Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев

ОЦЕНКИ БЛИЗОСТИ СВЕРТОК ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКАХ

Цель настоящей работы – показать, что результаты, полученные ранее о приближении распределений сумм независимых слагаемых сопровождающими обобщенными пуассоновскими законами, и оценки близости последовательных сверток многомерных распределений могут быть перенесены на оценки близости сверток вероятностных распределений на выпуклых многогранниках.

Введем сначала некоторые обозначения. Пусть $\mathfrak{F}_d$ обозначает множество вероятностных распределений, определенных на борелевской σ-алгебре подмножеств евклидова пространства $\mathbf{R}^d$ и $\mathcal{L}(\xi) \in \mathfrak{F}_d$ – распределение d-мерного случайного вектора ξ. Пусть $\mathfrak{F}_d^s \subset \mathfrak{F}_d$ – множество симметричных распределений. Для $F \in \mathfrak{F}_d$ мы обозначим соответствующие характеристические функции через $\widehat{F}(t)$, $t \in \mathbf{R}^d$, а функции распределения – через $F(x) = F\{(-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_d]\}$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$. Равномерное расстояние Колмогорова определяется формулой

$$\rho(G, H) = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \big| G(x) - H(x) \big|, \quad G, H \in \mathfrak{F}_d.$$

Символами c и $c(\,\cdot\,)$ мы обозначаем вообще говоря различные положительные абсолютные постоянные и величины, зависящие только от аргумента в скобках. При $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$ мы обозначим

$$\mathfrak{F}_d^{(\alpha)} = \Big\{ F \in \mathfrak{F}_d^s : \widehat{F}(t) \geqslant -1 + \alpha, \ \text{при всех } t \in \mathbf{R}^d \Big\}, \quad \mathfrak{F}_d^+ = \mathfrak{F}_d^{(1)}.$$

Произведения и степени мер будут пониматься в смысле свертки: $GH = G * H$, $H^m = H^{m*}$, $H^0 = E = E_0$, где E_x – распределение, сосредоточенное в точке $x \in \mathbf{R}^d$. Естественным аппроксимирующим

Ключевые слова: суммы независимых случайных величин, близость последовательных сверток, выпуклые многогранники, аппроксимация, неравенства.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 16-01-00367 и гранта СПбГУ–ННИО 6.37.65.2017.

безгранично делимым распределением для $\prod_{i=1}^{n} F_i$ является сопровождающее обобщенное распределение Пуассона $\prod_{i=1}^{n} e(F_i)$, где

$$e(H) = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k}{k!}, \quad H \in \mathfrak{F}_d,$$

и, в более общем случае,

$$e(\alpha H) = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k H^k}{k!}, \quad \alpha > 0. \tag{1}$$

Хорошо известно, что распределение $e(\alpha H)$ безгранично делимо.

Т. Арак [1] показал, что если F является симметричным одномерным распределением с неотрицательной характеристической функцией для всех $t \in \mathbf{R}$, то

$$\rho(F^n, e(nF)) \leqslant c\, n^{-1}. \tag{2}$$

Он разработал и использовал так называемый метод треугольных функций (см. [2, глава 3, параграфы 2–4]).

А. Ю. Зайцев [6] применил методы, использованные Араком при доказательстве неравенства (2) (см. [2, глава 5, параграфы 2, 5–7]). Позднее ему удалось видоизменить эти методы, приспособив их к многомерному случаю (см. [7–11]). В частности, в работе [10] получен многомерный аналог неравенства (2).

С помощью метода треугольных функций и его обобщений было получено несколько неравенств типа

$$\rho(G, H) \leqslant c(d)\, \varepsilon, \tag{3}$$

когда $\varepsilon < 1$ мало, $G, H \in \mathfrak{F}_d$ и справедливы неравенства

$$\sup_{t \in \mathbf{R^d}} \bigl|\widehat{G}(t) - \widehat{H}(t)\bigr| \leqslant c\, \varepsilon \tag{4}$$

(см. обсуждение случая $d = 1$ в [2, глава 3, параграф 3]). Заметим, что в общем случае из (4) не следует (3).

Неравенство (3) эквивалентно справедливости неравенства

$$\bigl|G\{X\} - H\{X\}\bigr| \leqslant c(d)\, \varepsilon \tag{5}$$

для всех множеств X вида

$$X = \bigl\{x \in \mathbf{R}^d : a_j \leqslant \langle x, e_j \rangle \leqslant b_j,\ j = 1, \ldots, d\bigr\}, \tag{6}$$

где $e_j \in \mathbf{R}^d$ – векторы стандартного евклидова базиса, $-\infty \leqslant a_j \leqslant b_j \leqslant \infty$, $j = 1, \dots, d$.

При $m \in \mathbf{N}$ мы обозначим через $\mathfrak{X}_m$ совокупность выпуклых многогранников $X \subset \mathbf{R}^d$, представимых в виде

$$X = \bigl\{x \in \mathbf{R}^d : a_j \leqslant \langle x, t_j\rangle \leqslant b_j,\ j = 1, \dots, m\bigr\},$$

где $t_j \in \mathbf{R}^d$, $-\infty \leqslant a_j \leqslant b_j \leqslant \infty$, $j = 1, \dots, m$, и, при $H = \mathcal{L}(\xi) \in \mathfrak{F}_d$, $X \in \mathfrak{X}_m$,

$$q(H, X) = \inf_{t \in \mathbf{R}^d, \|t\|=1} Q\bigl(\mathcal{L}(\langle \xi, t\rangle), \lambda\bigl\{\{\langle x, t\rangle : x \in X\}\bigr\}\bigr),$$

где $\lambda\{\,\cdot\,\}$ – мера Лебега и $Q(F,\, b) = \sup_x F\bigl\{\,[x,\, x + b]\,\bigr\}$ – функция концентрации распределения $F \in \mathfrak{F}_1$. Определим также

$$\rho_m(G, H) = \sup_{X \in \mathfrak{X}_m} \bigl|G\{X\} - H\{X\}\bigr|.$$

В работе [11] А. Ю. Зайцев получил несколько неравномерных оценок вида $|G\{X\} - H\{X\}| \leqslant c(m)\, \varepsilon\, \beta(G, H, X) + o(\varepsilon)$, содержащих зависящие от сравниваемых распределений и множества $X \in \mathfrak{X}_m$ множители $\beta(G, H, X)$, которые удовлетворяют неравенству $\beta(G, H, X) \leqslant c(m)$ и могут оказаться малыми, если многогранник X в некотором смысле достаточно мал. Теоремы 1 и 2 были получены в [11] как следствия соответствующих результатов работ [8–10] которые были доказаны только для случая, когда X является параллелепипедом (6) со сторонами, параллельными осям координат. Цель настоящей работы – сформулировать и обсудить ранее не упоминавшиеся в литературе аналогичные оценки величин $\rho_m(G, H)$ и $\bigl|G\{X\} - H\{X\}\bigr|$, $X \in \mathfrak{X}_m$ где $G, H \in \mathfrak{F}_d$ – некоторые свертки вероятностных распределений.

Теорема 1. *Пусть* $F \in \mathfrak{F}_d^{(\alpha)}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$, $m, n \in \mathbf{N}$, $X \in \mathfrak{X}_m$, $D = e(nF)$, $q_1 = q(D, X)$. *Тогда*

$$\begin{aligned}&\bigl|(F^n)\{X\} - D\{X\}\bigr|\\ &\leqslant c(m)\,\Bigl(n^{-1} q_1^{1/5}\bigl(\bigl|\log q_1\bigr| + 1\bigr)^{(17m+24)/5} + \exp(-n\alpha + c\, m\, \log^3 n)\Bigr)\end{aligned} \tag{7}$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned}&\bigl|(F^n)\{X\} - (F^{n+1})\{X\}\bigr|\\ &\qquad\leqslant c(m)\,\Bigl(n^{-1} q_1^{1/3}\bigl(\bigl|\log q_1\bigr| + 1\bigr)^{3m+2} + \exp(-n\alpha + c\, m\, \log^3 n)\Bigr).\end{aligned} \tag{8}$$

Следовательно,

$$\max\bigl\{\rho_m(F^n, e(nF)), \rho_m(F^n,F^{n+1})\bigr\} \leqslant c(m)\Bigl(n^{-1}+\exp(-n\alpha+c\,m\log^3 n)\Bigr). \quad (9)$$

Теорема 2. *Пусть распределения $G_i \in \mathfrak{F}_d$ представлены в виде*

$$G_i = (1-p_i)\,E + p_i\,V_i, \tag{10}$$

где $V_i \in \mathfrak{F}_d$ – произвольные распределения, $0 \leqslant p_i \leqslant p = \max_j p_j$,

$$m \in \mathbf{N}, \quad X \in \mathfrak{X}_m, \quad G = \prod_{i=1}^n G_i, \quad D = \prod_{i=1}^n e(G_i), \quad q_2 = q(D_0, X),$$

где D_0 – d-мерное безгранично делимое распределение с характеристической функцией

$$\widehat{D}_0(t) = \prod_{i=1}^n \exp\bigl(-p_i(1-p_i)\bigl(1-\operatorname{Re}\widehat{V}_i(t)\bigr)\bigr), \quad t \in \mathbf{R}^d.$$

Тогда

$$\bigl|G\{X\} - D\{X\}\bigr| \leqslant c(m)\,q_2^{1/3}\bigl(\bigl|\log q_2\bigr|+1\bigr)^{3m+2}\,p \tag{11}$$

и, следовательно,

$$\rho_m(G, D) \leqslant c(m)\,p. \tag{12}$$

Легко видеть, что в условиях теорем 1 и 2 мы имеем $0 \leqslant q_j \leqslant 1$, $j = 1, 2$, и, кроме того, величины q_j могут быть малыми. Например, для фиксированного ограниченного множества $X \in \mathfrak{X}_m$ величина q_1 убывает при $n \to \infty$ не медленнее, чем $O(n^{-1/2})$. Таким образом, неравенства (7), (8) и (11) значительно усиливают неравенства (9) и (12). В то же время нет оснований ожидать, что неравенства (7), (8) и (11) оптимальны в смысле зависимости правых частей от параметров q_1 и q_2. В частности, уже из результатов Арака (см. [2, теорема 7.1, глава V]) следует, что при $m = 1$, $\alpha = 1$ неравенство (7) можно заменить на

$$\bigl|(F^n)\{X\} - D\{X\}\bigr| \leqslant c\,n^{-1}q_1^{1/3}\bigl(\bigl|\log q_1\bigr|+1\bigr)^{13/3}. \tag{13}$$

В неравенствах (7) и (8) мы имеем $\varepsilon = n^{-1}$ и

$$\beta(F^n, D, X) = q_1^{1/5}\bigl(\bigl|\log q_1\bigr|+1\bigr)^{(17m+24)/5},$$

$$\beta(F^n, F^{n+1}, X) = q_1^{1/3}\bigl(\bigl|\log q_1\bigr|+1\bigr)^{3m+2}$$

соответственно.

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на применении m-мерных вариантов соответствующих оценок близости сравниваемых распределений на множествах вида (6) с $d = m$. При этом очень важно то, что m-мерные векторы с координатами $\langle \xi, t_j \rangle$, $\langle \eta, t_j \rangle$, $t_j \in \mathbf{R}^d$, $j = 1, \ldots, m$, удовлетворяют тем же m-мерным условиям, что и случайные векторы $\xi, \eta \in \mathbf{R}^d$, имеющие сравниваемые d-мерные распределения. Например, если $F = \mathcal{L}(\xi) \in \mathfrak{F}_d^{(\alpha)}$ при некотором α, удовлетворяющем $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$, то $\mathcal{L}\big(\langle \xi, t_1 \rangle, \ldots, \langle \xi, t_m \rangle\big) \in \mathfrak{F}_m^{(\alpha)}$. Аналогично, если $F = \mathcal{L}(\xi) \in \mathfrak{F}_d^s$, то $\mathcal{L}\big(\langle \xi, t_1 \rangle, \ldots, \langle \xi, t_m \rangle\big) \in \mathfrak{F}_m^s$. Подобные же утверждения могут быть высказаны об n и $(n+1)$-кратных свертках таких распределений и о других распределениях, участвующих в формулировках теорем 1 и 2. Таким образом, грубо говоря, из известных оценок расстояния ρ в пространстве $\mathbf{R}^m$ вытекают оценки расстояния ρ_m в пространстве $\mathbf{R}^d$.

Ситуацию, рассмотренную в теореме 2, можно интерпретировать как сравнение выборки, содержащей независимые наблюдения редких событий, с пуассоновским точечным процессом, который получается после пуассонизации исходной выборки (см. [3, 12]). Например, для любой измеримой функции $f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}^m$ (равной нулю, если редкие события не происходят)

$$\rho\bigg(\mathcal{L}\Big(\sum_i f(X_i)\Big), \mathcal{L}\Big(\sum_k f(Y_k)\Big)\bigg) \leqslant c(m)\, p. \tag{14}$$

Здесь $\mathcal{X}$ – пространство редких событий, X_i – независимые редкие события, такие что $\mathcal{L}\big(f(X_i)\big) = (1 - p_i)\, E + p_i\, V_i$, где $E, V_i \in \mathfrak{F}_m$, которые происходят с вероятностями, не превосходящими p, а Y_k – точки соответствующего пуассоновского точечного процесса. В частности, в случае когда $\mathcal{X} = \mathbf{R}^d$ и $f(x) = \big(\langle x, t_1 \rangle, \ldots, \langle x, t_m \rangle\big)$ при $x \in \mathbf{R}^d$, неравенство (14) превращается в неравенство (12).

В оставшейся части статьи мы изучим, насколько мала разница между F^{n+k} и F^n, то есть, насколько может измениться распределение суммы n независимых одинаково распределенных слагаемых после добавления к ней следующего слагаемого или группы слагаемых. Частный случай этой проблемы рассматривается в неравенстве (7) теоремы 1.

В работах [4,5,8] было показано, что можно получить содержательные оценки близости F^{n+k} и F^n без каких бы то ни было моментных условий. Более того, если распределение F центрировано так, что все его маргинальные распределения имеют нулевые медианы, то

$$\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant c\, d\, n^{-1/2}, \tag{15}$$

где c – некоторая абсолютная постоянная. Доказательство этого неравенства сравнительно просто и основано на классических оценках функций концентрации сверток. Существенно более сложные методы необходимы для исследования случая симметричных распределений $F \in \mathfrak{F}_d^s$. В этом случае справедливо неравенство (15) и оно оптимально по степени n. Однако оно может быть существенно усилено в случае, когда характеристическая функция $\widehat{F}(t)$ равномерно отделена от -1. В частности,

$$\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant c(d)\, n^{-1}, \tag{16}$$

если $\widehat{F}(t) \geqslant 0$ при всех $t \in \mathbf{R}^d$. Заметим, что неравенство (8) – намного более общее по сравнению с (16). Используя этот факт для распределения F^2 с симметричным F, мы получаем парадоксальное утверждение: для всех натуральных чисел n и для любого симметричного распределения F справедливы неравенства

$$\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant c\, d\, n^{-1/2} \quad \text{и} \quad \rho(F^n, F^{n+2}) \leqslant c(d)\, n^{-1}, \tag{17}$$

причем оба они оптимальны в смысле порядка по n. Из неравенств (17) вытекает следующая теорема 3.

Теорема 3. *Пусть $F \in \mathfrak{F}_d^s$, $k, n \in \mathbf{N}$. Тогда*

$$\rho(F^n, F^{n+2k}) \leqslant c(d)\, k\, n^{-1}, \tag{18}$$

$$\rho(F^n, F^{n+2k+1}) \leqslant c\, d\, n^{-1/2} + c(d)\, k\, n^{-1}. \tag{19}$$

В частности,

$$\sup_{k \leqslant \sqrt{n}} \rho(F^n, F^{n+k}) \leqslant c(d)\, n^{-1/2}. \tag{20}$$

Очевидно, что информация о близости F^{n+k} и F^n полезна для изучения распределений вида

$$G = \sum_{s=0}^{\infty} p_s\, F^s, \quad 0 \leqslant p_s \leqslant 1, \quad \sum_{s=0}^{\infty} p_s = 1.$$

В частности, используя (1) и оценки близости F^{n+k} и F^n, А. Ю. Зайцев [8] доказал следующую теорему 4.

Теорема 4. *Пусть $F \in \mathfrak{F}_d^s$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда*

$$\rho(F^n, e(nF)) \leqslant c(d)\, n^{-1/2}. \tag{21}$$

Одномерный вариант теоремы 4 был несколько ранее получен в работе [5].

Очевидно, что если распределение $F \in \mathfrak{F}_d$ сосредоточено на гиперплоскости, которая не содержит нуля и ортогональна одной из осей координат, то $\rho(F^n, F^{n+k}) = 1$ при всех $n, k \in \mathbf{N}$. В частности, это верно в случае, когда $F = E_a$, $a \in \mathbf{R}^d$, $a \neq 0$. С другой стороны, если все распределения $F^{(j)} \in \mathfrak{F}_1$, $j = 1, \ldots, d$, координат вектора ξ с $\mathcal{L}(\xi) = F$ либо невырождены, либо равны $E \in \mathfrak{F}_1$, то, как показано в работе А. Ю. Зайцева [4], $\rho(F^n, F^{n+1}) \to 0$ при $n \to \infty$ и, кроме того,

$$\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant \frac{c(F)}{\sqrt{n}} \quad \text{для всех } n \in \mathbf{N}. \tag{22}$$

Пусть $F \in \mathfrak{F}_1$ – одномерное симметричное решетчатое распределение, сосредоточенное на множестве нечетных чисел. Тогда распределения F^n, $n = 1, 2, \ldots$, сосредоточены либо на множестве нечетных, либо на множестве четных чисел, в соответствии с четностью числа n. Поэтому, $\rho(F^n, F^{n+1}) \geqslant Q(F^n, 0)/2$. Для многих распределений, например, для $F = E_{-1}/2 + E_1/2$ функция концентрации $Q(F^n, 0)$ ведет себя как $c(F)\, n^{-1/2}$ при $n \to \infty$. Это указывает на то, что порядок убывания по n правой части (22) не может быть увеличен без дополнительных предположений.

Легко показать, что распределение $F \in \mathfrak{F}_1^s$ сосредоточено на множестве нечетных чисел тогда и только тогда, когда его характеристическая функция $\widehat{F}(t)$ равна -1 в точках $t = (2k+1)\pi$ при всех $k \in \mathbf{Z}$. Например, $\widehat{F}(t) = \cos t$ для $F = E_{-1}/2 + E_1/2$. Неравенство (9) теоремы 1 говорит о том, что отделенность от -1 характеристической функции распределения $F \in \mathfrak{F}_d^s$ приводит к более быстрому убыванию $\rho(F^n, F^{n+1})$, чем может обеспечить неравенство (22).

Аналогично доказательству теорем 1 и 2, мы можем использовать неравенства (18)–(22) для получения соответствующих аналогов (18)–(22) для близости сверток d-мерных распределений на выпуклых многогранниках $X \in \mathfrak{X}_m$. Теоремы 5–7 являются основными новыми результатами настоящей работы.

Теорема 5. *Пусть* $F \in \mathfrak{F}_d^s$, $k, m, n \in \mathbf{N}$. *Тогда*

$$\rho_m(F^n, e(nF)) \leqslant c(m)\, n^{-1/2}, \tag{23}$$

$$\rho_m(F^n, F^{n+2k}) \leqslant c(m)\, k\, n^{-1}, \tag{24}$$

$$\rho_m(F^n, F^{n+2k+1}) \leqslant c\, m\, n^{-1/2} + c(m)\, k\, n^{-1}. \tag{25}$$

В частности,

$$\sup_{k\leqslant\sqrt{n}} \rho_m(F^n, F^{n+k}) \leqslant c(m)\, n^{-1/2}. \tag{26}$$

Для $m \in \mathbf{N}$, $t_1, \dots, t_m \in \mathbf{R}^d$ мы обозначим через $\mathfrak{X}(t_1, \dots, t_m)$ совокупность выпуклых многогранников $X \subset \mathbf{R}^d$ представимых в

$$X = \bigl\{x \in \mathbf{R}^d : a_j \leqslant \langle x, t_j\rangle \leqslant b_j,\ j = 1, \dots, m\bigr\}.$$

Очевидно, что

$$\mathfrak{X}_m = \bigcup_{t_1,\dots,t_m} \mathfrak{X}(t_1, \dots, t_m).$$

Следующая теорема 6 вытекает из неравенства (22).

Теорема 6. *Пусть* $F = \mathcal{L}(\xi) \in \mathfrak{F}_d$, $m \in \mathbf{N}$, $t_1, \dots, t_m \in \mathbf{R}^d$, *и все распределения случайных величин* $\langle\xi, t_j\rangle$, $j = 1, \dots, m$, *либо невырождены, либо равны* $E \in \mathfrak{F}_1$. *Тогда при всех* $X \in \mathfrak{X}(t_1, \dots, t_m)$

$$\bigl|(F^n)\{X\} - (F^{n+1})\{X\}\bigr| \leqslant c(F, t_1, \dots, t_m)\, n^{-1/2}. \tag{27}$$

Таким образом, имеет место альтернатива: левая часть (27) либо равна единице, либо убывааеt, по крайней мере как $O(n^{-1/2})$.

Величина $c(F, t_1, \dots, t_m)$ может быть больше любой абсолютной константы. Например, если $F = F_n \in \mathfrak{F}_1$ зависит от n и $F_n\bigl\{[n, n+1)\bigr\} = 1$, то $\rho_1(F_n^n, F_n^{n+1}) = 1$.

Однако следует отметить, что существует разница между теоремами 1–2 и теоремами 5–6. В теоремах 1–2 оценки неравномерны. Они содержат множители $\beta(\,\cdot\,, \,\cdot\,, X)$, которые зависят от q_j, $j = 1, 2$, и могут быть малыми для небольших множеств $X \in \mathfrak{X}_m$. Оценки теорем 5–6 не могут быть улучшены, даже если мы сравниваем вероятности попадания в множество, содержащее единственную точку 0, когда $d = 1$ и $F = E_{-1}/2 + E_1/2$. Исключением является неравенство (24). Применяя неравенство (8) к распределению $F^2 \in \mathfrak{F}_d^+$, легко показать, что

$$\begin{aligned}&\bigl|(F^n)\{X\} - (F^{n+2k})\{X\}\bigr| \\ &\qquad\leqslant c(m)\, k\, \Bigl(n^{-1} q_3^{1/3} \bigl(\bigl|\log q_3\bigr| + 1\bigr)^{3m+2} + \exp(-n + c\, m\, \log^3 n)\Bigr)\end{aligned} \tag{28}$$

для любого $X \in \mathfrak{X}_m$, где $q_3 = q(e(n_0 F^2), X)$ и n_0 – максимальное целое число, которое меньше или равно $n/2$.

В заключение сформулируем вытекающий из теоремы 5 результат о близости распределений сумм случайного числа независимых одинаково распределенных случайных векторов. Для расстояния $\rho(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ этот результат содержится в работе [8, теорема 1.3].

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы с общим распределением $F \in \mathfrak{F}_d$ и пусть $(\mu, \nu) \in \mathbf{Z}^2$ – двумерный случайный вектор с целочисленными неотрицательными координатами, не зависящий от последовательности $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$. Обозначим

$$U = \mathcal{L}(\mu), \;\; V = \mathcal{L}(\nu), \;\; G = \mathcal{L}(\xi_1 + \dots + \xi_\mu), \;\; H = \mathcal{L}(\xi_1 + \dots + \xi_\nu). \quad (29)$$

Хорошо известно, что тогда

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\mu = k\}\, F^k, \quad H = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu = k\}\, F^k. \quad (30)$$

Теорема 7. *Если $F \in \mathfrak{F}_d^s$, то*

$$\rho_m(G, H) \leqslant \inf \mathbf{E}\, \min\Big\{\frac{cm}{\sqrt{\nu + 1}} + c(m)\, \frac{|\mu - \nu|}{\nu + 1}, 1\Big\}, \quad (31)$$

а если $F \in \mathfrak{F}_d^+$, то

$$\rho_m(G, H) \leqslant \inf \mathbf{E}\, \min\Big\{c(m)\, \frac{|\mu - \nu|}{\nu + 1}, 1\Big\}. \quad (32)$$

Здесь инфимум берется по всевозможным двумерным распределениям $\mathcal{L}((\mu, \nu)) \in \mathfrak{F}_2$, таким что $\mathcal{L}(\mu) = U$, $\mathcal{L}(\nu) = V$.

Интересной проблемой является распространение наших неравенств на произвольные выпуклые множества X. Это нельзя вывести из теорем 1, 2 и 5–7, так как константы $c(m)$ зависят от m.

Список литературы

1. Т. В. Арак, *О сближении n-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами.* — Теория вероятн. и ее примен. **25**, No. 2 (1980), 225–246.
2. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР **174** (1986), 217 с.
3. Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев, *Редкие события и пуассоновские точечные процессы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 109–119.
4. А. Ю. Зайцев, *Оценка близости распределений последовательных сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **97** (1980), 83–87.

5. А. Ю. Зайцев, *Некоторые свойства n-кратных сверток распределений.* — Теория вероятн. и ее примен. **26**, No. 1 (1981), 152–156.
6. А. Ю. Зайцев, *О точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин, отличных от нуля с малой вероятностью, с помощью сопровождающих законов.* — Теория вероятн. и ее примен. **28**, No. 2 (1983), 625–636.
7. А. Ю. Зайцев, *К многомерному обобщению метода треугольных функций.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **158** (1987), 81–104.
8. A. Yu. Zaitsev, *Estimates for the closeness of successive convolutions of multidimensional symmetric distributions.* — Probab. Theory Relat. Fields **79**, No. 2 (1988), 175–200.
9. А. Ю. Зайцев, *Многомерный вариант второй равномерной предельной теоремы Колмогорова.* — Теория вероятн. и ее примен. **34**, No. 1 (1989), 128–151.
10. А. Ю. Зайцев, *Об аппроксимации сверток многомерных симметричных распределений сопровождающими законами.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **177** (1989), 55–72.
11. А. Ю. Зайцев, *Об одном классе неравномерных оценок в многомерных предельных теоремах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **184** (1990), 92–105.
12. А. Ю. Зайцев, *Об аппроксимации выборки пуассоновским точечным процессом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **298** (2003), 111–125.

Götze F., Zaitsev A. Yu. Estimates for the closeness of convolutions of probability distributions on convex polyhedra.

The aim of the present work is to show that the results obtained earlier on the approximation of distributions of sums of independent summands by the accompanying compound Poisson laws and the estimates of the proximity of sequential convolutions of multidimensional distributions may be transferred to the estimation of the closeness of convolutions of probability distributions on convex polyhedra.

Поступило 19 ноября 2018 г.

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld, Postfach 100131,
D-33501 Bielefeld, Germany

E-mail: goetze@math.uni-bielefeld.de

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
199034 С.-Петербург, Россия

E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru