Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

Е. С. Гарай

О СХОДИМОСТИ НАГРУЗКИ В СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ К БРОУНОВСКОМУ ДВИЖЕНИЮ С ПЕРЕКЛЮЧАЮЩЕЙСЯ ДИСПЕРСИЕЙ

§1. Введение

В последнее десятилетие стало актуальным изучение различных математических моделей, связанных с работой компьютерных систем на базе высокоскоростных соединений, таких как интернет. Эти модели описывают динамику во времени и в пространстве различных нагрузок системы, создаваемых набором процессов обслуживания. Описанная ниже математическая модель интересна тем, что в ней используются два типа ресурса, каждый из которых имеет свое распределение нагрузки. Такая модель может отождествляться с наличием двух источников (операторов) ресурса. В момент наступления сбоя в работе одного источника можно переключиться на другой источник, ресурс которого имеет распределение нагрузки отличное от первого. Распределение длительности процесса обслуживания у этих операторов может отличаться. В начальный момент выбирается конкретный оператор. Предполагается, что момент сбоя в обслуживании любого оператора наступает случайно и с малой вероятностью. Будем полагать, что оператор сможет быстро восстановить работу системы, поэтому достаточно двух операторов для бесперебойного обслуживания. Хотя можно рассматривать и более сложные системы, использующие ресурс трех и более операторов.

Подробное изложение математической модели с одним типом ресурса можно найти в монографии М. А. Лифшица [1]. Основополагающей работой в этой области является статья И. Кая и М. С. Такку [2].

Ключевые слова: модель системы обслуживания, два типа ресурса, процесс суммарной нагрузки, сходимость конечномерных распределений.

§2. Описание математической модели системы обслуживания

С каждым процессом обслуживания свяжем случайные величины, характеризующие начальный момент, длительность и требуемое количество ресурсов. Полагаем, что эти величины для различных процессов обслуживания одинаково распределены и независимы, а также длительность и ресурс в пределах одного процесса обслуживания независимы.

Далее предположим, что есть два типа ресурса, т. е. два набора независимых одинаково распределенных в каждом наборе положительных случайных величин. При этом потребление ресурса того или иного типа с малой вероятностью может быть прервано. В этом случае система переходит на обслуживание с ресурсом из другого набора. Естественно предположить, что механизм отказа в потреблении исходного ресурса определяется независимыми одинаково распределенными бернуллиевскими величинами, независящими от ресурса. Тогда число процессов обслуживания с бесперебойным потреблением ресурса одного типа будет иметь геометрическое распределение.

Времена начальных моментов процессов обслуживания представляют собой моменты скачков пуассоновского случайного процесса, заданного на неотрицательной временной оси. Каждое обслуживание непрерывно, длится случайный отрезок времени и включается в общую нагрузку. Вводится случайная величина, характеризующая суммарный ресурс, потребляемый системой в течение всего периода обслуживания.

Таким образом, система обслуживания с двумя типами ресурса начинается как классический процесс обслуживания с первым набором ресурса и длительности обслуживания. Затем через геометрически распределенное количество обслуживаний тип ресурса и длительность заменяются на ресурс и длительность обслуживания из другого набора независимых одинаково распределенных величин, и уже в соответствии с этими величинами происходит дальнейшее развитие системы обслуживания. Снова через независимое геометрически распределенное количество обслуживаний ресурс и длительность заменяются на ресурс и длительность обслуживания из исходного набора случайных величин и так далее.

Завершая общее описание, отметим, что система обслуживания с двумя типами ресурса непрерывно функционирует в некотором конечном интервале времени, скажем $[0, t]$, на котором вычисляется суммарный ресурс, потребляемый системой для выполнения всего множества процессов обслуживания. Ресурс из того или иного набора начинает потребляться в пуассоновские моменты времени, которые имеют дискретный характер. Следовательно, смена типа ресурса происходит через целочисленные моменты времени, чем и объясняется появление геометрического закона.

Теперь более строго опишем основные характеристики системы обслуживания.

Начала обслуживаний происходят в точках, описываемых пуассоновской случайной мерой $N(dt)$ интенсивности $\lambda_1 > 0$. Эти точки соответствуют моментам скачков процесса Пуассона, который можно представить следующим образом:

$$N(t) := \max\Big\{l > 0 : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\} \mathbb{1}_{[0,t]}(\tau_1), \qquad \text{при } t \geqslant 0,$$

где τ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ_1 случайные величины,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(\tau_k < t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t).$$

Величина $\varkappa_k := \sum\limits_{j=1}^{k} \tau_j$ имеет распределение Эрланга:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(\varkappa_k < t) = \frac{\lambda_1(\lambda_1 t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda_1 t} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t).$$

Интеграл по процессу Пуассона N от функции $f(s, k)$, $s \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots,$ через моменты $\varkappa_k$ определяется следующим образом:

$$\int_0^t f(s, N(s-))\, dN(s) := \sum_{k=1}^{\infty} f(\varkappa_k, k-1) \mathbb{1}_{[0,t]}(\varkappa_k).$$

Требуемое количество ресурсов в ходе каждого процесса обслуживания задается одной из координат независимых одинаково распределенных двумерных случайных векторов $(R_k(-1), R_k(1))$, $k = 1, 2, \ldots.$ Предполагается, что координаты векторов неотрицательны и имеют конечные дисперсии. Длительность обслуживания также задается одной из неотрицательных координат независимых одинаково распределенных двумерных случайных векторов $(U_k(-1), U_k(1))$, $k = 1, 2, \dots$, с конечными дисперсиями. Таким образом, рассматриваются неотрицательные случайные величины $R_k(l)$, $U_k(l)$, $l = 1, -1$, $k = 1, 2, \dots$, где переменная l обозначает, что происходит потребление того или иного типа ресурса.

Пусть χ_j, $j = 1, 2, \dots$, – независимые бернуллиевские случайные величины:

$$\mathbf{P}(\chi_j = 1) = 1 - p, \qquad \mathbf{P}(\chi_j = -1) = p,$$

где $p = 1/a$ и a – некоторый параметр, связанный с растяжением времени и нормировкой, который в дальнейшем будет устремлен к бесконечности. В качестве χ_0 выбираем детерминированное значение, равное 1 или -1.

Предположим, что процесс Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$, величины χ_j, $j = 1, 2, \dots$, и случайные векторы $(R_k(-1), R_k(1))$, $(U_k(-1), U_k(1))$, $k = 1, 2, \dots$, независимы.

Обозначим через $L(k) := \prod\limits_{j=0}^{k} \chi_j$, $k = 0, 1, 2, \dots$, – процесс, отвечающий за переключение типа ресурса.

Теперь выразим интересующие нас характеристики системы обслуживания через интеграл Стилтьеса по пуассоновскому процессу $N(t)$, $t \geqslant 0$. Мгновенная нагрузка на систему в момент времени $\rho > 0$ определяется следующим образом:

$$M(\rho) := \int\limits_0^\infty R_{N(s)}(L(N(s-)))\mathbb{1}_{\left[s, s+U_{N(s)}(L(N(s-)))\right]}(\rho)\, dN(s),$$

а интегральная нагрузка на систему на интервале времени $[0, t]$ задается выражением

$$I(t) := \int\limits_0^t M(\rho)\, d\rho = \int\limits_0^\infty R_{N(s)}(L(N(s-)))\ell_t\Big(s, U_{N(s)}(L(N(s-)))\Big)\, dN(s)$$

$$= \sum_{k=1}^{N(t)} R_k(L(k-1))\ell_t\Big(\varkappa_k, U_k(L(k-1))\Big), \tag{2.1}$$

где $\varkappa_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \tau_j$, $\ell_t(s,u) := |[s,s+u] \cap [0,t]|$, $s \geqslant 0$, $u \geqslant 0$. Здесь $|\cdot|$ обозначает длину интервала.

Для вычисления среднего интегральной нагрузки будем применять формулу

$$\mathbf{E}\int\limits_0^t f\Big(s, Y_{N(s)}(L(N(s-)))\Big)\, dN(s) = \lambda_1 \int\limits_0^t \mathbf{E} f\Big(s, Y_1(L(N(s)))\Big)\, ds, \quad (2.2)$$

где $(Y_k(-1), Y_k(1))$, $k = 1, 2, \ldots,$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы, независящие от величин χ_j, $j = 1, 2, \ldots,$ и процесса Пуассона N.

Для вывода этой формулы применим теорему Фубини и распределение Эрланга. В результате имеем

$$\mathbf{E}\int_0^t f(s, Y_{N(s)}(L(N(s-))))\, dN(s) = \mathbf{E}\sum_{k=1}^{\infty} f(\varkappa_k, Y_k(L(k-1)))\mathbb{1}_{[0,t]}(\varkappa_k)$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \mathbf{E} f(\varkappa_{v+1}, Y_1(L(v)))\mathbb{1}_{[0,t]}(\varkappa_{v+1})$$

$$= \mathbf{E}\sum_{v=0}^{\infty} \lambda_1 \int_0^t f(s, Y_1(L(v)))\frac{(\lambda_1 s)^v}{v!} e^{-\lambda_1 s}\, ds.$$

Суммирование по v в правой части этого выражения отвечает математическому ожиданию по величине $N(s)$, так как она имеет распределение Пуассона. Опять применяя теорему Фубини получим, что правая часть этого выражения совпадает с правой частью (2.2).

Положим $r(l) := \mathbf{E}R_1(l)$, $u(l) := \mathbf{E}U_1(l)$ и $m(l) := \mathbf{E}\{R_1(l)U_1(l)\} = r(l)u(l)$. Полагаем $\chi_0 = l_0$, где $l_0 \in \{1, -1\}$. Это соответствует тому, что обслуживание начинается оператором с номером l_0.

Для изучения предельного поведения центрированного и нормированного процесса интегральной нагрузки мы вынуждены предположить, что выражение $m = r(l)u(l)$, $l = 1, -1$, не зависит от l. В противном случае не удается центрировать процесс интегральной нагрузки неслучайным сдвигом так, чтобы существовал предел.

Работа посвящена изучению асимптотического поведения при $p = 1/a$ и $a \to \infty$ центрированного и нормированного процесса интегральной нагрузки

$$Z_a(t) := \frac{1}{\sqrt{a}} I(at) - \lambda_1 t m \sqrt{a}, \qquad t \geqslant 0. \tag{2.3}$$

§3. Сходимость к броуновскому движению с переключающейся дисперсией

Теорема 3.1. *Предположим, что $\mathbf{E}R_1^2(l) < \infty$, $\mathbf{E}U_1^2(l) < \infty$ и произведение $\mathbf{E}R_1(l)\mathbf{E}U_1(l)$ не зависит от $l = 1, -1$. Пусть $\chi_0 = l_0$, $l_0 \in \{1, -1\}$, соответствует начальному оператору ресурса. Тогда конечномерные распределения процесса $Z_a(t)$, $t \geqslant 0$, сходятся при $a \to \infty$ к конечномерным распределениям процесса $S_{l_0}(t)$, где*

$$S_{l_0}(t) := \sqrt{\lambda_1} \int\limits_0^t \sigma_{l_0(-1)^{N(s)}}\, dW(s), \qquad t \geqslant 0, \tag{3.1}$$

– процесс броуновского движения с переключающейся дисперсией $\sigma_l^2 = \mathbf{E}R_1^2(l)\mathbf{E}U_1^2(l)$.

Замечание 3.1. Процесс $S_{l_0}(t)$, $t \geqslant 0$, детально изучался в работе [3]. Диффузии с переключающимися характеристиками рассматривались многими авторами (см., например, монографии [4, 5]).

Доказательство теоремы 3.1. Для доказательства сходимости конечномерных распределений преобразуем интегральную нагрузку. Разложим процесс $I(t)$, определенный формулой (2.1), на составляющие, выделив главную часть и части, вклад которых в предельное поведение после нормировки будет пренебрежимо мал. Функцию $\ell_t(s,u)$ запишем в виде суммы

$$\ell_t(s,u) = \ell_t(s,u)\mathbb{1}_{[0,t]}(u) + (t-s)^+\mathbb{1}_{(t,\infty)}(u), \qquad s \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Первое из этих слагаемых можно представить в следующем виде:

$$\ell_t(s,u)\mathbb{1}_{[0,t]}(u) = u\mathbb{1}_{[0,t]}(s) - u\mathbb{1}_{[0,t]}(s)\mathbb{1}_{(t,\infty)}(u)$$

$$-\mathbb{1}_{[t-u,t]}(s)(s+u-t)\mathbb{1}_{[0,t]}(u) =: \sum_{j=0}^{2} \ell_t^{(j)}(s,u). \tag{3.3}$$

Второе слагаемое в (3.2) обозначим $\ell_t^{(3)}(s,u)$.

При фиксированных u и t график первого слагаемого в (3.2) представляет собой трапецию высоты u, нижнее основание которой является отрезком $[0,t]$, а верхнее – отрезком $[0,t-u]$. Основная цель разбиения (3.3) состоит в выделении первых двух слагаемых, которые являются ступенчатыми функциями от s. Это делается с помощью трансформации трапеции в прямоугольник. При этом главное значение в (3.3) будет иметь первое слагаемое $u\mathbb{1}_{[0,t]}(s)$, в котором нет ограничения на значение параметра u.

Имеем

$$I(t) = \sum_{j=0}^{3} \int_0^{\infty} R_{N(s)}(L(N(s-)))\ell_t^{(j)}\Big(s, U_{N(s)}(L(N(s-)))\Big)\, dN(s)$$

$$=: \sum_{j=0}^{3} I_j(t). \tag{3.4}$$

Слагаемое

$$\begin{aligned} I_0(t) &= \int_0^t R_{N(s)}(L(N(s-)))U_{N(s)}(L(N(s-)))\, dN(s) \\ &= \sum_{k=1}^{N(t)} R_k(L(k-1))U_k(L(k-1)), \qquad t \geqslant 0, \end{aligned}$$

является сложным пуассоновским процессом с переключениями, предельное поведение которого было изучено в работе [6].

Математическое ожидание этого процесса задается формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{E}I_0(t) &= \lambda_1 \int_0^t \mathbf{E}\Big\{R_1(L(N(s)))U_1(L(N(s)))\Big\} ds \\ &= \lambda_1 t\frac{m(1)+m(-1)}{2} + \frac{m(l)-m(-l)}{4p}(1-e^{-2\lambda_1 pt}), \end{aligned} \tag{3.5}$$

которая вытекает из следующего равенства. Пусть $m(s,l)$, $s \geqslant 0$, $l = 1, -1$, – некоторая неслучайная функция. Тогда

$$\mathbf{E}m(s, L(N(s))) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}m(s, L(k))\frac{(\lambda_1 s)^k}{k!}e^{-\lambda_1 s}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 s)^k}{k!} e^{-\lambda_1 s} \Big(m(s,l) \sum_{v=0, v-\text{чет.}}^{k} C_k^v p^v (1-p)^{k-v}$$

$$+ m(s,-l) \sum_{v=0, v-\text{неч.}}^{k} C_k^v p^v (1-p)^{k-v} \Big)$$

$$= m(s,l) e^{-\lambda_1 sp} \sum_{v=0, v-\text{чет.}}^{\infty} \frac{(\lambda_1 sp)^v}{v!} + m(s,-l) e^{-\lambda_1 sp} \sum_{v=0, v-\text{неч.}}^{\infty} \frac{(\lambda_1 sp)^v}{v!}$$

$$= m(s,l) e^{-\lambda_1 sp} \operatorname{ch}(\lambda_1 sp) + m(s,-l) e^{-\lambda_1 sp} \operatorname{sh}(\lambda_1 sp). \quad (3.6)$$

В предположении $m(1) = m(-1)$ формула (3.5) сильно упрощается, математическое ожидание слагаемого $I_0(t)$ в представлении (3.4) становится линейным по t.

Именно слагаемое $I_0(t)$, $t \geqslant 0$, будет при $a \to \infty$ давать основной вклад в асимптотическое поведение процесса $Z_a(t)$. Для того чтобы убедиться в этом, оценим абсолютные моменты величин $I_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, принимая во внимание структуру функций $\ell_t^{(j)}(s,u)$, определенных в (3.3). Применяя теорему Фубини, в силу (2.2) имеем

$$\mathbf{E}|I_1(t)| \leqslant \mathbf{E} \int_0^t R_{N(s)}(L(N(s-)))U_{N(s)}(L(N(s-)))$$

$$\times \mathbb{1}_{(t,\infty)} \Big(U_{N(s)}(L(N(s-))) \Big) \, dN(s) = \lambda_1 \int_0^t \mathbf{E} m(L(N(s))) \, ds,$$

где

$$m(l) := \mathbf{E} R_1(l) \mathbf{E} \big(U_1(l) \mathbb{1}_{(t,\infty)}(U_1(l)) \big) \leqslant \mathbf{E} R_1(l) \mathbf{E} U_1^2(l) \frac{1}{t}, \quad l = -1, 1.$$

Очевидно

$$\mathbf{E} m(L(N(s))) \leqslant m(1) + m(-1),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E}|I_1(t)| \leqslant \lambda_1 \sum_{l=-1,1} \mathbf{E} R_1(l) \mathbf{E} U_1^2(l).$$

Поскольку $|\ell_t^{(2)}(s,u)| \leqslant u \mathbb{1}_{[t-u,t]}(s) \mathbb{1}_{[0,t]}(u)$, то полагая

$$m(s,l) := \mathbf{E} R_1(l) \mathbf{E} \big(U_1(l) \mathbb{1}_{[t-U_1(l),t]}(s) \mathbb{1}_{[0,t]}(U_1(l)) \big),$$

имеем

$$\mathbf{E}|I_2(t)| \leqslant \lambda_1 \int_0^t \mathbf{E}m(s, L(N(s)))\, ds \leqslant \lambda_1 \int_0^t (m(s,1) + m(s,-1))\, ds$$

$$\leqslant \lambda_1 \sum_{l=-1,1} \mathbf{E}R_1(l)\mathbf{E}\Big(U_1(l) \int_{(t-U_1(l))^+}^t ds\Big) \leqslant \lambda_1 \sum_{l=-1,1} \mathbf{E}R_1(l)\mathbf{E}U_1^2(l).$$

Для функции $\ell_t^{(3)}(s,u) = (t-s)^+ \mathbb{1}_{(t,\infty)}(u)$ полагаем

$$m(s,l) := (t-s)^+ \mathbf{E}R_1(l)\mathbf{E}\mathbb{1}_{(t,\infty)}(U_1(l)) \leqslant (t-s)^+ \mathbf{E}R_1(l)\mathbf{E}U_1^2(l)\frac{1}{t^2}.$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\mathbf{E}|I_3(t)| \leqslant \frac{\lambda_1}{t^2} \sum_{l=-1,1} \mathbf{E}R_1(l)\mathbf{E}U_1^2(l) \int_0^t (t-s)\, ds = \lambda_1 \sum_{l=-1,1} \mathbf{E}R_1(l)\mathbf{E}U_1^2(l).$$

В результате при $p = 1/a$ получаем, что для $k = 1, 2, 3$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\mathbf{E}|I_k(at)| \leqslant \frac{2\lambda_1}{\sqrt{a}} \sum_{l=-1,1} \mathbf{E}R_1(l)\mathbf{E}U_1^2(l).$$

Поэтому при $a \to \infty$ величины $\frac{1}{\sqrt{a}} I_k(at)$ при $k = 1, 2, 3$ стремятся в среднем к нулю и не влияют на предельное поведение характеристической функции

$$\varphi_a(\vec{\beta}) = \mathbf{E}e^{i\beta Z_a(t)}.$$

Следовательно, они не влияют на сходимость конечномерных распределений процесса $Z_a(t)$, $t \geqslant 0$.

Таким образом, наша задача сводится к изучению предельного поведения процесса

$$\widetilde{Z}_a^\circ(t) := \frac{1}{\sqrt{a}}\big(I_0(at) - \lambda_1 atm\big),$$

где $m = \mathbf{E}R_1(l)\mathbf{E}U_1(l)$ является не зависящей от l величиной.

Для доказательства сходимости конечномерных распределений процесса $\widetilde{Z}_a^\circ(t)$, $t \geqslant 0$, мы применим некоторое обобщение теоремы 2.1 из [6] для величин $Y_k(l) := R_k(l)U_k(l)$, математическое ожидание которых равно постоянной величине m, а не нулю как в работе [6].

Воспользуемся обозначениями работы [6]. Положим

$$T_p(t) := \prod_{j=0}^{N(t)} \chi_j = L(N(t)), \qquad B_p(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k(L(k-1)),$$

$$\vec{Q}_p(t) := \big(T_p(t), x + B_p(t)\big).$$

Согласно теореме 1.1 работы [6] двумерный процесс $\vec{Q}_p(t)$, $t \geqslant 0$, является марковским, и для сходимости его конечномерных распределений достаточно доказать сходимость его переходных вероятностей или соответствующих им характеристических функций.

Мы рассмотрим следующий центрированный процесс

$$\vec{G}_p(t) := \Big(T_p(t), x + B_p(t) - m\lambda_1 t\Big), \qquad t \geqslant 0,$$

который тоже является марковским. В силу аддитивности второй координаты процесса $\vec{G}_p(t)$, $t \geqslant 0$, начальное значение x можно положить равным нулю.

Базовой для вычисления характеристической функции величины $\vec{G}_p(t)$ является формула (1.1) из [6]. Из нее следует, что при $\vec{\gamma} := (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, $f_l(\beta) := \mathbf{E}e^{i\beta Y_1(l)}$, $l = 1, -1$,

$$\begin{aligned} \varPsi(\lambda) &:= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}\big\{e^{i(\vec{\gamma},\vec{Q}_p(t))}\big|\vec{Q}_p(0) = (l,0)\big\}\,dt \\ &= \frac{(\lambda + \lambda_1(1 - f_{-l}(\beta)(1-p)))e^{il\alpha} + \lambda_1 p f_l(\beta)e^{-il\alpha}}{(\lambda + \lambda_1(1 - f_1(\beta)(1-p)))(\lambda + \lambda_1(1 - f_{-1}(\beta)(1-p))) - \lambda_1^2 p^2 f_1(\beta) f_{-1}(\beta)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Вычислим обратное преобразование Лапласа от этого выражения. Обозначим $\widetilde{\lambda} = \lambda + \lambda_1$. Выражение в правой части (3.7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \varPsi(\lambda) &= \Big(\frac{e^{il\alpha}}{2} + \frac{1}{2\varUpsilon_p(\beta)}\Big((1-p)(f_{-l}(\beta) - f_l(\beta))e^{il\alpha} - 2pf_l(\beta)e^{-il\alpha}\Big)\frac{1}{\widetilde{\lambda} + r_+} \\ &+ \Big(\frac{e^{il\alpha}}{2} - \frac{1}{2\varUpsilon_p(\beta)}\Big((1-p)(f_{-l}(\beta) - f_l(\beta))e^{il\alpha} - 2pf_l(\beta)e^{-il\alpha}\Big)\frac{1}{\widetilde{\lambda} + r_-}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где

$$r_\pm = -\frac{\lambda_1}{2}(1-p)(f_1(\beta) + f_{-1}(\beta)) \pm \frac{\lambda_1}{2}\varUpsilon_p(\beta),$$

$$\varUpsilon_p(\beta) = \sqrt{(1-p)^2(f_1(\beta) - f_{-1}(\beta))^2 + 4p^2 f_1(\beta) f_{-1}(\beta)}.$$

Обращая в (3.8) преобразование Лапласа по $\widetilde{\lambda}$ и учитывая, что λ отличается от $\widetilde{\lambda}$ на сдвиг λ_1, получаем

$$\mathbf{E}\Big\{e^{i(\vec{\gamma},\vec{Q}_p(t))}\big|\vec{Q}_p(0)=(l,0)\Big\}=\exp\Big(-t\lambda_1\Big(1-\frac{(1-p)(f_1(\beta)+f_{-1}(\beta))}{2}\Big)\Big)$$
$$\times\Big\{\Big(\frac{e^{il\alpha}}{2}+\frac{1}{2\Upsilon_p(\beta)}\Big((1-p)(f_{-l}(\beta)-f_l(\beta))e^{il\alpha}-2pf_l(\beta)e^{-il\alpha}\Big)e^{-t\lambda_1\Upsilon_p(\beta)/2}$$
$$+\Big(\frac{e^{il\alpha}}{2}-\frac{1}{2\Upsilon_p(\beta)}\Big((1-p)(f_{-l}(\beta)-f_l(\beta))e^{il\alpha}-2pf_l(\beta)e^{-il\alpha}\Big)e^{t\lambda_1\Upsilon_p(\beta)/2}\Big\}. \tag{3.9}$$

Поскольку нас интересует предельное поведение процесса $\widetilde{Z}^{\circ}_a(t)$, то нужно рассмотреть процесс $\vec{G}_p(at)$ при $p=\dfrac{1}{a}$ и для него вычислить (3.9) с заменой β на $\beta/\sqrt{a}$.

Используя асимптотическое разложение характеристической функции $f_l(\beta)$, при малых β имеем

$$\Upsilon_{1/a}\Big(\frac{\beta}{\sqrt{a}}\Big)\sim\sqrt{\Big(1-\frac{1}{a}\Big)^2\Big(\frac{i\beta(m(1)-m(-1))}{\sqrt{a}}-\frac{\beta^2(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)}{a}\Big)^2+\frac{4}{a^2}}$$
$$\sim\frac{1}{a}\sqrt{\beta^4(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)^2+4},$$

$$\Big(1-\frac{1}{a}\Big)\Big(f_{-l}\Big(\frac{\beta}{\sqrt{a}}\Big)-f_l\Big(\frac{\beta}{\sqrt{a}}\Big)\Big)\sim\frac{1}{a}\frac{\beta^2(\sigma_l^2-\sigma_{-l}^2)}{2},$$

$$1-\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{a}\Big)\Big(f_{-l}\Big(\frac{\beta}{\sqrt{a}}\Big)+f_l\Big(\frac{\beta}{\sqrt{a}}\Big)\Big)\sim\frac{1}{a}\Big(1-i\beta m\sqrt{a}+\frac{\beta^2(\sigma_1^2+\sigma_{-1}^2)}{4}\Big).$$

Поэтому в правой части (3.9) после замены t на at, p на $1/a$ и β на $\beta/\sqrt{a}$ можно перейти к пределу при $a\to\infty$. Положим $\vec{\gamma}_a:=(\alpha,\beta/\sqrt{a})$. В результате получим

$$\mathbf{E}\Big\{e^{i(\vec{\gamma}_a,\vec{G}_{\frac{1}{a}}(at))}\big|\vec{G}_{\frac{1}{a}}(0)=(l,0)\Big\}=e^{-i\beta m\lambda_1 t\sqrt{a}}\mathbf{E}\Big\{e^{i(\vec{\gamma}_a,\vec{Q}_{\frac{1}{a}}(at))}\big|\vec{Q}_{\frac{1}{a}}(0)=(l,0)\Big\}$$
$$\xrightarrow[a\to\infty]{}\exp\Big(-t\lambda_1\Big(1+\frac{\beta^2(\sigma_1^2+\sigma_{-1}^2)}{4}\Big)\Big)$$
$$\times\Big\{\Big(\frac{e^{il\alpha}}{2}+\frac{\beta^2(\sigma_l^2-\sigma_{-l}^2))e^{il\alpha}-4e^{-il\alpha}}{4\sqrt{4+\beta^4(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)^2}}\Big)\exp\Big(-t\frac{\lambda_1}{2}\sqrt{4+\beta^4(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)^2}\Big)$$
$$+\Big(\frac{e^{il\alpha}}{2}-\frac{\beta^2(\sigma_l^2-\sigma_{-l}^2))e^{-il\alpha}-4e^{-i\alpha}}{4\sqrt{4+\beta^4(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)^2}}\Big)\exp\Big(t\frac{\lambda_1}{2}\sqrt{4+\beta^4(\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)^2}\Big)\Big\}.$$

Сравнивая теперь это выражение с обратным преобразованием Лапласа формулы (2.21) из примера 2.1 работы [3] и используя (2.17) из [3], а также соответствие $\sigma_l \longleftrightarrow \sqrt{\lambda_1}\sigma_l/2$, мы видим, что

$$\mathbf{E}\big\{e^{i(\vec{\gamma},\vec{G}_{\frac{1}{a}}(at))}\big|\vec{Q}_{\frac{1}{a}}(0)=(l,0)\big\} \xrightarrow[a\to\infty]{} \mathbf{E}\big\{e^{i(\vec{\gamma},\vec{V}_l(t))}\big|\vec{V}_l(0)=(l,0)\big\}\,dt,$$

где

$$\vec{V}_l(t) := \big(l(-1)^{N(t)}, S_l(t)\big), \quad t \geqslant 0, \quad l=-1,1.$$

Это означает, что характеристические функции переходных вероятностей марковского процесса $\vec{G}_{1/a}(at)$, $t \geqslant 0$, сходятся при $a \to \infty$ к характеристическим функциям переходных вероятностей процесса $\vec{V}_l(t)$. Из этого следует сходимость соответствующих конечномерных распределений процессов (см. [6], §2). Таким образом, конечномерные распределения процесса $\vec{G}_{1/a}(at)$, $t \geqslant 0$, сходятся при $a \to \infty$ к конечномерным распределениям процесса $\vec{V}_l(t)$, что, в свою очередь, влечет сходимость конечномерных распределений вторых координат.

Теорема 3.1 доказана. □

Автор благодарна М. А. Лифшицу за ценные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

Список литературы

1. М. А. Лифшиц, *Случайные процессы – от теории к практике*, Санкт-Петербург, Лань, 2016.
2. I. Kaj, M. S. Taqqu, *Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process: the integral representation approach*, in: In and Out of Equilibtium. II. ser.: Progress in Probability, **60**, Birkhäuser, Basel 2008, pp. 383–427.
3. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от диффузий с переключениями и скачками.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 38–53.
4. X. Mao, C. Yuan, *Stochastic Differential Equations with Markovian Switching.* — Imperial College Press, London, 2006.
5. G. Yin, C. Zhu, *Hybrid Switching Diffusions: Properties and Applications.* — Springer, New York, 2010.
6. А. Н. Бородин, *Предельное поведение сложного пуассоновского процесса с переключениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 54–66.

Garai E. S. On the convergence of workload in a service system to Brownian motion with switching variance.

Some modification of the service system model introduced by I. Kaj and M. S. Taqqu is considered. This model describes the dynamics in time and space of various system loads created by a set of service processes. In the model under consideration two types of resource, each having its own load distribution, are used. Such a model can be identified with the presence of two operators of resource. At the time of the failure of the active operator one can switch to another operator whose resource has distribution loads different from the first operator. We prove a limit theorem on the convergence of finite-dimensional distributions of the integral workload process with two types of resource to Brownian motion with switching variance.

ГБНОУ СПбГДТЮ Аничков лицей,
Невский пр., 39, литер А,
С.-Петербург 198504ж
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
199034 С.-Петербург, Россия
E-mail: elena12578@mail.ru

Поступило 15 октября 2018 г.