Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

А. Н. Бородин

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЛОЖНОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ И ДОМИНИРУЮЩИМИ СЛАГАЕМЫМИ

Это исследование продолжает тематику работы [1]. В настоящей работе рассматривается специальный класс сложных пуассоновских процессов с переключениями и доминирующими слагаемыми. Будет изучаться предельное поведение таких процессов при $a \to \infty$, где a – некоторый параметр, входящий в структуру этих процессов.

Имеется последовательность независимых одинаково распределенных двумерных случайных векторов. Эти векторы представляют собой смеси двух векторов. С вероятностью $1 - \dfrac{1}{a}$ эти векторы имеют среднее ноль и конечную дисперсию, а с вероятностью $\dfrac{1}{a}$ они произвольны, но снабжены коэффициентом $\sqrt{a}$, что характеризует их доминирование.

Переключения с одной координаты случайного вектора на другую происходят в моменты, определяемые независимыми бернуллиевскими величинами, независящими от исходных величин и пуассоновского процесса. Эти же величины задают и смесь вышеприведенных координат. При этом, если выпадает единица, то переключение не происходит, а осуществляется переключение, если выпадает ноль. Таким образом, процесс с переключениями начинается как классический сложный пуассоновский процесс с набором из первых координат случайных векторов. Затем в распределенный по геометрическому распределению момент времени слагаемые заменяются на величины из другой координаты независимых одинаково распределенных векторов, и уже в соответствии с этими величинами происходит дальнейшее развитие процесса. Через независимый геометрически распределенный момент времени слагаемые заменяются на величины из исходной координаты

Ключевые слова: бернуллиевские величины, цепь Маркова, сложный пуассоновский процесс с переключениями и доминирующими слагаемыми, предельное распределение.

Работа подготовлена при поддержке программы Президиума РАН №01 “Фундаментальная математика и ее приложения” (грант PRAS-18-01).

и так далее. При переключении в сумму входят слагаемые с коэффициентом $\sqrt{a}$, что приводит к наличию редких доминирующих слагаемых.

В работе изучается предельное поведение сложного пуассоновского процесса с переключениями, когда время увеличивается в a раз. При подходящей нормировке предельным процессом является броуновское движение с переключающейся дисперсией и скачками.

Можно рассматривать и более сложные пуассоновские процессы с переключениями, когда выбор слагаемых осуществляются из трех и более координат одинаково распределенных многомерных случайных векторов. Однако общий подход к изучению предельного поведения распределений сложных пуассоновских процессов с переключениями, и скачками предложенный в настоящей работе не меняется, хотя приводит к определенным усложнениям.

1. Сложный пуассоновский процесс с переключениями и доминирующими слагаемыми. Процесс Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$, с интенсивностью $\lambda_1 > 0$ может быть представлен в следующем виде:

$$N(t) := \max\Big\{l : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\} \mathbb{1}_{[0,t]}(\tau_1),$$

где τ_k, $k = 1, 2, \ldots$, – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ_1 случайные величины.

Пусть χ_k, $k = 1, 2, \ldots$, – независимые бернуллиевские случайные величины:

$$\mathbf{P}(\chi_1 = 1) = 1 - \frac{1}{a} \qquad \mathbf{P}(\chi_1 = 0) = \frac{1}{a}.$$

Предположим, что $\vec{X}_k = (X_k(1), X_k(-1))$, $k = 1, 2, \ldots$, – независимые одинаково распределенные случайные векторы, такие что

$$X_k(l) = \chi_k Z_k(l) + (1 - \chi_k)\sqrt{a} Y_k(l), \quad l = 1, -1. \tag{1.1}$$

Пусть величины $Z_k(l)$, $Y_k(l)$, $k = 1, 2, \ldots$, не зависят от величин χ_k.

Предположим, что последовательности величин χ_k, $k = 1, 2, \ldots$, $Z_k(l)$, $Y_k(l)$, $l = 1, -1$, $k = 1, 2, \ldots$, и процесс Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$ не зависят между собой.

Переключающий процесс $L_a(t)$, $t \geqslant 0$, определяется следующим образом. Изначально можно положить $\chi_0 = 0$. Обозначим через ζ_1 случайную величину, равную количеству величин χ_j, $j = 1, 2, \ldots$, принявших значение 1 до первого появления 0. Эта величина имеет геометрическое распределение:

$$\mathbf{P}(\zeta_1 = m) = \left(1 - \frac{1}{a}\right)^m \frac{1}{a}, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

и

$$\mathbf{P}(\zeta_1 \geqslant m) = \left(1 - \frac{1}{a}\right)^m, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Пусть ζ_2 равна количеству величин χ_j, $j = 1, 2, \ldots$, принявших значение 1 после момента $\zeta_1 + 1$ до первого появления 0 и т.д. Мы получим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ζ_k, $k = 1, 2, \ldots$, характеризующих интервалы времени между последовательными появлениями нулевых значений среди величин χ_j, $j = 1, 2, \ldots$. Эти интервалы имеют длину $1 + \zeta_k$.

Обозначим

$$\rho_a(t) := \max\Big\{l : l + \sum_{k=1}^{l} \zeta_k \leqslant t\Big\} \mathbb{1}_{[0,t]}(1 + \zeta_1), \quad \rho_a(0) = 0.$$

Именно в моменты скачков этого процесса будут осуществляться переключения.

Выбор состояний, в которые происходит переключение, задается однородной цепью Маркова $d(n)$, $n = 0, 1, \ldots$, с множеством состояний $\{1, -1\}$, и переходными вероятностями $p_{1,1} = p_1$, $p_{1,-1} = 1 - p_1$, $p_{-1,1} = 1 - p_{-1}$, $p_{-1,-1} = p_{-1}$.

Сначала заметим, что так как переходные вероятности марковской цепи $d(n)$ не зависят от n, то при фиксированном l справедливо представление

$$d(l + k) = d^l_{d(l)}(k), \tag{1.2}$$

где семейство марковских процессов $\{d^l_j(k)\}_{j=1,-1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, не зависит от σ-алгебры $\sigma(d(v), 0 \leqslant v \leqslant l)$, порожденной цепью $d(v)$ при $v = 1, \ldots, l$, имеет начальное значение $d^l_j(0) = j$, $j = 1, -1$, и те же переходные вероятности, что и исходная цепь, т.е. цепь $d^0_j(k)$.

В результате переключающий процесс определяется формулой

$$L_a(t) := d(\rho_a(t)), \qquad t \geqslant 0.$$

Нас интересует процесс

$$B_a(t) := \int_0^t X_{N(s)}\big(L_a(N(s))\big)\,dN(s) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k\big(L_a(k)\big), \quad t \geqslant 0,$$

который будем называть *сложным пуассоновским процессом с переключениями и доминирующими слагаемыми.*

Пусть $d(0)$ неслучайная величина, которой придаются значения 1 или -1. Выбор $d(0) = 1$ означает, что суммирование начинается с величины $X_1(1)$, а $d(0) = -1$ означает, что суммирование начинается с величины $X_1(-1)$, при условии, что $\chi_1 \neq 0$. Иначе сразу происходит переключение на величины из противоположной координаты вектора $\vec{X}_1$.

Процесс $B_a(t)$ не является марковским. Однако, если рассмотреть двумерный процесс добавив к $B_a(t)$ компоненту, отвечающую за переключения, то получится двумерный марковский процесс.

Положим

$$T_a(t) := L_a(N(t)) = d(\rho_a(N(t))).$$

Теорема 1.1. *Двумерный процесс*

$$\vec{Q}_a(t) = \big(T_a(t), x + B_a(t)\big), \quad \vec{Q}_a(0) = (d(0), x),$$

является однородным марковским процессом. Преобразование Лапласа по времени от характеристической функции переходной вероятности этого процесса имеет вид

$$\begin{aligned}
&\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}\big\{\exp(i\alpha T_a(t) + i\beta B_a(t))\big|\vec{Q}_a(0) = (l, x)\big\}\,dt \\
&= \frac{\lambda e^{i\beta x}}{D_a}\Big(\big(\lambda + \lambda_1(1 - f_{-l}(\beta)(1 - a^{-1})) - \lambda_1 a^{-1} p_{-l}\varphi_{-l}(\beta\sqrt{a})\big)e^{il\alpha} \\
&+ \lambda_1 a^{-1}(1 - p_l)\varphi_{-l}(\beta\sqrt{a})e^{-il\alpha}\Big), \quad \alpha \in \mathbf{R},\ \beta \in \mathbf{R}, \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
D_a :&= \big(\lambda + \lambda_1(1 - f_1(\beta)(1 - a^{-1})) - \lambda_1 a^{-1} p_1\varphi_1(\beta\sqrt{a})\big) \\
&\times \big(\lambda + \lambda_1(1 - f_{-1}(\beta)(1 - a^{-1})) - \lambda_1 a^{-1} p_{-1}\varphi_{-1}(\beta\sqrt{a})\big) \\
&- \lambda_1^2 a^{-2}(1 - p_1)(1 - p_{-1})\varphi_1(\beta)\varphi_{-1}(\beta),
\end{aligned}$$

$f_l(\beta) := \mathbf{E}e^{i\beta Z_1(l)}$, $\varphi_l(\beta) := \mathbf{E}e^{i\beta Y_1(l)}$, $l = 1, -1$.

Доказательство. Марковость процесса $\vec{Q}_a(t)$, $t \geqslant 0$, будет установлена в дальнейшем, а сначала мы рассмотрим как устроены его переходные вероятности.

В силу аддитивности второй координаты процесса, начальное значение x процесса $\vec{Q}_a(t)$ участвует в (1.3) в виде множителя $e^{i\beta x}$, поэтому значение x можно полагать равным нулю.

Обозначим $\mathbf{E}_l$ математическое ожидание при условии $d(0) = l$.

Применяя теорему Фубини, левую часть (1.3) при $x = 0$ можно представить выражением $\mathbf{E}_l \exp(i(\vec{\gamma}, \vec{Q}_a(\tau)))$, где $\vec{\gamma} := (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}$, а τ – не зависящий от рассмотренных выше процессов экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени.

Пусть при $l = 1, -1$

$$I_l := I_l(\lambda, \alpha, \beta, \lambda_1, a^{-1}) := \mathbf{E}_l \exp(i\alpha T_a(\tau) + i\beta B_a(\tau)), \tag{1.4}$$

где характеристическая функция берется при условии $d(0) = l$.

Заметим, что при $k \leqslant \zeta_1$ согласно (1.1) имеем $X_k(l) = Z_k(l)$, и $X_k(\zeta_1 + 1) = \sqrt{a} Y_k(\zeta_1 + 1)$.

Для краткости будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi; A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{1}_A\}$.

Пусть начальное значение $d(0) = l$. Поскольку $\rho_a(\zeta_1 + 1) = 1$ и $L_a(\zeta_1 + 1) = d(1)$, то в силу (1.2) при $k \geqslant 1$ имеем $d(k) = d^1_{d(1)}(k - 1)$ и справедливо равенство

$$\begin{aligned} I_l = {} & \mathbf{E}_l\Big\{ \exp\Big(i\alpha l + i\beta \sum_{k=1}^{N(\tau)} Z_k(l)\Big); N(\tau) \leqslant \zeta_1\Big\} \\ & + \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(i\beta \sum_{k=1}^{\zeta_1} Z_k(l)\Big) \exp\Big(i\alpha d^1_{d(1)}(\rho_a(N(\tau)) - 1)) + i\sqrt{a}\beta Y_{\zeta_1+1}(d(1))\Big) \\ & \times \exp\Bigg(\sum_{k=\zeta+2}^{N(\tau)} X_k\big(d^1_{d(1)}(\rho_a(k) - 1)\big)\Bigg); \zeta_1 < N(\tau)\Big\} =: L_1 + L_2. \end{aligned}$$

Поскольку при $|s| \leqslant 1$

$$\mathbf{E}\, s^{N(\tau)} = \mathbf{E} \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{(\lambda_1\tau)^k}{k!}\, e^{-\lambda_1 \tau} = \mathbf{E} e^{\lambda_1(s-1)\tau} = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1(1 - s)},$$

то

$$L_1 = e^{i\alpha l} \mathbf{E}\Big\{\big(f_l(\beta)\,(1 - a^{-1})\big)^{N(\tau)}\Big\} = \frac{\lambda e^{i\alpha l}}{\lambda + \lambda_1(1 - f_l(\beta)(1 - a^{-1}))}.$$

Для L_2 получим

$$L_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{E}\Big\{ \mathbb{1}_{\{\zeta_1 = m\}} \exp\Big(i\beta \sum_{k=1}^{m} Z_k(l)\Big)\Big\} \mathbf{E}\Big\{ \exp\big(i\alpha d^1_{d(1)}(\rho_a(N(\tau)) - 1)\big) \times \exp\Big(i\beta\sqrt{a} Y_{m+1}(d(1)) + i\beta \sum_{k=m+2}^{N(\tau)} X_k(d^1_{d(1)}(\rho_a(k) - 1))\Big)\Big) \mathbb{1}_{\{m<N(\tau)\}}\Big\}.$$

При $\zeta_1 = m$ и $k \geqslant m+1$ распределения величин $\rho_a(k) - 1$ и $\rho_a(k - m - 1)$ совпадают, и при $N(\tau) > m$ совпадают распределения величин $\rho_a(N(\tau)) - 1$ и $\rho_a(N(\tau) - m - 1)$, поэтому

$$\begin{aligned} L_2 &= \sum_{m=0}^{\infty} \big(1 - \tfrac{1}{a}\big)^m \tfrac{1}{a} f_l^m(\beta) \\ &\times \sum_{v=1,-1} p_{l,v} \varphi_v(\beta\sqrt{a}) \mathbf{E}\Big\{ \exp\big(i\alpha d^1_v(\rho_a(N(\tau) - m - 1))\big) \\ &\times \exp\Big(i\beta \sum_{k=m+2}^{N(\tau)} X_k(d^1_v(\rho_a(k - m - 1)))\Big) \mathbb{1}_{\{m<N(\tau)\}}\Big\} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \big(1 - \tfrac{1}{a}\big)^m f_l^m(\beta) \\ &\times \sum_{v=1,-1} p_{l,v} \varphi_v(\beta\sqrt{a}) \mathbf{E}_v\Big\{ \exp\Big(i\alpha d^1_v(\rho_a(N(\tau) - m - 1))\Big) \\ &\times \exp\Big(i\beta \sum_{k=1}^{N(\tau)-m-1} X_k(d^1_v(\rho_a(k)))\Big) \mathbb{1}_{\{m<N(\tau)\}}\Big\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Индекс v у математического ожидания означает, что выполняется условие $d(0) = v$. Здесь использовалась теорема Фубини и тот факт, что при любом фиксированном m случайные последовательности ζ_j, $j = 1, 2, \ldots$, и ζ_{j+m}, $j = 1, 2, \ldots$, одинаково распределены, а также, что для произвольной последовательности l_k, $k = 1, 2, \ldots$, составленной из 1 и -1, случайные последовательности $X_j(l_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, и $X_{j+m+1}(l_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, одинаково распределены.

Поскольку

$$\mathbf{P}(N(\tau)=k)=\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}\,e^{-\lambda_1 t}\,dt$$

$$=\frac{\lambda\lambda_1^k}{k!(\lambda+\lambda_1)^{k+1}}\int\limits_0^\infty u^k e^{-u}\,du=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Big)^k,\quad k=0,1,2\dots,$$

то

$$\mathbf{E}_v\Big\{\exp\big(i\alpha d_v(\rho_a(N(\tau)-m-1))\big)$$

$$\times\exp\Big(i\beta\sum_{k=1}^{N(\tau)-m-1}X_k(d_v^1(\rho_a(k)))\Big)\mathbb{1}_{\{m<N(\tau)\}}\Big\}$$

$$=\sum_{r=m+1}^\infty\frac{\lambda\lambda_1^r}{(\lambda+\lambda_1)^{r+1}}\mathbf{E}_v\Big\{\exp\big(i\alpha d_v^1(\rho_a(r-m-1))\big)$$

$$\times\exp\Big(i\beta\sum_{k=1}^{r-m-1}X_k(d_v^1(\rho_a(k)))\Big)\Big\}$$

$$=\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Big)^{m+1}\mathbf{E}_v\Big\{\exp\Big(i\alpha d_v^1(\rho(N(\tau)))\Big)\exp\Big(i\beta\sum_{k=1}^{N(\tau)}X_k(d_v^1(\rho_a(k)))\Big)\Big\}$$

$$=\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Big)^{m+1}\mathbf{E}_v\big\{\exp(i\alpha T_a(\tau)+i\beta B_a(\tau))\big\}=\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Big)^{m+1}I_v.$$

Напомним, что I_v определено в (1.4).

В результате при $l=1,-1$ имеем

$$I_l=\frac{\lambda e^{i\alpha l}}{\lambda+\lambda_1(1-f_l(\beta)(1-a^{-1}))}+\frac{1}{a}\sum_{m=0}^\infty(1-a^{-1})^m f_l^m(\beta)\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Big)^{m+1}$$

$$\times\sum_{v=1,-1}p_{l,v}\varphi_v(\beta\sqrt{a})I_v=\frac{\lambda e^{i\alpha l}}{\lambda+\lambda_1(1-f_l(\beta)(1-a^{-1}))}$$

$$+\frac{a^{-1}\lambda_1}{\lambda+\lambda_1(1-f_l(\beta)(1-a^{-1}))}\sum_{v=1,-1}p_{l,v}\varphi_v(\beta\sqrt{a})I_v.$$

Выражая из этой системы уравнений величины I_l, получаем (1.3).

Нам понадобятся еще дополнительные выражения, которые следуют из (1.3). Положим при $l = 1, -1$ и $r = 1, -1$

$$I_{l,r} := I_{l,r}(\lambda, \beta, \lambda_1, a^{-1}) := \mathbf{E}_l \Big\{ e^{i\beta B_a(\tau)}; d(\rho_a(N(\tau))) = r \Big\}. \tag{1.6}$$

Тогда из (1.3) выводим, что

$$I_{l,l} = \frac{\lambda}{D_a}\big(\big(\lambda + \lambda_1(1 - f_{-l}(\beta)(1 - a^{-1})\big) - \lambda_1 a^{-1} p_{-l}\varphi_{-l}(\beta\sqrt{a})\big) \tag{1.7}$$

$$I_{l,-l} = \frac{\lambda}{D_a}\lambda_1 a^{-1}(1 - p_l)\varphi_{-l}(\beta\sqrt{a}), \quad \alpha \in \mathbf{R}, \ \beta \in \mathbf{R}, \tag{1.8}$$

Перейдем к доказательству марковости процесса $\vec{Q}_a(t)$. Рассмотрим произвольный набор векторов $\vec{\gamma}_v \in \mathbf{R}^2$, $v = 1, 2, \ldots, k$, и вектор $\vec{\gamma} = (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. В силу предложений 6.3 и 6.4 гл. I из [2] нам достаточно доказать, что для произвольных $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_k = s < t$, $x \in \mathbf{R}$ и $l = 1, -1$ выполняется следующее равенство

$$L(k, \vec{\gamma}) := \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}(\vec{\gamma}_v, \vec{Q}_a(s_v)) + i(\vec{\gamma}, \vec{Q}_a(t))\Big)\Big|\vec{Q}_a(s) = (l, x)\Big\} \tag{1.9}$$

$$= \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}(\vec{\gamma}_v, \vec{Q}_a(s_v))\Big)\Big|\vec{Q}_a(s) = (l, x)\Big\}\mathbf{E}\Big\{e^{i\left(\vec{\gamma}, \vec{Q}_a(t)\right)}\Big|\vec{Q}_a(s) = (l, x)\Big\}.$$

Это равенство как раз и характеризует марковское свойство, состоящее в том, что при фиксированном значении процесса в настоящий момент времени (момент s) прошлое процесса до этого момента не зависит от значения в любой будущий момент времени (момент t).

Равенство (1.9) можно переписать в виде

$$L(k, \vec{\gamma}) = L(k, \vec{0})L(0, \vec{\gamma}), \tag{1.10}$$

где $\vec{0} = (0, 0)$ – вектор с нулевыми координатами.

Процесс $\rho_a(t)$, $t \geqslant 0$, является процессом с независимыми однородными приращениями, поскольку приращение на интервале $[s, t]$ определяется величинами χ_j, $s \leqslant j < t$, а все величины χ_j, $j \geqslant 1$, независимы и одинаково распределены. Тогда нетрудно убедиться, что композиция $\rho_a(N(t))$, $t \geqslant 0$, тоже является процессом с независимыми однородными приращениями.

Из (1.2) вытекает, что

$$
\begin{aligned}
L(k,\vec{\gamma}) = e^{i\beta x}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}\Big\{&\mathbb{1}_{\{N(s)=m\}}\mathbb{1}_{\{N(t)-N(s)=n\}}\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}(\vec{\gamma}_v,\vec{Q}_a(s_v))\Big)\\
&\times\exp\big(i\alpha d_l^{\rho_a(m)}(\rho_a(m+n)-\rho_a(m))\big)\\
&\times\exp\Big(i\beta\sum_{k=m+1}^{m+n}Y_k(d_l^{\rho_a(m)}(\rho_a(k)-\rho_a(m)))\Big)\Big|\vec{Q}_a(s)=(l,x)\Big\}\\
= e^{i\beta x}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}&\mathbf{E}\Big\{\mathbb{1}_{\{N(s)=m\}}\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}(\vec{\gamma}_v,\vec{Q}_a(s_v))\Big)\Big|\vec{Q}_a(s)=(l,x)\Big\}\\
&\times\mathbf{E}\Big\{\mathbb{1}_{\{N(t)-N(s)=n\}}e^{i\alpha d_l^0(\rho_a(n))}\\
&\times\exp\Big(i\beta\sum_{k=1}^{n}X_k(d_l^0(\rho_a(k)))\Big)\Big|\vec{Q}_a(s)=(l,x)\Big\}\\
= e^{i\beta x}\mathbf{E}\Big\{&\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}(\vec{\gamma}_v,\vec{Q}_a(s_v))\Big)\Big|\vec{Q}_a(s)=(l,x)\Big\}\\
&\times\mathbf{E}\Big\{\exp\big(i\alpha d_l^0(\rho_a(\widetilde{N}(t-s))\big)\exp\Big(i\beta\sum_{k=1}^{\widetilde{N}(t-s)}X_k(d_l^0(\rho_a(k)))\Big)\Big\},
\end{aligned}
$$

где $\widetilde{N}(t-s) := N(t)-N(s)$ является процессом Пуассона, не зависящим от $N(s)$. Здесь использовался тот факт, что распределения величин $\rho_a(k)-\rho_a(m)$ и $\rho_a(k-m)$ совпадают и, что любой фиксированный сдвиг m у индексов последовательностей величин X_k не меняет их распределения.

В результате имеем

$$
\begin{aligned}
L(k,\vec{\gamma}) = e^{i\beta x}\mathbf{E}\Big\{&\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}(\vec{\gamma}_v,\vec{Q}_a(s_v))\Big)\Big|\vec{Q}_a(s)=(l,x)\Big\}\\
&\times\mathbf{E}\big\{\exp\big(i(\vec{\gamma},\vec{Q}_a(t-s))\big)\big|\vec{Q}_a(0)=(l,0)\big\}. \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

Обозначим при $x=0$

$$\rho_l(t,\vec{\gamma}) := \mathbf{E}_l\exp(i(\vec{\gamma},\vec{Q}_a(t))).$$

В силу (1.4)

$$\rho_l(t,\vec{\gamma}) = \mathcal{L}_\lambda^{-1}\big(\frac{1}{\lambda}I_l(\lambda,\alpha,\beta,\lambda_1,a^{-1})\big),$$

где $\mathcal{L}_\lambda^{-1}$ – оператор обратного преобразования Лапласа по λ.

В силу (1.11) имеем следующее равенство

$$L(k,\vec{\gamma}) = L(k,\vec{0})e^{i\beta x}\rho_l(t-s,\vec{\gamma}). \tag{1.12}$$

Поскольку $L(0,\vec{0}) = 1$, то (1.12) влечет, что $L(0,\vec{\gamma}) = e^{i\beta x}\rho_l(t-s,\vec{\gamma})$, и, следовательно, выполняется (1.10). Отсюда вытекает марковость процесса $\vec{Q}_a(t)$, а поскольку характеристическая функция $L(0,\vec{\gamma})$ переходной вероятности зависит только от разности $t-s$, то этот процесс является однородным. Теорема 1.1 доказана. □

2. Предельное поведение сложного пуассоновского процесса с переключениями. Рассмотрим предельное поведение при $a \to \infty$ процесса

$$\vec{R}_a(t) := \Big(T_a(at), x + \frac{1}{\sqrt{a}}B_a(at)\Big), \quad t \geqslant 0.$$

При малой вероятности переключений a^{-1}, мы в a раз увеличиваем время, при котором рассматривается процесс и в $\sqrt{a}$ уменьшаем значения сложного пуассоновского процесса с переключениями.

В качестве предельного процесса выступает процесс

$$\vec{V}_l(t) := \big(L(N(t)), S_l(t)\big), \quad t \geqslant 0,$$

где $L(t) = d(N(t))$, $d(0) = l$, $l = -1, 1$, и

$$\begin{aligned} S_l(t) :&= x + \sqrt{\lambda}_1 \int_0^t \sigma_{d(N(s))}\,dW(s) + \int_0^t Y_{N(s)}(d(N(s))\,dN(s) \\ &= x + \sqrt{\lambda}_1 \int_0^t \sigma_{d(N(s))}\,dW(s) + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k(d(k)), \quad t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

– процесс броуновского движения с переключающейся дисперсией и скачками.

Теорема 2.1. *Предположим, что выполняется представление* (1.1), *в котором* $\mathbf{E}Z_1(l) = 0$ *и* $\mathbf{E}Z_1^2(l) = \sigma_l^2$, $l = -1, 1$, *а* $Y_k(l)$ *– произвольные одинаково распределенные случайные величины. Тогда, в предположении что* $d(0) = l$, *конечномерные распределения процесса* $\vec{R}_a(t)$, $t \geqslant 0$, *сходятся при* $a \to \infty$ *к конечномерным распределениям процесса* $\vec{V}_l(t)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала предельное поведение величин
$$\vec{R}_a(\tau) := \Big(T_a(a\tau), x + \frac{1}{\sqrt{a}}B_a(a\tau)\Big), \quad \text{при} \quad a \to \infty.$$

Поскольку начальное значение x второй компоненты этого вектора аддитивно входит в выражение, то можно рассматривать предельное поведение лишь при $x = 0$. При замене τ на $a\tau$ параметр λ меняется на λ/a. Для сходимости совместных распределений двумерных векторов достаточно изучить предельное поведение при $a \to \infty$ их характеристических функций:
$$\mathbf{E}\exp\big(i(\vec{\gamma}, \vec{R}_a(\tau))\big) = I_l(\lambda/a, \alpha, \beta/\sqrt{a}, \lambda_1, a^{-1}), \quad \vec{\gamma} = (\alpha, \beta).$$
Используя асимптотическое разложение характеристической функции $f_l(\beta)$, при малых β, имеем
$$\begin{aligned} a\lambda_1\Big(1 - f_l(\beta/\sqrt{a})\big(1 - \tfrac{1}{a}\big)\Big) &= a\lambda_1\Big(1 - \big(1 - \frac{\beta^2\sigma_l^2}{2a} + o\big(\tfrac{1}{a}\big)\big)\big(1 - \tfrac{1}{a}\big)\Big) \\ &= \lambda_1 + \lambda_1\beta^2\sigma_l^2/2 + o(1). \end{aligned}$$
Тогда в соотношениях (1.3), (1.7), (1.8), взятых с соответствующей заменой параметров, можно перейти к пределу. Обозначим
$$J_l(\lambda, \alpha, \beta, \lambda_1) := \lim_{a\to\infty} I_l(\lambda/a, \alpha, \beta/\sqrt{a}, \lambda_1, a^{-1}). \tag{2.2}$$
и
$$J_{l,r}(\lambda, \beta, \lambda_1) := \lim_{a\to\infty} I_{l,r}(\lambda/a, \beta/\sqrt{a}, \lambda_1, a^{-1}). \tag{2.3}$$

В результате, при $l = 1, -1$ получим соотношения
$$\begin{aligned} J_l(\lambda, \alpha, \beta, \lambda_1) = \frac{\lambda}{D}\Big(&(\lambda + \lambda_1 + \lambda_1\beta^2\sigma_{-l}^2/2 - \lambda_1 p_{-l}\varphi_{-l}(\beta))e^{il\alpha} \\ &+\lambda_1(1 - p_l)\varphi_{-l}(\beta))e^{-il\alpha}\Big), \end{aligned} \tag{2.4}$$
$$J_{l,l}(\lambda, \beta, \lambda_1) = \frac{\lambda}{D}(\lambda + \lambda_1 + \lambda_1\beta^2\sigma_{-l}^2/2 - \lambda_1 p_{-l}\varphi_{-l}(\beta)), \tag{2.5}$$
и
$$J_{l,-l}(\lambda, \beta, \lambda_1) = \frac{\lambda}{D}(\lambda_1(1 - p_l)\varphi_{-l}(\beta)), \tag{2.6}$$
где
$$\begin{aligned} D = {} & (\lambda + \lambda_1 + \lambda_1\beta^2\sigma_{-1}^2/2 - \lambda_1 p_{-1}\varphi_{-1}(\beta)) \\ & \times(\lambda + \lambda_1 + \lambda_1\beta^2\sigma_1^2/2 - \lambda_1 p_1\varphi_1(\beta)) - \lambda_1^2(1 - p_1)(1 - p_{-1})\varphi_1(\beta)\varphi_{-1}(\beta). \end{aligned}$$

Сравнивая теперь выражение (2.4) с формулой (2.17), $\mu_l = 0$, работы [3], и используя эту формулу, а также соответствие $\sigma_l \longleftrightarrow \sqrt{\lambda_1}\sigma_l/2$, мы видим, что функция $J_l(\lambda, \alpha, \beta, \lambda_1)$ является преобразованием Фурье случайного вектора $\vec{V}_l(\tau)$. Таким образом, при $x = 0$ и $d(0) = l$ имеем

$$J_l(\lambda, \alpha, \beta, \lambda_1) = \mathbf{E} \exp\big(i\alpha d(N(\tau)) + i\beta S_l(\tau)\big),$$

и, аналогично,

$$J_{l,r}(\lambda, \beta, \lambda_1) = \mathbf{E}\big\{ \exp\big(i\beta S_l(\tau)\big); d(N(\tau)) = r\big\}.$$

Для преобразований Лапласа (1.3) данной работы и (2.17) работы [3], отвечающих допредельному и предельному процессам соответственно, имеются явные выражения для обратных преобразований, см., например, (2.18) из [3]. Это позволяет из сходимости (2.2) вывести сходимость обратных преобразований Лапласа, т. е., что при $a \to \infty$

$$\mathbf{E}_l \exp\Big(i\alpha T_a(at) + \frac{i\beta}{\sqrt{a}} B_a(at)\Big) \to \mathbf{E} \exp\big(i\alpha d(N(t)) + i\beta S_l(t)\big).$$

Это влечет сходимость переходных вероятностей марковского процесса $\Big(T_a(at), x + \dfrac{1}{\sqrt{a}} B_a(at)\Big)$ к переходным вероятностям марковского процесса $\big(d(N(t)), x + S_l(t)\big)$, $t \geqslant 0$, $l = -1, 1$.

Следующие рассуждения, по сути дела, устанавливают сходимость конечномерных распределений рассматриваемого процесса к конечномерным распределениям предельного процесса, основываясь на сходимости переходных вероятностей.

Не умаляя общности можно рассмотреть случай $d(0) = 1$ и $B_a(0) = 0$. Для произвольных $0 < s_1 < \cdots < s_{k-1} = s < s_k = t$, и $r = 1, -1$, рассмотрим следующее выражение:

$$L_r(k, \vec{s}_k, \vec{\beta}_k, \lambda_1, a^{-1}) := \mathbf{E}_1\Big\{ \exp\Big(i\sum_{v=1}^{k} (\vec{\gamma}_v, \vec{Q}_a(s_v))\Big); d(\rho_a(N(s_k))) = r\Big\},$$

где $\vec{s}_k := (s_1, \ldots, s_k)$, $\vec{\beta}_k := (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ и $\vec{\gamma}_v := (\alpha_v, \beta_v)$. Аналогично (1.11) имеем

$$L_r(k, \vec{s}_k, \vec{\beta}_k, \lambda_1, a^{-1}) = \sum_{l=-1,1} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}_1\Big\{\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k} (\vec{\gamma}_v, \vec{Q}_a(s_v))\Big);$$

$$d(\rho_a(N(s))) = l, B_a(s) \in dx, d(\rho_a(N(t))) = r\Big\}$$

$$= \sum_{l=-1,1} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}_1\Big\{\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k-1}(\vec{\gamma}_v, \vec{Q}_a(s_v)) + i\beta_k x\Big); d(\rho_a(N(s)))=l, B_a(s)\in dx\Big\}$$

$$\times e^{i\alpha_k r}\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(i\beta_k \sum_{m=1}^{N(t)-N(s)} Y_m\big(d_l^0(\rho_a(m))\big)\Big); d_l^0(\rho_a(N(t)-N(s))) = r\Big\}$$

$$= e^{i\alpha_k r} \sum_{l=-1,1} L_l(k-1, \vec{s}_{k-1}, \vec{\beta}^{\star}_{k-1}, \lambda_1, a^{-1})\, \rho_{l,r}(t-s, \beta_k, \lambda_1, a^{-1}). \quad (2.7)$$

Здесь $\vec{\beta}^{\star}_{k-1} = (\beta_1, \dots, \beta_{k-2}, \beta_{k-1} + \beta_k)$, и

$$\rho_{l,r}(t, \beta, \lambda_1, a^{-1})) := \mathbf{E}_l\Big\{e^{i\beta B_p(t)}; d(\rho_a(N(t))) = r\Big\}.$$

В силу (1.6),

$$\rho_{l,r}(t, \beta, \lambda_1, a^{-1})) = \mathcal{L}_\lambda^{-1}(\lambda^{-1} I_{l,r}(\lambda, \beta, \lambda_1, a^{-1})). \quad (2.8)$$

Мы хотим для любого целого k доказать при $a \to \infty$ сходимость

$$\mathbf{E}_1 \exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}\big(\alpha_v T_a(as_v) + \frac{\beta_v}{\sqrt{a}} B_a(as_v)\big)\Big) \to \mathbf{E}\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}\big(\vec{\gamma}_v, \vec{V}_1(s_v)\big)\Big),$$

что соответствует сходимости конечномерных распределений. В силу принятых обозначений, для этого нам достаточно при $r = -1, 1$ доказать сходимость

$$L_r(k, a\vec{s}_k, \vec{\beta}_k/\sqrt{a}, \lambda_1, a^{-1}) \to \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}\big(\vec{\gamma}_v, \vec{V}_1(s_v)\big)\Big); d(N(s_k))=r\Big\}. \quad (2.9)$$

Докажем это по индукции. При $k = 1$

$$L_r(1, a\vec{s}_1, \beta_1/\sqrt{a}, \lambda_1, a^{-1}) = \rho_{1,r}(as_1, \beta_1/\sqrt{a}, \lambda_1, a^{-1})).$$

Тогда из (2.3) и (2.8) вытекает, что при $s_1 = t$ и $a \to \infty$

$$\rho_{l,r}(as_1, \beta_1/\sqrt{a}, \lambda_1, a^{-1})) = \mathcal{L}_\lambda^{-1}\big(\lambda^{-1} I_{l,r}(\lambda/a, \beta_1/\sqrt{a}, \lambda_1, a^{-1})\big)$$
$$\to \mathcal{L}_\lambda^{-1}\big(\lambda^{-1} J_{l,r}(\lambda, \beta_1, \lambda_1)\big) = \mathbf{E}\big\{e^{i\beta_1 S_l(t)}; d(N(t)) = r\big\}. \quad (2.10)$$

Предположим теперь, что сходимость (2.9) имеет место при $k-1$ и докажем ее при k. Из сделанного предположения и формул (2.7), (2.10) следует, что

$$L_r(k, a\vec{s}_k, \vec{\beta}_k/\sqrt{a}, \lambda_1, a^{-1})$$
$$\to e^{i\alpha_k r} \sum_{l=-1,1} \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(i \sum_{v=1}^{k-1} \big(\vec{\gamma}_v, \vec{V}_1(s_v)\big)\Big); d(N(s_{k-1})) = l\Big\}$$
$$\times \mathbf{E}\big\{e^{i\beta_k S_l(t-s)}; d_l^0(N(t-s)) = r\big\} =: L,$$

где $\vec{\gamma}_v = (\alpha_v, \beta_v)$, $v = 1, \dots, k-2$, и $\vec{\gamma}_{k-1} = (\alpha_{k-1}, \beta_{k-1} + \beta_k)$. Убедимся теперь, что L совпадает с выражением, стоящим в правой части (2.9). Тем самым (2.9) будет доказано по индукции.

Мы преобразуем правую часть (2.9) в выражение для L. Рассмотрим процесс определенный в (2.1). Как и ранее полагаем $S_1(0) = 0$. При $0 \leqslant s < t$ на множестве $\{d(N(s)) = l\}$ справедливо следующее представление

$$S_1(t) : = S_1(s) + \sqrt{\lambda_1} \int\limits_0^{t-s} \sigma_{d_l^{N(s)}(\widetilde{N}(v))}\, d\widetilde{W}(v)$$
$$+ \int\limits_0^{t-s} Y_{\widetilde{N}(v)+N(s)}(d_l^{N(s)}(\widetilde{N}(v)))\, d\widetilde{N}(v) = S_1(s) + \widetilde{S}(t-s), \quad (2.11)$$

где $\widetilde{N}(v) := N(v+s) - N(s)$, $\widetilde{W}(v) = W(v+s) - W(s)$. Важно, что при фиксированном s процессы $\widetilde{N}(v)$ и $\widetilde{W}(v)$, $v \geqslant 0$, распределены так же как исходные процессы Пуассона и броуновского движения, и, кроме того, они не зависят от процесса $\vec{V}_1(q)$, $0 \leqslant q \leqslant s$. Важно, что при любом m на множестве $\{N(s) = m, d(N(s)) = l\}$ весь процесс $\widetilde{S}(t-s)$ не зависят от процесса $\vec{V}_1(q)$, $0 \leqslant q \leqslant s$, и его распределение не меняется с изменением m, а, следовательно, независимость сохраняется и на множестве $\{d(N(s)) = l\}$. Коме того на этом множестве процесс $\widetilde{S}(t-s)$ распределен также как процесс $S_l(t-s)$ определенный в (2.1).

Тогда в силу (2.11) для $0 < s_1 < \dots < s_{k-1} = s < s_k = t$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(i\sum_{v=1}^{k}(\vec{\gamma}_v,\vec{V}_1(s_v))\Big); d(N(t))=r\Big\}\\
&=\sum_{l=-1,1}\int\limits_{\mathbf{R}}\mathbf{E}\Big\{e^{i\sum\limits_{v=1}^{k}\big(\vec{\gamma}_v,\vec{V}_1(s_v)\big)}; d(N(s))=l, S_1(s)\in dx, d(N(t))=r\Big\}\\
&=e^{i\alpha_k r}\sum_{l=-1,1}\int\limits_{\mathbf{R}}\mathbf{E}\Big\{e^{i\sum\limits_{v=1}^{k-1}\big(\vec{\gamma}_v,\vec{V}_1(s_v)\big)+i\beta_k x}; d(N(s))=l, S_1(s)\in dx\Big\}\\
&\times\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(i\beta_k\sqrt{\lambda_1}\int\limits_0^{t-s}\sigma_{d_l^0(\widetilde{N}(v))}\,d\widetilde{W}(v)\\
&+i\beta_k\int\limits_0^{t-s}Y_{\widetilde{N}(v)}(d_l^0(\widetilde{N}(v)))\,d\widetilde{N}(v)\Big); d_l^0(\widetilde{N}(t-s))=r\Big\}.
\end{aligned}
$$

Ясно, что полученное в правой части выражение совпадает с L. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Рассмотрим процесс $U_a(t) := \dfrac{1}{\sqrt{a}}B_a(at)$, $t\in[0,T]$, который является второй компонентой двумерного процесса $\vec{R}_a(t)$ на интервале $[0,T]$. Наряду со сходимостью конечномерных распределений процесса $U_a(t)$, $t\in[0,T]$, что следует из теоремы 2.1, можно установить слабую сходимость этих процессов в пространстве Скорохода $D[0,T]$ к процессу броуновского движения с переключающейся дисперсией.

Теорема 2.2. *Предположим, что выполняется представление* (*1.1*), *в котором* $\mathbf{E}Z_1(l)=0$, $\mathbf{E}Z_1^2(l)=\sigma_l^2$, $\mathbf{E}Y_1(l)=0$ *и* $\mathbf{E}Y_1^2(l)=\delta_l^2$, $l=-1,1$. *Тогда в предположении, что* $d(0)=l$, *процессы* $U_a(t)$, $t\in[0,T]$, *слабо сходятся при* $a\to\infty$ *в пространстве* $D[0,T]$ *к процессу* $S_l(t)$.

Доказательство. Нам достаточно установить относительную компактность семейства процессов $U_a(t)$, $t\in[0,T]$. Для этого, согласно теореме 15.6 из [4], достаточно проверить следующее условие: при любых $s<v<t$

$$
\mathbf{E}\big((U_a(t)-U_a(v))^2(U_a(v)-U_a(s))^2\big)\leqslant C(t-s)^2,
$$

где C – некоторая константа. Левая часть этого соотношения имеет вид

$$\delta_a := \frac{1}{a^2}\mathbf{E}\Big\{\Big(\sum_{k=N(av)+1}^{N(at)} X_k\big(d(\rho_a(k))\big)\Big)^2\Big(\sum_{m=N(as)+1}^{N(av)} X_k\big(d(\rho_a(m))\big)\Big)^2\Big\}.$$

Для вычисления и оценки этого выражения воспользуемся независимостью векторов $(X_k(1), X_k(-1))$, $k = 1, 2, \dots$, от последовательности $d(\rho_a(k))$, $k = 1, 2, \dots$, и процесса Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$. Применим теорему Фубини. Фиксируем значения величин $N(as)$, $N(av)$, $N(at)$, значения последовательности $d(\rho_a(k))$, $k = 1, 2, \dots$, и вычислим сначала математическое ожидание по величинам $X_k(l)$, $l = -1, 1$, $k = 1, 2, \dots$, принимая во внимание их независимость при разных k. Воспользуемся представлением (1.1). Поскольку $\mathbf{E}X_1(l) = 0$ и

$$\mathbf{E}X_1^2(l) = \big(1 - \frac{1}{a}\big)\sigma_l^2 + \delta_l^2 \leqslant \sigma_l^2 + \delta_l^2,$$

то в результате имеем

$$\delta_a \leqslant \frac{2}{a^2}\max_{l=-1,1}(\sigma_l^4 + \delta_l^4)\mathbf{E}\{(N(at) - N(av))(N(av) - N(as))\}$$

$$= \frac{2}{a^2}\max_{l=-1,1}(\sigma_l^4 + \delta_l^4)\mathbf{E}(N(at) - N(av))\mathbf{E}(N(av) - N(as))$$

$$= 2\lambda_1^2\max_{l=-1,1}(\sigma_l^4 + \delta_l^4)(t - v)(v - s) \leqslant \frac{\lambda_1^2}{2}\max_{l=-1,1}(\sigma_l^4 + \delta_l^4)(t - s)^2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что процесс Пуассона является процессом с независимыми однородными приращениями и $\mathbf{E}N(t) = \lambda_1 t$. Теорема 2.2 доказана. □

Список литературы

1. А. Н. Бородин, *Предельное поведение сложного пуассоновского процесса с переключениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 54–66.
2. А. Н. Бородин, *Случайные процессы.* Санкт-Петербург, Лань, 2013.
3. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от диффузий с переключениями и скачками.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018) 28–45.
4. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Москва, Наука, 1977.

Borodin A. N. Limit behavior of a compound Poisson process with switching and dominated terms.

The paper deals with the limit behavior of a compound Poisson process with switching and dominated terms. The switching is provided with Bernulli's random variables and a Markov chain. Under suitable normalization the limit process is a Brownian motion with switching variance and jumps.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
199034 С.-Петербург, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 10 октября 2018 г.