Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

И. В. Волчёнкова, Л. Б. Клебанов

НОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА, СВЯЗАННЫЕ СО СВОЙСТВОМ ВЫПУКЛОСТИ, ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, А ТАКЖЕ СВОБОДНЫЕ ОТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТЕРИИ

§1. Введение

Отправным пунктом этой статьи является работа Людвига Барингхауза и Норберта Хенце (L. Baringhaus and N. Henze) [1]. Первым заинтересовавшим нас результатом их совместной работы является вероятностная интерпретация критерия Крамера–фон Мизеса. В данной статье мы приведем обобщение этого результата, а также критерии, которые не зависят от вида закона, согласие с которым мы проверяем (статистические критерии свободные от распределения), и некоторые характеризации распределений вероятностей.

§2. Основные результаты в одномерном случае

Сформулируем наш первый результат:

Теорема 2.1. *Пусть h является строго выпуклой непрерывно дифференцируемой функцией на интервале $[0,1]$, для которой выполнено условие $h(0) = 0$. Предположим, что $F(x)$ и $G(x)$ – непрерывные функции распределения на вещественной оси $\mathbf{R}^1$. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(F(x))dG(x) + \int_{-\infty}^{\infty} h(G(x))dF(x) \geqslant 2\int_{0}^{1} h(u)du, \qquad (2.1)$$

Ключевые слова: выпуклые функции; вероятностные меры; характеризация распределения; критерий Крамера–фон Мизеса; статистические тесты в одномерном и многомерном случаях.

Работа была частично финансирована Грантовым Агенством Чешской Республики (Grant GAČR 16-03708S). Авторы благодарны доктору К. Хелисовой (K. Helisová) за ее внимание и полезные советы.

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $F(x) = G(x)$.

Примечание 2.1. Условие выпуклости функции $h(x)$ в предыдущей теореме 2.1 может быть заменено условием вогнутости, в этом случае знак неравенства должен быть заменен на противоположный.

Правая часть неравенства (2.1) позволяет сделать следующую вероятностную интерпретацию. А именно, пусть X и Y – это случайные величины с функциями распределения вероятности $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. При условии выполнения теоремы 2.1 мы имеем

$$\mathbf{E}\, h(F(Y)) + \mathbf{E}\, h(G(X)) \geqslant 2 \int\limits_0^1 h(u)du$$

равенство достигается тогда и только тогда, когда $X \stackrel{d}{=} Y$, другими словами, когда X и Y одинаково распределены.

Отметим, что представление статистики критерия Крамера–фон Мизеса, полученное в [1], является частным случаем (2.1) при $h(u) = u^2$. Тем не менее, подобная интерпретация может быть использована и для более общих случаев.

(1) Пусть $m \geqslant 2$ – натуральное число. Далее, пусть $h(u) = u^m$. Предположим, что $X_1, \dots, X_m$ – независимые одинаково распределенные с X случайные величины, а $Y_1, \dots, Y_m$ – также независимые одинаково распределенные с Y случайные величины. Далее, легко видеть, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F^m(x)dG(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G^m(x)dF(x) = \mathbf{P}\{\max_{j=1,\dots,m} X_j < Y\} + \mathbf{P}\{\max_{j=1,\dots,m} Y_j < X\}.$$

Это позволяет дать вероятностную интерпретацию левой части неравенства (2.1).

(2) Предыдущий случай дает возможность рассмотреть полиномиальную функцию $h(u)$ степени $m > 1$ с неотрицательными коэффициентами. Действительно, если $h(u) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k u^k$, где

$c_k \geqslant 0$, для всех $k = 1, \ldots, m$, $c_m > 0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(F(x))dG(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(G(x))dF(x)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} c_k \Big(\mathbf{P}\{ \max_{j=1,\ldots,k} X_j < Y\} + \mathbf{P}\{ \max_{j=1,\ldots,k} Y_j < X\} \Big).$$

Разделив правую часть на сумму коэффициентов c_k, получим выражение в виде смеси распределений максимальных порядковых статистик для X_j и Y_j.

(3) Пусть h является неотрицательной строго выпуклой и непрерывно дифференцируемой функций на интервале $[0,1]$, причем $h(0) = 0$. Предположим, что случайные величины X_j и Y_j такие же, как в пункте 1. Рассмотрим многочлен Бернштейна степени m для функции h:

$$B_m(u) = \sum_{k=1}^{m} h(\frac{k}{m}) \binom{m}{k} u^k (1-u)^{m-k}.$$

Хорошо известно, что B_m сходится к h равномерно на интервале $[0,1]$ при $m \to \infty$. Для статистической интерпретации неравенства (2.1) функцию $h(u)$ необходимо заменить на $B_m(u)$ и перейти к пределу при $m \to \infty$. Степени u должны быть заменены соответствующими вероятностями того, что максимумы из X меньше Y, в то время как степени $1-u$ – вероятностями того, что минимумы из X больше Y.

Результат теоремы 2.1 возможно обобщить для случая конечного или бесконечного числа функций распределения вероятностей.

Теорема 2.2. *Пусть h является строго выпуклой непрерывно дифференцируемой функцией на интервале $[0,1]$, такой что $h(0) = 0$. Предположим, что $\{F_j(x),\ j = 1, 2, \ldots\}$ – последовательность непрерывных функций распределения вероятностей, а $\{p_j,\ j = 1, 2, \ldots\}$ – последовательность положительных констант, для которых $\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_j = 1$. Тогда*

$$\sum_{j \neq k} p_j \cdot p_k \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(F_j(x))dF_k(x) \geqslant \Big(1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2\Big) \cdot \int\limits_{0}^{1} h(u)du, \qquad (2.2)$$

при этом равенство достигается тогда и только тогда, когда $F_1(x) = \ldots = F_k(x) = \ldots$.

Неравенство (2.2) может быть обобщено и на случай несчетного семейства функций $\{F_j\}$. Мы предоставляем это читателю.

Вероятностная интерпретация (2.2) вполне аналогична интерпретации неравенства (2.1) и мы не будем ее здесь описывать.

Теперь предположим, что $Q(x)$ – это непрерывная функция распределения. Тогда (при выполнении условий теоремы 2.2) мы имеем

$$\sum_{j\neq k} p_j \cdot p_k \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(F_j(x))dF_k(x) = \sum_{j\neq k} p_j \cdot p_k \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(F_j(Q(x)))dF_k(Q(x)).$$

Другими словами, величина в правой части (2.2) инвариантна по отношению к монотонным непрерывным преобразованиям функций распределения в неравенстве. Теперь предположим, что нашей целью является создание критерия для проверки статистической гипотезы H_o : $F_1 = F_2 = \ldots = F$.

Допустим, что имеются выборки $X_1^{(j)}, \ldots, X_n^{(j)}$ из популяции с функциями распределения F_j $(j = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим статистику

$$T_n = \sum_{j\neq k} p_j \cdot p_k \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(F_j^{(n)}(x))dF_k^{(n)}(x) - \Big(1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2\Big) \cdot \int\limits_0^1 h(u)du,$$

где $F_j^{(n)}$ является соответствующей эмпирической функцией распределения. В случае, если гипотеза H_o является истинной, то распределение статистики T_n не зависит от функции распределения F. Если объем выборки n недостаточно большой, мы можем симулировать данные на компьютере для нахождения распределения статистики T_n при справедливости гипотезы H_o.

§3. Доказательства теорем параграфа 2

Очевидно, что теорема 2.1 является частным случаем теоремы 2.2 и поэтому достаточно привести доказательство только ее результата.

Мы предполагаем, что h является строго выпуклой функцией. Таким образом, если числа $p_1, \ldots, p_n$ $(n \geqslant 2)$ удовлетворяют условиям

$p_j > 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1$, то

$$\sum_{j=1}^{n} p_j h(u_j) \geqslant h\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j u_j\Big) \tag{3.1}$$

для всех $u_j \in [0,1]$. Равенство в (3.1) достигается тогда и только тогда, когда $u_1 = \ldots = u_n$. Пусть теперь $u_j = F_j(x)$, далее вычислим интегралы от обеих частей неравенства (3.1) по x по отношению к функции распределения вероятности $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j F_j(x)$. Получим

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_j p_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(F_j(x)) dh(F_k(x)) \geqslant \int\limits_{0}^{1} h(u)du. \tag{3.2}$$

Однако,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(F_k(x)) dh(F_k(x)) = \int\limits_{0}^{1} h(u)du, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Поэтому из (3.2) следует

$$\sum_{j\neq k} p_j \cdot p_k \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(F_j(x)) dF_k(x) \geqslant \Big(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k^2\Big) \cdot \int\limits_{0}^{1} h(u)du. \tag{3.3}$$

Неравенство (2.2) может быть получено предельным переходом (3.3) при $n \to \infty$.

Из свойства строгой выпуклости h следует, что знак равенства в (2.2) достижим только при равенстве всех функций $F_1, \ldots, F_n, \ldots$.

Очевидно, что случай строгой вогнутости функции h является аналогичным, достаточно только заменить знак неравенства на противоположный.

§4. Одно сходное неравенство

Заменим теперь класс строго выпуклых функций h множеством положительных логарифмически строго выпуклых функций ξ на интервале $[0,1]$[1]. Функция ξ является логарифмически строго выпуклой,

[1]Это класс положительных функций со строго выпуклым логарифмом.

если

$$\xi((x_1+x_2)/2) \leqslant \sqrt{\xi(x_1)\xi(x_2)},$$

при этом равенство достижимо тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$. Это неравенство может быть переписано следующим образом:

$$\xi^2((x_1+x_2)/2) \leqslant \xi(x_1)\xi(x_2). \tag{4.1}$$

Таким образом, для любых функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ выполнено

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^2\Big(\frac{F(x)+G(x)}{2}\Big) d\frac{F(x)+G(x)}{2} \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi(F(x))\xi(G(x)) d\frac{F(x)+G(x)}{2}.$$

Откуда легко выводим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi(G(x)) d\Xi(F(x)) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi(F(x)) d\Xi(G(x)) \geqslant 2\int\limits_{0}^{1} \xi^2(u)du, \tag{4.2}$$

где $\Xi(u) = \int\limits_0^u \xi(v)dv$. Равенство в (4.2) выполняется только в том случае, если $F(x) = G(x)$. Конечно, неравенство (4.2) очень похоже на (2.1).

Предположим, что $X_1, \ldots, X_n$ – это независимые одинаково распределенные наблюдения с функцией распределения $F(x)$, а $Y_1, \ldots, Y_n$ – это такие же наблюдения, но с функцией распределения $G(x)$. Рассмотрим следующую статистику

$$\tau_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi(G_n(x)) d\Xi(F_n(x)) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi(F_n(x)) d\Xi(G_n(x)) - \int\limits_{0}^{1} \xi^2(u)du.$$

Здесь F_n и G_n являются соответствующими эмпирическими распределениями вероятностей. Для проверки гипотезы $F = G$ можно использовать τ_n. Понятно, что распределение τ при выполнении гипотезы не зависит от функции распределения F.

Как и в предыдущем случае, обратное неравенство справедливо для логарифмически строго вогнутой функции ξ.

В заключение отметим, что результаты параграфов 2–4 были анонсированы в [3].

§5. Неравенства и сходимость распределений

Неравенства типа (2.1) позволяют ввести некоторые типы сходимости функций распределения в одномерном случае. Именно, пусть $\{F_n,\ n=1,2,\dots\}$ – последовательность функций распределения. Допустим, что, как и раньше, $h(x)$ – выпуклая, непрерывно дифференцируемая функция, $h(0)=0$. Будем говорить, что последовательность $\{F_n,\ n=1,2,\dots\}$ h-сходится к функции распределения G, если

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(F_n(x))dG(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(G(x))dF_n(x) - 2\int\limits_{0}^{1} h(u)du \longrightarrow 0, \quad \text{при } n\to\infty \tag{5.3}$$

и будем записывать это как

$$F_n \xrightarrow[n\to\infty]{h} G.$$

Ниже мы сравним h-сходимость со сходимостью в пространстве $L^2(G)$. При этом *мы будем дополнительно предполагать в этом разделе, что* $h(x)\geqslant 0$, $h(1)=1$.

Теорема 5.1. *Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – непрерывные функции распределения, а $h(x)$ – строго выпуклая, дважды непрерывно дифференцируемая функция, $h(x)\geqslant 0$, $h(0)=0$, $h(1)=1$. Тогда*

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(F(x))dG(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(G(x))dF(x) - 2\int\limits_{0}^{1} h(u)du \\ \leqslant C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(F(x)-G(x)\Big)^2 dG(x),\end{aligned} \tag{5.4}$$

где $C=\frac{1}{2}\max\limits_{u\in[0,1]} h''(u)$.

Доказательство. Действительно, мы имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(F(x))dG(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(G(x))dF(x) - 2\int\limits_{0}^{1} h(u)du$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[h(F(x)) - F(x)h'(G(x)) + G(x)h'(G(x)) - h(G(x))\Big]dG(x)$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h''(\theta(x))\Big(F(x) - G(x)\Big)^2 dG(x) \leqslant C\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(F(x) - G(x)\Big)^2 dG(x). \square$$

Разумеется, *если последовательность функций распределения* F_n *сходится к* G *в* $L^2(G)$, *то она также* h*-сходится к* G *при всех* h, *удовлетворяющих условиям теоремы* 5.1.

Исследуем теперь вопрос о справедливости обратного утверждения.

Теорема 5.2. *Пусть* $F(x)$ *и* $G(x)$ *– непрерывные функции распределения, а* $h(x)$ *– строго выпуклая, дважды непрерывно дифференцируемая функция,* $h(x) \geqslant 0$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$. *Тогда если* $F_n \xrightarrow[n\to\infty]{h} G$, *то* $F_n \to G$ *в* $L^2(G)$.

Доказательство. Допустим, что, наоборот, F_n не сходится к G в пространстве $L^2(G)$. Тогда ясно, что F_n не может сходиться к G почти всюду по мере G. Иными словами, существует непустой интервал Δ и положительное число ε, такие что $|F_{n_k}(x) - G(x)| > \varepsilon$ при всех $x \in \Delta$ для некоторой подпоследовательности n_k. Не умаляя общности, можно считать, что $F_{n_k}(x) > G(x) + \varepsilon$. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(F_{n_k}(x))dG(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(G(x))dF_{n_k}(x) - 2\int\limits_{0}^{1} h(u)du$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[h(F_{n_k}(x)) - F_{n_k}(x)h'(G(x)) + G(x)h'(G(x)) - h(G(x))\Big]dG(x)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(F_{n_k}(x) - G(x)\Big)^2 \Big(\int\limits_{G(x)}^{F_{n_k}(x)} (F_{n_k}(x) - t)h''(t)dt\Big)dG(x).$$

Отсюда следует, что если $F_n \underset{k\to\infty}{\overset{h}{\longrightarrow}} G.$, то

$$\int\limits_{\Delta}\Big(\int\limits_{G(x)}^{F_{n_k}(x)}(F_{n_k}(x)-t)h''(t)dt\Big)dG(x)\longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Однако, последнее противоречит условию строгой выпуклости функции h, поскольку длина промежутка $[G(x), Fn_k(x)]$ отделена от нуля при $x \in \Delta$. □

Таким образом, можно заключить, что h-сходимость эквивалентна сходимости в пространстве $L^2(G)$.

§6. Неравенства в многомерном случае

Здесь мы приводим некоторые неравенства, которые могут оказаться полезными для проверки гипотезы однородности в многомерном случае.

Пусть X и Y – независимые случайные векторы в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$ или же в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Допустим, что случайные векторы X' и Y' представляют собой независимые копии X и Y соответственно, т.е. $X' \overset{d}{=} X$ и $Y' \overset{d}{=} Y$, где символ $\overset{d}{=}$ используется для обозначения одинаковой распределенности. Допустим, что ε и δ представляют собой независимые бернуллиевские случайные величины, принимающие значения 0 и 1 с вероятностью 1/2 каждое. Дополнительно предположим, что все случайные объекты $X, X', Y, Y', \varepsilon, \delta$ являются независимыми в совокупности. Введем в рассмотрение одномерную случайную величину

$$S=\delta\|X-Y\|-(1-\delta)\Big(\varepsilon\|X-X'\|+(1-\varepsilon)\|Y-Y'\|\Big).$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 6.1. *При сделанных выше предположениях относительно X, X', Y, Y', ε, δ случайные векторы X и Y одинаково распределены тогда и только тогда, когда случайная величина S имеет симметричное (относительно нуля) распределение.*

Доказательство. Пусть $f_1(t) = \mathbf{E}\exp\big(it\|X-Y\|\big)$, $f_2(t) = \mathbf{E}\exp\big(it\|X-X'\|\big)$, $f_3(t) = \mathbf{E}\exp\big(it\|Y-Y'\|\big)$ – характеристические функции случайных величин $\|X-Y\|$, $\|X-X'\|$ и $\|Y-Y'\|$ соответствено. Тогда нетрудно вычислить, что характеристическая функция S имеет вид

$$f(t) = \mathbf{E}\,\exp\bigl(itS\bigr) = \frac{1}{2}f_1(t) + \frac{1}{4}\Bigl(f_2(-t) + f_3(-t)\Bigr).$$

В случае одинаковой распределенности векторов X и Y имеем $f_1(t) = f_2(t) = f_3(t)$ и

$$f(t) = \frac{1}{2}\Bigl(f_1(t) + f_1(-t)\Bigr),$$

т.е. распределение S симметрично относительно нуля.

Предположим теперь, что распределение случайной величины S симметрично относительно нуля и докажем, что $X \stackrel{d}{=} Y$. Если распределение S симметрично относительно нуля, то среднее значение величины $\mathtt{sign}\,\mathtt{S}\,\exp\{-\mathtt{S}^2/2\}$ существует и равно нулю. Однако,

$$\mathbf{E}\,\mathtt{sign}\,\mathtt{S}\,\exp\{-\mathtt{S}^2/2\} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\,\exp\bigl(-\|\mathtt{X}-\mathtt{Y}\|^2/2\bigr) - \frac{1}{4}\Bigl(\mathbf{E}\,\exp\bigl(-\|X-X'\|^2/2\bigr) + \mathbf{E}\,\exp\bigl(-\|Y-Y'\|^2/2\bigr)\Bigr).$$

Из равенства этого ожидания нулю вытекает, что

$$\mathbf{E}\,\exp\bigl(-\|X-Y\|^2/2\bigr) = \frac{1}{2}\Bigl(\mathbf{E}\,\exp\bigl(-\|X-X'\|^2/2\bigr) + \mathbf{E}\,\exp\bigl(-\|Y-Y'\|^2/2\bigr)\Bigr). \tag{6.1}$$

Известно (см., например, [2]), что функция

$$\mathcal{L}(x,y) = 1 - \exp(-\|x-y\|^2/2)$$

представляет собой сильно отрицательно определенное ядро на евклидовом или гильбертовом пространстве. При этом справедливо неравенство

$$\mathbf{E}\,\mathcal{L}(X,Y) - \frac{1}{2}\Bigl(\mathbf{E}\,\mathcal{L}(X,X') + \mathbf{E}\,\mathcal{L}(Y,Y')\Bigr) \geqslant 0$$

с равенством только в случае $X \stackrel{d}{=} Y$. Ясно, что соотношение (6.1) как раз эквивалентно достижению равенства в предыдущем неравенстве. □

Отметим, что из доказательства теоремы 6.1 *вытекает, что* (*в условиях этой теоремы*) $X \stackrel{d}{=} Y$ *тогда и только тогда, когда*

$$\|X-Y\| \stackrel{d}{=} \varepsilon\|X-X'\| + (1-\varepsilon)\|Y-Y'\|.$$

Соединение утверждений теорем 2.1 и 6.1 приводит к следующему результату.

Теорема 6.2. *Пусть X, X', Y, Y', ε, δ – независимые в совокупности случайные элементы, причем $X \stackrel{d}{=} X'$, $Y \stackrel{d}{=} Y'$, а ε и δ принимают значения только 0 и 1 с равными вероятностями. Случайные векторы X и Y принимают значения в конечномерном или сепарабельном гильбертовом пространстве и имеют непрерывные распределения. Допустим, что h – строго выпуклая непрерывно дифференцируемая функция на $[0,1]$, $h(0)=0$. Обозначим $F(x)$ функцию распределения случайной величины*

$$S = \delta\|X-Y\| - (1-\delta)\Big(\varepsilon\|X-X'\| + (1-\varepsilon)\|Y-Y'\|\Big)$$

а $G(x) = 1 - F(-x)$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(F(x))dG(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(G(x))dF(x) \geqslant 2\int\limits_{0}^{1} h(u)du \tag{6.2}$$

с равенством тогда и только тогда, когда $X \stackrel{d}{=} Y$.

Доказательство. Справедливость неравенства (6.2) вытекает из теоремы 2.1. В силу этой же теоремы, достижение равенства влечет симметрию распределения величины S, а она, в силу теоремы 6.1 влечет одинаковую распределенность X и Y. □

С точки зрения статистики, если мы хотим проверить гипотезу

$$H_o: \quad X \stackrel{d}{=} Y$$

в многомерном случае, то можно проверить эквивалентную гипотезу

$$\widetilde{H}_o: \quad \text{“Распределение } S \text{ симметрично относительно нуля”.}$$

Для проверки этой гипотезы существует много критериев, в том числе состоятельных. Идеи некоторых подобных тестов предложены выше в параграфе 2. Однако, довольно часто, гипотеза $\widetilde{H}_o$ проверяется другими способами. Именно, если эта гипотеза верна, то, например, медиана распределения S должна быть равна нулю. Поэтому предлагается отклонить гипотезу в случае, если медиана не равна нулю (с нужной вероятностью). В рассматриваемом нами случае этот подход просто не может быть применен. В самом деле, медиана распределения величины S равна нулю при произвольном распределении векторов X и Y, т.е. никак не связана с симметрией (или ее отсутствием) распределения S.

Отметим, что такая характеристика как норма разности векторов X и Y может быть заменена на сильно отрицательно определенное ядро (см. [2]). При этом и сильная отрицательная определенность не обязательна, так как к ней может приводить и рассмотрение некоторых функций от S, сохраняющих симметрию распределения в случае справедливости основной гипотезы H_o.

В некоторых случаях предположение о независимости случайных векторов X и Y выглядит слишком ограничительным. Однако, на самом деле это не так. Действительно, для проверки одинаковой распределенности X и Y достаточно перейти к рассмотрению новых векторов $U = (X, Y)$ и $V = (Y, X)'$, где знак $'$ используется для обозначения независимой копии. После этого остается только применить теорему 6.2 к векторам U и V вместо X и Y.

§7. Еще один подход к рассмотрению многомерного случая

Подход, использованный в предыдущем параграфе, был основан на использовании $\mathfrak{N}$-расстояний (см. [2]). $\mathfrak{N}$-расстояния, в свою очередь, являются частным случаем $\mathfrak{N}_m$-расстояний. Ниже мы указываем, как можно модифицировать предыдущие рассмотрения для случая этих расстояний.

Напомним некоторые определения из книги [2]. Пусть $m > 0$ – целое четное число. Предположим, что $(\mathfrak{X}, d)$ – метрическое пространство, а $\mathcal{L}$ – вещественная функция на $\mathfrak{X}^m$, инвариантная относительно перестановок своих аргументов. *Скажем, что $\mathcal{L}$ является m-отрицательно определенным ядром, если для любого целого $n \geqslant 1$, произвольного набора точек $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{X}$ и любых вещественных чисел $h_1, \dots, h_n$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{j=1}^{n} h_j = 0$, выполнено неравенство*

$$(-1)^{m/2} \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_m=1}^{n} \mathcal{L}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) h_{i_1} \cdots h_{i_m} \geqslant 0.$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех вероятностных мер на $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A}$ – это σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathfrak{X}$. Определение m-отрицательно определенного ядра эквивалентно следующему.

Предположим, что $\big(\mathfrak{X}, d\big)$ – метрическое пространство, а $\mathcal{L}$- вещественная функция на $\mathfrak{X}^m$, инвариантная относительно перестановок своих аргументов. *Скажем, что $\mathcal{L}$ является m-отрицательно определенным ядром, если для любой меры $Q \in \mathcal{B}$, любой функции $h(x)$, удовлетворяющей условию $\int\limits_{\mathfrak{X}} h(x)dQ(x) = 0$, выполнено*

$$(-1)^{m/2} \int\limits_{\mathfrak{X}} \dots \int\limits_{\mathfrak{X}} \mathcal{L}(x_1, \dots, x_m) h(x_1) \cdots h(x_m) dQ(x_1) \dots dQ(x_m) \geqslant 0. \tag{7.1}$$

Если, дополнительно к этому, из достижения равенства в (7.1) *следует, что $h(x) = 0$ почти всюду по мере Q, то будем говорить, что $\mathcal{L}$ является сильно отрицательно определенным ядром.*

Пусть теперь X и Y – независимые случайные элементы со значениями в $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$. Обозначим через $X_1, \dots, X_m$ независимые копии элемента X, а через $Y_1, \dots, Y_m$ – независимые копии элемента Y. Пусть δ – случайная величина, принимающая значения 0 и 1 с вероятностями 1/2 каждое. Кроме того, допустим, что $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ – случайный вектор, $\sum\limits_{j=0}^{m} \varepsilon_j = 1$, причем каждая из величин ε_j принимает только два значения 0 или 1 с равными вероятностями. Все случайные элементы, рассматриваемые здесь, мы предполагаем независимыми. Введем в рассмотрение случайную величину

$$S_m = (-1)^{m/2} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{k}{m} \Big(\delta - \frac{1 + (-1)^{k+1}}{2}\Big) \times \mathcal{L}(X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_{m-k}) \varepsilon_k, \tag{7.2}$$

где $\mathcal{L}$ – сильно отрицательно определенное ядро. Отметим, что при $k = 0$ функция $\mathcal{L}$ не содержит X_j, а при $k = m$ она не содержит Y_j.

Теорема 7.1. *При сделанных выше предположениях случайные элементы X и Y одинаково распределены тогда и только тогда, когда случайная величина S_m имеет симметричное относительно нуля распределение.*

Доказательство. Сформулированный результат доказывается вполне аналогично теореме 6.1 с тем отличием, что среднее значение величины S_m совпадает с m-той степенью расстояния $\mathfrak{N}_m$ (см. [2]). □

Список литературы

1. L. Baringhaus, N. Henze, *Cramér–von Mises distance: probabilistic interpretation, confidence intervals, and neighbourhood-of-model validation*, — J. Nonparametric Statistics (2017), 1–23. DOI: 10.1080/10485252.2017.1285029.
2. L. B. Klebanov, $\mathfrak{N}$-*Distances and their Applications*, — Charles University in Prague, The Karolinum Press, ISBN 80–246–1152–X (2005).
3. L. B. Klebanov, I. V. Volchenkova, *A new convexity-based inequality, characterization of probability distributions and some free-of-distribution tests*, (2018), 1–6. arXiv: 1805.06483v1.

Klebanov L. B., Volchenkova I. V. A new convexity-based inequality, characterization of probability distributions and some free-of-distribution tests.

In this article we will define new inequalities, connecting some functionals of probability distribution functions. These inequalities are based on the strict convexity of functions that are used in functional definition.

The starting point of of this article is the work "Cramér–von Mises distance: probabilistic interpretation, confidence intervals and neighbourhood of model validation" by Ludwig Baringhaus and Norbert Henze. In our article we provide a generalization of inequality obtained in probabilistic interpretation of the Cramér–von Mises distance. If equality holds there appears a chance to give characterization of some probability distribution functions. Considering this fact and a special character of functional, it is possible to create a class of free-of-distribution two sample tests.

Чешский технический университет в Праге

Поступило 2 октября 2018 г.

Кафедра теории вероятностей
и математической статистики,
Карлов университет,
Прага, Чешская республика
E-mail: levbkl@gmail.com