geqslant \inf_{s=\{s_j\}} \frac{1}{\operatorname{mes}\Gamma} \int\limits_\Gamma \mathbf{E}_a \biggl\{ \biggl\| \sum_1^N (a_j - s_j) P_j - s_0 - \sum_{N+1}^\infty s_j P_j \biggr\|_4 \biggr\} da \\
&\quad= \inf_s \frac{1}{\operatorname{mes}\Gamma} \int\limits_\Gamma \mathbf{E}_0 \biggl\{ \biggl\| \sum_1^N (a_j - s_j) - s_0 - \sum_{N+1}^\infty s_j P_j \biggr\|_4 \cdot \frac{dP_a}{dP_0}(X_\varepsilon) \biggr\} da.
\end{aligned}$$

Производная меры $\mathbf{P}_a$ по мере $\mathbf{P}_0$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{P}_a}{d\mathbf{P}_0}(x_\varepsilon) &= \exp\biggl\{ \int\limits_{-1}^1 \ln\Bigl(m + \sqrt{\varepsilon}\sum a_j P_j(t)\Bigr) dX_\varepsilon(t) - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_1^N a_j P_j(t)\, dt \biggr\} \\
&= \exp\biggl\{ \int\limits_{-1}^1 \ln\Bigl(m + \sqrt{\varepsilon}\sum a_j P_j(t)\Bigr)\, dX_\varepsilon(t) \biggr\},
\end{aligned}$$

см., например, [7].

Дальнейшие аргументы полностью совпадают с теми, что были использованы при доказательстве теорем 1, 2, доказательство нижних границ для $p = 4$ в [1], и мы опустим эти аргументы.

4. Пуассоновское поле размерности d. Обозначим $\mathcal{A}_d(G, M)$ класс функций $f(t_1, \dots, t_d)$, определенных на кубе $I = [0,1]^d$, допускающих аналитическое продолжение в область G d-мерного комплексного пространства и ограниченных в G числом M.

Предположим, что на I наблюдается пуассоновское поле X_ε с плотностью интенсивности (по мере Лебега) $\frac{\lambda(t)}{\varepsilon}$, $t = (t_1, \dots, t_d)$. Задача заключается в оценке неизвестной функции λ, о которой известно, что она принадлежит заданному классу функций Λ, (малый) параметр ε предполагается известным.

Теорема 4.1. *Пусть* $\Lambda \subseteq \mathcal{A}_d(G, M)$. *Существуют такие оценки* $\widehat{\lambda}_\varepsilon$ *параметра* λ, *что*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{E}\|\widehat{\lambda}_\varepsilon - \lambda\|_{L_p(I)} \leqslant c_p\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|^{d/2}, \quad 1 \leqslant p < 4,$$

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{E}\|\widehat{\lambda}_\varepsilon - \lambda\|_{L_4(I)} \leqslant c_p\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|^{d/2}|\ln|\ln\varepsilon\|^{d/4},$$

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{E}\|\widehat{\lambda}_\varepsilon - \lambda\|_{L_p(I)} \leqslant c_p\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|^{d\left(1-\frac{2}{p}\right)}, \quad 4 < p \leqslant \infty.$$

Постоянные c_p, *кроме* p *зависят от* M *и* G.

Теорема 4.2. *Пусть* $\Lambda \supseteq \mathcal{A}_d(G, M)$. *Тогда*

$$\inf_{\widehat{\lambda}} \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{E}\|\widehat{\lambda} - \lambda\|_{L_p(I)} \geqslant C_p\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|^{d/2}, \quad 1 \leqslant p < 4,$$

$$\inf_{\widehat{\lambda}} \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{E}\|\widehat{\lambda} - \lambda\|_{L_4(I)} \geqslant C_4\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|^{d/2}(\ln|\ln\varepsilon|)^{d/4},$$

$$\inf_{\widehat{\lambda}} \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{E}\|\widehat{\lambda} - \lambda\|_{L_p(I)} \geqslant C_p\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|^{\left(1-\frac{2}{p}\right)d}, \quad 4 < p \leqslant \infty.$$

Постоянные $C_p > 0$ *зависят от* p, M *и* G.

Доказательство этих теорем не содержит никаких новых моментов в сравнении со случаем $d = 1$. Как и выше, мы рассматриваем разложение функции $\lambda(t)$ в ряд Фурье по многомерным ортонормированным полиномам Лежандра

$$\lambda(t) = \sum_{\nu=(\nu_1,\dots,\nu_d)} a_\nu P_\nu(t), \quad P_\nu(t) = P_{\nu_1}(t_1) \times \cdots \times P_{\nu_d}(t_d). \tag{4.1}$$

Как и выше, мы оцениваем коэффициенты a_ν статистиками

$$\widehat{a}_\nu = \varepsilon \int_I P_\nu(t) dX_\varepsilon(t)$$

и в качестве оценок для λ рассматриваем суммы

$$\widehat{\lambda}_N = \sum_{\nu_1\leqslant N,\dots,\nu_d\leqslant N} \widehat{a}_\nu P_\nu(t).$$

Дальнейшие аргументы по существу повторяют то, что было сказано в случае $d = 1$, и мы опустим их.

Список литературы

1. I. Ibragimov, *On estimation of analytic functions.* — Studia Sci. Math. Hungarica **34** (1998), 191–210.
2. С. Н. Бернштейн, *Экстремальные свойства полиномов.* ОНТИ, Л.-М., 1937.
3. Г. Сеге, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962.
4. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых величин.* Наука, М., 1987.
5. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз, М., 1960.
6. И. А. Ибрагимов, *О нижних границах точности непараметрического оценивания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **396** (2011), 102–110.
7. Yu. A. Kutoyants, *Statistical Inference for Spatial Poisson Processes.* Lecture Notes in Statist., **134**, Springer, 1998.

Ibragimov I. A. An estimation problem for the intensity density of Poisson processes.

A Poisson process $X_\varepsilon(t)$ with the intensity density function $\varepsilon^{-1}\lambda(t)$ is observed on an interval $[a, b]$. The problem is to estimate the function $\lambda(t)$. It is known that the unknown function $\lambda(t)$ belongs to a given class of functions analytic in a given region $G \supset [a, b]$ and is bounded there by a given constant M. The parameter ε is supposed to be known and we consider the problem as $\varepsilon \to 0$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: ibr32@pdmi.ras.ru

Поступило 23 ноября 2018 г.