Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

М. С. Ермаков

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ МИНИМАКСНОМ ОБНАРУЖЕНИИ СИГНАЛА В ГАУССОВСКОМ БЕЛОМ ШУМЕ

§1. Постановка задачи

В задачах минимаксного непараметрического обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме оптимальный порядок скорости различимости непараметрических критериев изучен для широкого класса функциональных пространств и совершенно различных постановок задач (см. [2, 9, 10, 14] и ссылки в них). В тоже время асимптотически минимаксные критерии с точной асимптотикой скорости сходимости известны, только если дана априорная информация, что сигнал принадлежит эллипсоиду в $\mathbb{L}_2$ (см. [3, 4]) или телам в пространствах Бесова (см. [10]), определенным в терминах ортогональных разложений по вейвлетам. Цель статьи – обратить внимание, что такие критерии могут быть получены и для других множеств функций. Для тригонометрической ортогональной системы функций при некоторой норме эти множества являются шарами в пространстве Бесова $\mathbb{B}^s_{2\infty}$. Мы обозначим эти множества $\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)$, где $s > 0$ и $P_0 > 0$.

Шары $\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)$ обладают замечательными свойствами в задачах непараметрического обнаружения сигнала.

Они несут разумную информацию о гладкости сигнала.

На этих множествах наиболее распространенные непараметрические критерии имеют заданную минимаксную скорость различимости альтернатив [6].

Для широкого класса непараметрических критериев они являются наибольшими множествами с заданной минимаксной скоростью различимости альтернатив [6].

Ключевые слова: наибольшие множества, обнаружение сигнала, гауссовский белый шум.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00828.

Задачи построения наибольших множеств интенсивно исследуются в непараметрическом оценивании [12, 13, 16], и в последнее время на них обратили внимание и в непараметрической проверке гипотез [1,6].

Постановка задачи следующая.

Мы наблюдаем реализацию случайного процесса $Y_n(t)$, $t \in [0,1)$, задаваемого стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\,Y_n(t) = f(t)\,dt + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,dw(t), \quad t \in [0,1], \quad \sigma > 0, \tag{1.1}$$

где $f \in \mathbb{L}_2(0,1)$ – неизвестный сигнал и $dw(t)$ – гауссовский белый шум.

Дана априорная информация

$$f \in \bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}(P_0) = \Big\{ f\,:\, f = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j\,\phi_j,\ \sup_{\lambda>0} \lambda^{2s} \sum_{j>\lambda} \theta_j^2 \leqslant P_0,\ \theta_j \in \mathbb{R}^1 \Big\}.$$

Здесь ϕ_j – ортонормированная система функций в $\mathbb{L}_2(0,1)$.

Необходимо проверить гипотезу $\mathbf{H_0}$: $f(t) = 0$, $t \in [0,1)$, против альтернатив

$$\mathbf{H_n}\ :\quad \int_0^1 f^2(t)\,dt \geqslant \rho_n \asymp n^{-\frac{4s}{1+4s}}.$$

При выполнении некоторых условий на базис ϕ_j, $1 \leqslant j < \infty$, пространство

$$\bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty} = \Big\{ f : f = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \phi_j,\ \sup_{\lambda>0} \lambda^{2s} \sum_{j>\lambda} \theta_j^2 < \infty,\ \theta_j \in \mathbb{R}^1 \Big\}$$

является пространством Бесова $\mathbb{B}^s_{2\infty}$ (см. [16]). В частности, $\bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}$ является пространством Бесова $\mathbb{B}^s_{2\infty}$, если ϕ_j, $1 \leqslant j < \infty$, является тригонометрическим базисом.

Шары в классах Никольского (см. [17])

$$\int (f^{(l)}(x+t) - f^{(l)}(x))^2\,d\,x \leqslant L\,|t|^{2(s-l)}, \qquad \int_0^1 f^2(t)\,dt < C,$$

где $l = [s]$, являются шарами в $\mathbb{B}^s_{2\infty}$.

Здесь и в дальнейшем мы будем обозначать буквами C и c положительные постоянные.

Обозначим $V_n = \{\, f\,:\, \|f\|^2 \geqslant \rho_n,\ f \in \bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}(P_0)\,\}$.

Для любого критерия K_n обозначим $\alpha\,(K_n)$ – его вероятность ошибки первого рода и $\beta_f(K_n)$ – его вероятность ошибки второго рода при альтернативе $f \in V_n$.

Обозначим

$$\beta\,(K_n,\,V_n) = \sup_{f\in V_n}\,\beta_f(K_n).$$

Назовем последовательность критериев L_n асимптотически минимаксной, если для любой последовательности критериев K_n, $\alpha(K_n)\leqslant\alpha(L_n)$, имеет место

$$\limsup_{n\to\infty}\,\beta\,(K_n, V_n) - \beta\,(L_n, V_n)\,\geqslant\,0.$$

Цель работы – указать асимптотически минимаксные последовательности критериев L_n для множеств альтернатив V_n. Асимптотически минимаксные критерии были построены в [3], если множества альтернатив являются эллипсоидами с удаленными малыми шарами в $\mathbb{L}_2$. Для задач непараметрической проверки гипотез этот результат может рассматриваться как аналог теоремы Пинскера [11,15,17] в асимптотически минимаксном непараметрическом оценивании. В задачах непараметрического оценивания на шарах $\bar{\mathbb{B}}^s_{2\infty}(P_0)$ нами [5] доказано, что асимптотически минимаксными оценками являются оценки регуляризирующего алгоритма Тихонова. Это показывает насколько естественно введение такой априорной информации.

Отметим, что для тел в пространстве Бесова

$$\widetilde{\mathbb{B}}^s_{2\infty}\,(P_0) = \Big\{\,f\,:\,f = \sum_{k=1}^{\infty}\,\sum_{j=1}^{2^k}\,\theta_{kj}\,\phi_{kj},\;\sup_k\,2^{2ks}\sum_{j=1}^{2^k}\,\theta^2_{kj}\,\leqslant\,P_0\,\Big\},$$

заданных в терминах вейвлетов, асимптотически минимаксные критерии были найдены в работе [9]. В этой постановке возникает совершенно другая экстремальная задача для построения асимптотически минимаксной тестовой статистики.

Доказательство в основных чертах следует рассуждениям в [3]. Основным отличием является решение другой экстремальной задачи, возникающей из совершенно другого задания множества альтернатив. Другие отличия носят технический характер и также вызваны другим заданием множеств альтернатив.

§2. Основные результаты

Результаты будут даны в терминах разложения сигнала по ортонормированной системе функций. Используя ортонормированную систему функций ϕ_j, $1 \leqslant j < \infty$, стохастическое дифференциальное уравнение (1.1) может быть записано в следующем виде

$$y_j \,=\, \theta_j \,+\, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\xi_j, \quad 1 \leqslant j < \infty, \tag{2.1}$$

где

$$y_j = \int\limits_0^1 \phi_j \, dY_n(t), \quad \xi_j = \int\limits_0^1 \phi_j \, dw(t) \quad \text{и} \quad \theta_j = \int\limits_0^1 f\,\phi_j \, dt.$$

Обозначим $y \,=\, \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\theta \,=\, \{\theta_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Вектор θ является вектором в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ с нормой $\|\theta\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \theta_i^2$. В дальнейшем символ $\|\cdot\|$ будет использоваться для обозначения нормы в $\mathbb{H}$.

Для данной постановки задача проверки гипотез может быть переписана в следующем эквивалентном виде.

Нужно проверить гипотезу $\mathbf{H_0} : \theta = \mathbf{0}$ против альтернатив

$$\mathbf{H_n} : \theta \in \mathbf{V_n} = \{\theta : \|\theta\| \geqslant \rho_\mathbf{n}, \theta \in \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} \subset \mathbb{H}\},$$

где

$$U = \Big\{\theta = \{\theta_j\}_{j=1}^{\infty} : \sup_{\lambda > 0} \lambda^{2s} \sum_{j > \lambda} \theta_j^2 < P_0, \quad \theta_j \in \mathbb{R}^1\Big\}.$$

Отметим,что если в разделе 1 множество V_n было определено для функций, здесь эквивалентное определение дано для коэффициентов ортогонального разложения функций. В дальнейшем мы будем использовать данное обозначение.

Зададим $k = k_n$ и $\kappa^2 = \kappa_n^2$ как решение экстремальной задачи

$$\frac{1}{2s}\, k_n^{1+2s}\, \kappa_n^2 \,=\, P_0 \tag{2.2}$$

и

$$k_n\, \kappa_n^2 \,+\, k_n^{-2s}\, P_0 \,=\, \rho_n. \tag{2.3}$$

Обозначим $\kappa_j^2 \,=\, \kappa_{jn}^2 \,=\kappa_n^2$ для $1 \leqslant j \leqslant k_n$ и $\kappa_j^2 = \kappa_{jn}^2 \,= 2s\, P_0\, j^{-2s-1}$ для $j > k_n$.

Определим тестовую статистику

$$T_n^a(Y_n) = \sigma^{-2}\, n \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j^2\, y_j^2$$

и положим

$$A_n = \sigma^{-4} n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j^4,$$

$$C_n = \sigma^{-2}\, n\, \rho_n.$$

Для вероятности ошибки первого рода α, $0 < \alpha < 1$, определим критическую область

$$S_n^a = \{\, y \,:\, (T_n^a(y) - C_n)\,(2A_n)^{-1/2} > x_\alpha \,\},$$

где x_α задается уравнением $\alpha = 1 - \Phi(x_\alpha)$ и $\Phi(x)$ – значение функции стандартного нормального распределения в точке $x \in \mathbb{R}^1$.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} A_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} A_n < \infty.$$

Тогда последовательность критериев L_n^a, имеющих критические области S_n^a, является асимптотически минимаксной с вероятностью ошибки первого рода $\alpha(L_n^a) = \alpha(1 + o(1))$, и

$$\beta(L_n^a, V_n) = \Phi(x_\alpha - (A_n/2)^{1/2})\,(1 + o(1))$$

при $n \to \infty$.

Пример. Пусть $\rho_n = R\,(\sigma^2/n)^{\frac{4s}{1+4s}}\,(1 + o(1))$ при $n \to \infty$. Тогда

$$A_n = \sigma^{-4}\, n^2\, \rho_n^{\frac{1+4s}{2s}}\, \frac{8\, s^2}{(1+4s)\,(1+2s)}((1+2s)\,P_0)^{-1/2s}\,(1+o(1))$$
$$= R^2\, \frac{8s^2}{(1+4s)\,(1+2s)}((1+2s)\,P_0)^{-1/2s}\,(1+o(1)).$$

Условимся в дальнейшем, что для любых последовательностей положительных чисел a_n и b_n символы $a_n = o(b_n)$ и $a_n \asymp b_n$ будут означать $a_n/b_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $c < a_n/b_n < C$ соответственно.

В [10] и [14] исследовалась задача асимптотически минимаксного непараметрического обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме для линейных обратных некорректных задач. Постановка задачи рассматривалась в терминах разложения сигнала по ортогональной системе функций.

В этой постановке задача может быть сформулирована в следующем виде.

Наблюдается реализация случайной последовательности

$$y_j = \lambda_j \theta_j + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \xi_j, \quad 1 \leqslant j < \infty,$$

где ξ_j – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, и λ_j – некоторая последовательность чисел. Последовательность λ_j может рассматриваться как последовательность собственных чисел линейного самосопряженного оператора.

Легко видеть, что если $|\lambda_j| \asymp j^{-\gamma}$, то при $\rho_n \asymp n^{-2r}$, $0 < r < 1/2$, наибольшими множествами (см. [6]) для тестовых статистик, являющихся квадратичными формами y_j, $1 \leqslant j < \infty$, являются шары $\mathbb{B}^s_{2\infty}$ для $r = \frac{2s}{1+4s+4\gamma}$. Таким образом, представляет интерес указать асимптотически минимаксные критерии для задачи проверки гипотез $\mathrm{H}_0 : \theta = 0$ при тех же самых альтернативах $\mathrm{H_n} : \theta \in V_n$, если $\rho_n \asymp n^{-2r}$.

Определим тестовую статистику

$$T^a_n(Y_n) = \sigma^{-2}\, n \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j^2\, y_j^2,$$

где κ_j^2 задаются уравнениями: $\kappa_j^2 = a\lambda_j^{-2}$ для $j \leqslant k_n$ и $\kappa_j^2 = 2sP_0\lambda_j^2 j^{-1-2s}$ для $j > k_n$, а постоянные $a = a_n$ и k_n являются решением уравнений

$$a_n \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j^{-4} + P_0\, k_n^{-2s} = \rho_n\,(1 + o(1)) \quad \text{и} \quad a_n \lambda_{k_n}^{-4} = 2sP_0 k_n^{-1-4s}(1 + o(1)).$$

Последовательности A_n и критические области S^a_n задаются так же, как и в теореме 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть* $|\lambda_j| \asymp j^{-\gamma}$. *Тогда для постановки задачи указанной выше, справедливо утверждение теоремы* 2.1.

Пример. Пусть $\lambda_j^2 = A\, j^{-2\gamma}$ и $\rho_n \asymp n^{\frac{-4s}{1+4s+4\gamma}}$. Тогда

$$A_n = \sigma^{-4} n^2 \rho_n^{\frac{1+4s+4\gamma}{2s}} A^2 \frac{8s^2(1+4\gamma)}{(1+2s+4\gamma)(1+4s+4\gamma)} \times \Big(\frac{1+2s+4\gamma}{1+4\gamma} P_0\Big)^{-\frac{1+4\gamma}{2s}} (1+o(1)).$$

Доказательство теоремы 2.2 полностью аналогично доказательству теоремы 2.1 и опускается.

§3. Доказательство теоремы 2.1

Зафиксируем δ, $0 < \delta < 1$. Зададим последовательность $\kappa_j^2(\delta)$, $1 \leqslant j < k_{n\delta} = \delta^{-1} k_n$, уравнениями (2.2) и (2.3) с постоянными P_0 и ρ_n замененными $P_0(1-\delta)$ и $\rho_n(1+\delta)$ соответственно. Положим $\kappa_j^2(\delta) = 0$ для $j > \delta^{-1} k_n$. Аналогично [3], определим байесовский критерий $\theta_j = \eta_j = \eta_j(\delta)$, $1 \leqslant j < \infty$, где η_j гауссовские случайные величины, $\mathbf{E}\,\eta_j = 0$, $\mathbf{E}\,\eta_j^2 = \kappa_j^2(\delta)$, и покажем, что простая модификация этих критериев асимптотически минимаксна для некоторой последовательности $\delta = \delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 3.1. *Для любого δ, $0 < \delta < 1$, имеет место*

$$\mathbf{P}(\, \eta(\delta) = \{\eta_j(\delta)\}_{j=1}^{\infty} \in V_n\,) = 1 + o(1) \tag{3.1}$$

при $n \to \infty$.

Обозначим

$$A_{n,\delta} = \sigma^{-4}\, n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j^4(\delta).$$

Прямыми вычислениями получаем

$$\lim_{\delta\to 0} \lim_{n\to\infty} A_n\, A_n^{-1}(\delta) = 1. \tag{3.2}$$

Обозначим $\gamma_j^2(\delta) = \kappa_j^2(\delta)\,(n^{-1}\sigma^2 + \kappa_j^2(\delta))^{-1}$.

Согласно лемме Неймана–Пирсона, критическая область задается неравенством

$$\begin{aligned} C_1 &< \prod_{j=1}^{k_{n\delta}} (2\pi)^{-1/2} \kappa_j^{-1}(\delta) \\ &\times \int \exp\Big\{ -\sum_{j=1}^{k_{n\delta}} (2\gamma_j^2(\delta))^{-1} (u_j - \gamma_j^2(\delta) y_j)^2 \Big\} du \exp\{-T_{n\delta}(y)\} \\ &= C \exp\{-T_{n\delta}(y)\}(1 + o(1)), \end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$T_{n\delta}(y) = n\,\sigma^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^2(\delta)\, y_j^2.$$

Определим критическую область

$$S_{n\delta} = \{\, y \,:\, R_{n\delta}(y) = (T_{n\delta}(y) - C_{n\delta})\,(2A_n(\delta))^{-1/2} > x_\alpha \,\},$$

где

$$C_{n\delta} = \mathbf{E}_0 T_{n\delta}(y) = \sigma^{-2} n \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^2(\delta).$$

Обозначим $L_{n\delta}$ критерий с критической областью $S_{n\delta}$.

Положим $\gamma_j^2 = \gamma_j^2(0)$, $1 \leqslant j < \infty$. Определим тестовые статистики T_n, R_n, критические области S_n и постоянные C_n таким же образом, как тестовые статистики $T_{n\delta}$, $R_{n\delta}$, критические области $S_{n\delta}$ и постоянные $C_{n,\delta}$ соответственно с постоянными $\gamma_j^2(\delta)$, замененными на γ_j^2. Обозначим L_n критерии, имеющие критические области S_n.

Лемма 3.2. *Пусть справедлива гипотеза H_0. Тогда распределения тестовых статистик $R_n^a(y)$ и $R_n(y)$ сходятся к стандартному нормальному распределению.*

Для последовательности $\theta_n = \{\theta_{jn}\} \in V_n$ имеет место

$$\mathbf{P}_{\theta_n}\Big(\Big(T_n^a(y) - C_n - \sigma^{-4}\, n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j^2 \theta_{jn}^2 \Big) (2A_n)^{-1/2} < x_\alpha \Big) = \Phi(x_\alpha)(1 + o(1))$$

и

$$\mathbf{P}_{\theta_n}\Big(\Big(T_n(y) - C_n - \sigma^{-4} n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j^2 \theta_{jn}^2 \Big) (2A_n)^{-1/2} < x_\alpha \Big) = \Phi(x_\alpha)(1 + o(1))$$

при $n \to \infty$.

Отсюда мы получаем следующее утверждение

Лемма 3.3. *Имеет место*

$$\beta(L_n, V_n) = \beta(L_n^a, V_n)\,(1 + o(1))$$

при $n \to \infty$.

Лемма 3.4. *Пусть справедлива гипотеза* H_0. *Тогда распределения тестовых статистик* $(T_{n\delta}(y) - C_{n\delta})\,(2A_{n\delta})^{-1/2}$ *сходятся к стандартному нормальному распределению.*

Имеет место

$$\mathbf{P}_{\eta(\delta)}(\,(T_{n\delta}(y) - C_{n\delta} - A_{n\delta})\,(2A_{n\delta})^{-1/2} < x_\alpha) = \Phi(x_\alpha)\,(1 + o(1))$$

при $n \to \infty$.

Лемма 3.5. *Имеет место*

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{\eta(\delta)}\beta_{\eta(\delta)}(L_{n\delta}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{\eta_0}\beta_{\eta_0}(L_n), \tag{3.4}$$

где $\eta_0 = \{\eta_{0j}\}_{j=1}^{\infty}$ *и* η_{0j} *– независимые гауссовские случайные величины,* $\mathbf{E}[\eta_{0j}] = 0$, $\mathbf{E}[\eta_{0j}^2] = \kappa_j^2$, $1 \leqslant j < \infty$.

Определим байесовское априорное распределение $\mathbf{P}_y$ как условное распределение η при условии $\eta \in V_n$. Обозначим $K_n = K_{n\delta}$ байесовский критерий, имеющий априорное распределение P_y. Обозначим W_n критическую область критерия $K_{n\delta}$.

Для любых множеств A и B обозначим $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Лемма 3.6. *Имеет место*

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty} \int\limits_{V_n} \mathbf{P}_\theta(S_{n\delta} \triangle V_{n\delta})\, d\,\mathbf{P}_y = 0$$

и

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_0(S_{n\delta} \triangle V_{n\delta}) = 0.$$

В доказательстве леммы 3.6 мы показываем, что если взять в интегралах в правой части (3.3) область интегрирования V_n, то они (в указанной нормировке) сходятся к единице по вероятности при $n \to \infty$. Данное утверждение доказывается как в случае справедливости гипотезы, так и байесовской альтернативы (см. [3]).

Из лемм 3.1–3.6 следует, что если $\alpha(K_n) = \alpha(L_n)(1+o(1)) = \alpha(1+o(1))$, $0 < \alpha < 1$, то для некоторой последовательности $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ имеет место

$$\begin{aligned}\int\limits_{V_n} \beta_\theta(K_n)\, d\mathbf{P}_y &= \int\limits_{V_n} \beta_\theta(L_n)\, d\,\mathbf{P}_y\,(1+o(1)) \\ &= \int \beta_{\eta_0}(L_n)\, d\mathbf{P}_{\eta_0}(1+o(1)).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Лемма 3.7. *Имеет место*

$$\mathbf{E}_{\eta_0}\, \beta_{\eta_0}(L_n) = \beta(L_n, V_n)\,(1+o(1)).$$

Из лемм 3.2, 3.5, (3.2), (3.5) и леммы 3.7 следует утверждение теоремы 2.1.

§4. Доказательство лемм

Доказательство лемм 3.2, 3.3 и 3.5 аналогично доказательству аналогичных утверждений в [3] и опускается.

Доказательство леммы 3.1. Непосредственными вычислениями получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{E}\, \eta_j^2(\delta) \geqslant \rho_n\,(1+\delta/2)$$

и

$$\mathbf{Var}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^2(\delta)\Big) < C\, n^{-2}\, A_n \asymp \rho_n^2\, k_n^{-1}.$$

Отсюда, применяя неравенство Чебышева, имеем

$$\mathbf{P}\,\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^2(\delta) > \rho_n\Big) = 1 + o(1)$$

при $n \to \infty$. Остается оценить

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_\mu(\,\eta \notin \mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)\,) \\ &\qquad = \mathbf{P}\Big(\max_{l_1 \leqslant i \leqslant l_2} i^{2s} \sum_{j=i}^{l_2} \eta_j^2 - P_0\Big(1 - \frac{\delta_1}{2}\Big) > P_0 \frac{\delta_1}{2}\Big) \leqslant \sum_{i=l_1}^{l_2} J_i,\end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$J_i = \mathbf{P}\Big(i^{2s} \sum_{j=i}^{l_2} \eta_j^2 - P_0 \Big(1 - \frac{\delta_1}{2}\Big) > P_0 \frac{\delta_1}{2}\Big).$$

Здесь $0 < \delta_1 < 1$.

Для оценки J_i применим следующее утверждение (см. [7]). □

Предложение 4.1. *Пусть* $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^l$ *– гауссовский случайный вектор, состоящий из независимых случайных величин* ξ_i, $\mathbf{E}[\xi_i] = 0$, $\mathbf{E}[\xi_i^2] = 1$. *Пусть* $A \in R^l \times R^l$ *и* $\Sigma = A^T A$. *Тогда имеет место*

$$\mathbf{P}(||A\xi||^2 > \mathrm{tr}(\Sigma) + 2\sqrt{\mathrm{tr}(\Sigma^2)\, t} + 2\,\|\Sigma\|\, t) \leqslant \exp\{-t\}.$$

Положим $\Sigma_i = \{\sigma_{lj}\}_{l,j=i}^{k_{n\delta}}$, где $\sigma_{jj} = j^{-2s-1} i^{2s} \frac{P_0 - \delta}{2s}$ и $\sigma_{lj} = 0$, если $l \neq j$.

Пусть $i \leqslant k_n$. Тогда

$$\mathrm{tr}(\Sigma_i^2) = i^{4s} \sum_{j=i}^{\infty} \kappa_j^4(\delta) < i^{4s}\, ((k_n - i)\, \kappa^4(\delta) + k_n^{-4s-1}) < C\, k_n^{-1}$$

и

$$\|\Sigma_i\| \leqslant i^{2s}\, \kappa^2 < C\, k_n^{-1}.$$

Следовательно,

$$2\,\sqrt{\mathrm{tr}(\Sigma_i^2)\, t} + 2\|\Sigma_i\|\, t \leqslant C\, (\sqrt{k_n^{-1}\, t} + k_n^{-1}\, t).$$

Отсюда, полагая $t = k_n^{1/2}$ и применяя предложение 4.1, получаем

$$\sum_{i=1}^{k_n} J_i \leqslant C\, k_n \exp\{-C\, k_n^{1/2}\}. \tag{4.2}$$

Пусть $i \geqslant k_n$. Тогда

$$\mathrm{tr}(\Sigma_i^2) < C\, i^{-1} \quad \text{и} \quad ||\Sigma_i|| \leqslant C\, i^{-1}.$$

Отсюда, полагая $t = i^{1/2}$, в силу предложения 4.1, получаем

$$\sum_{i=k_n+1}^{k_{n\delta}} J_i \leqslant \sum_{i=k_n+1}^{k_{n\delta}} \exp\{-C\, i^{1/2}\} < \exp\{-C_1\, k_n^{1/2}\}. \tag{4.3}$$

Из (4.1), (4.2), (4.3) следует лемма 3.1.

Доказательство леммы 3.6. Из рассуждений доказательства леммы 4 в [3] следует, что лемма 3.6 будет доказана, если мы покажем, что при $n \to \infty$ имеет место

$$\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} (\,\eta_j(\delta) + y_j\,\gamma_j(\delta)\,\sigma^{-1}\,n^{1/2})^2 > \rho_n\right) = 1 + o(1) \tag{4.4}$$

и

$$\mathbf{P}\left(\sup_i i^{2s} \sum_{j=i}^{\infty} (\eta_j(\delta) + y_j\,\gamma_j(\delta)\,\sigma^{-1}\,n^{1/2})^2 > \rho_n\right) = 1 + o(1), \tag{4.5}$$

где y_j, $1 \leqslant j < \infty$, распределены согласно гипотезе или байесовской альтернативе.

Мы докажем только (4.5) в случае байесовской альтернативы. В других случаях рассуждения аналогичны.

Имеем

$$\begin{aligned} i^{2s} \sum_{j=i}^{\infty} (\eta_j(\delta) + y_j\,\gamma_j(\delta)\,\sigma^{-1}\,n^{1/2}\,)^2 \\ &= i^{2s} \sum_{j=i}^{\infty} \eta_j^2(\delta) + i^{2s} \sum_{j=i}^{\infty} \eta_j(\delta)\,y_j\,\gamma_j(\delta)\,\sigma^{-1}\,n^{1/2} \\ &+ i^{2s} \sum_{j=i}^{\infty} y_j^2\,\gamma_j^2(\delta)\,\sigma^{-2} n = J_{1i} + J_{2i} + J_{3i}. \end{aligned}$$

Оценка J_{1n} приведена в лемме 3.1.

Имеем

$$J_{2i} \leqslant J_{1i}^{1/2}\,J_{3i}^{1/2}.$$

Таким образом остается показать, что для любого C,

$$\mathbf{P}_{\eta(\delta)}\left(\sigma^{-2}\,n\,\sup_i i^{2s} \sum_{j=i}^{\infty} y_j^2\,\gamma_j^4(\delta) > C\delta\right) = o(1)$$

при $n \to \infty$.

Заметим, что $y_j = \zeta_j + \sigma\,n^{-1/2}\,\xi_j$, где ζ_j, ξ_j, $1 \leqslant j < \infty$, – независимые гауссовские случайные величины, $\mathbf{E}\,\zeta_j = 0$, $\mathbf{E}\,\zeta_j^2 = \kappa_j^2(\delta)$, $\mathbf{E}\,\xi_j = 0$, $\mathbf{E}\,\xi_j^2 = 1$.

Следовательно,

$$\sigma^{-2}\, n \sum_{j=i}^{\infty} y_j^2 \gamma_j^4(\delta) = \sigma^{-2}\, n \sum_{j=i}^{\infty} \gamma_j^4(\delta)\, \zeta_j^2 + \sigma^{-1}\, n^{1/2} \sum_{j=i}^{\infty} \gamma_j^4(\delta)\, \zeta_j\, \xi_j \\ + \sum_{j=i}^{\infty} \gamma_j^4(\delta)\, \xi_j^2 = I_{1i} + I_{2i} + I_{3i}. \tag{4.6}$$

Так как $n\gamma_j^2 = o(1)$, оценки вероятности $i^{2s} I_{1i}$ получаются так же, как оценки (4.1). Заметим, что $I_{2i} \leqslant I_{1i}^{1/2}\, I_{3i}^{1/2}$. Таким образом, остается показать, что для любого C имеет место

$$\mathbf{P}_{\eta(\delta)}\Big(\sup_i i^{2s} \sum_{j=i}^{\infty} \gamma_j^4(\delta)\, \xi_j^2 > \delta/C\Big) = o(1) \tag{4.7}$$

при $n \to \infty$. Так как $\gamma_j^2 = \kappa_j^2\,(1 + o(1)) = o(1)$, эта оценка получается на основе таких же рассуждений, как при доказательстве (4.1). □

Доказательство леммы 3.7. В силу лемм 3.2, 3.3 и 3.5 достаточно показать, что

$$\inf_{\theta \in V_n} \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j^2\, \theta_j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j^4.$$

Обозначим $u_k = k^{2s} \sum\limits_{j=k}^{\infty} \theta_j^2$. Заметим, что $u_k \leqslant P_0$.

Тогда $\theta_j^2 = u_j\, j^{-2s} - u_{j+1}\,(j+1)^{-2s}$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} A_n(\theta) &= \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j^2\, \theta_j^2 = \kappa^2 \sum_{j=1}^{k_n} \theta_j^2 + \sum_{j=k_n}^{\infty} \kappa_j^2\,(u_j\, j^{-2s} - u_{j+1}\,(j+1)^{-2s}) \\ &= \kappa^2 \sum_{j=1}^{k_n} \theta_j^2 + \kappa^2 u_{k_n} k_n^{-2s} + 2s\, P_0 \sum_{j=k_n+1}^{\infty} u_j (j^{-4s-1} - (j-1)^{-2s-1} j^{-2s}) \\ &= \kappa^2 \rho_n + 2s\, P_0 \sum_{j=k_n+1}^{\infty} u_j\,(j^{-4s-1} - (j-1)^{-2s-1} j^{-2s}). \end{aligned}$$

Так как $j^{-4s-1} - (j-1)^{-2s-1}\, j^{-2s}$ отрицательна, то $\inf A_n(\theta)$ достигается для $u_j = P_0$. Следовательно, $\theta_j^2 = \kappa_j^2$ для $j > k_\epsilon$. □

Таким образом, достаточно решить следующую экстремальную задачу

$$\kappa^2 \inf_{\theta_j} \sum_{j=1}^{k_n} \theta_j^2 + \sum_{j=k_n+1}^{\infty} \kappa_j^4,$$

если

$$\sum_{j=1}^{k_n} \theta_j^2 + \sum_{j=k_n+1}^{\infty} \kappa_j^2 = \rho_n \quad \text{и} \quad k_n^{2s} \sum_{j=k_n}^{\infty} \theta_j^2 < P_0, \quad 1 \leqslant j < \infty,$$

где $\theta_j^2 = \kappa_j^2$ при $j \geqslant k_n$.

Легко видеть, что инфимум достигается при $\theta_j^2 = \kappa_j^2 = \kappa^2$ для $j \leqslant k_n$.

Список литературы

1. F. Autin, M. Clausel, J. Freyermuth, C. Marteau, *Maxiset point of view for signal detection in inverse problems.* — (2018). `arxiv.org 1803.05875`.
2. L. Comminges, A. S. Dalalyan, *Minimax testing of a composite null hypothesis defined via a quadratic functional in the model of regression.* — Elect. J. Statist. **7** (2013), 146–190.
3. M. C. Ермаков, *Минимаксное обнаружение сигнала в гауссовском белом шуме.* — Теория вероятн. и ее примен. **35** (1990), 667–679.
4. M. C. Ермаков, *Минимаксное обнаружение сигнала в цветном гауссовском белом шуме.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **320** (2004), 54–70.
5. M. C. Ермаков, *Минимаксное непараметрическое оценивание на наибольших множествах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 120–133.
6. M. S. Ermakov, *On consistensy and inconsistensy of nonparametric tests.* — (2018). `arXiv.org 1807.09076`.
7. D. Hsu, S. M. Kakade, T. Zang, *A tail inequality for quadratic forms of subgaussian random vector.* — Electr. Commun. Probab. **17**, No. 52 (2012), 1–6.
8. Ю. И. Ингстер, *О сравнении минимаксных свойств критериев Колмогорова, ω^2 и χ^2.* — Теория вероятн. и ее примен. **32** (1987) 346–350.
9. Yu. I. Ingster, I. A. Suslina, *Nonparametric Goodness-of-fit Testing under Gaussian Models.* — Lect. Notes Statist., Springer: N.Y. **169** (2002).
10. Yu. I. Ingster, T. Sapatinas, I. A. Suslina, *Minimax signal detection in ill-posed inverse problems.* — Ann. Statist. **40** (2012), 1524–1549.
11. I. M. Johnstone, *Gaussian estimation. Sequence and wavelet models.* — Book Draft (2015), `http: statweb.stanford.edu imj`
12. G. Kerkyacharian, D. Picard, *Density estimation by kernel and wavelets methods: optimality of Besov spaces.* — Statist. Probab. Lett. **18** (1993), 327–336.
13. G. Kerkyacharian, D. Picard, *Minimax or maxisets?* — Bernoulli **8** (2002), 219–253.
14. B. Laurent, J. M. Loubes, C. Marteau, *Testing inverse problems: a direct or an indirect problem?* — J. Statist. Planning Inference **141** (2011), 1849–1861.

15. М. С. Пинскер, *Оптимальная фильтрация квадратично интегрируемого сигнала в гауссовском белом шуме.* — Пробл. передачи информ. **16** (1980), 120–133.
16. V. Rivoirard, *Maxisets for linear procedures.* — Statist. Probab. Lett. **67** (2004), 267–275.
17. A. B. Tsybakov, *Introduction to Nonparametric Estimation.* Springer Series in Statistics, Springer: Berlin, **130** (2009).

Ermakov M. S. On asymptotically minimax detection of signal in Gaussian white noise.

For the problem of nonparametric detection of signal in Gaussian white noise, we find asymptotically minimax tests on maxxisets.

Институт проблем машиноведения РАН;
С.-Петербург;
С.-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: erm2512@gmail.com

Поступило 7 ноября 2018 г.