Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ДИФФУЗИЙ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ И СКАЧКАМИ

Это исследование объединяет тематику работ [1] и [2]. Рассматривается класс диффузий с переключениями и скачками, осуществляемыми в пуассоновские моменты времени. Диффузиям с переключениями посвящено много работ, см., например, монографию [3].

Имеется набор из нескольких пар диффузионных коэффициентов (коэффициентов сноса и диффузии), отвечающих классическим диффузиям. Переключения с одного набора диффузионных коэффициентов на другой наступают в случайные моменты времени, соответствующие моментам скачков процесса Пуассона, не зависящего от исходных диффузий. Кроме того, диффузии в указанные моменты совершают скачки.

Нас интересуют результаты, позволяющие вычислять распределения различных функционалов от диффузии с переключениями и скачками. Для классических диффузий, в частности для броуновского движения, основополагающее значение для развития теории распределений интегральных функционалов имеет работа М. Каца [4].

Отвечающий за переключения процесс Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$, с интенсивностью $\lambda_1 > 0$ может быть представлен в следующем виде:

$$N(t) := \max\Big\{l : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\} \mathbb{1}_{[0,t]}(\tau_1),$$

где τ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ_1 случайные величины,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(\tau_k < t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t).$$

Переключающий диффузии процесс $L(t)$, $t \geqslant 0$, определяется следующим образом. Есть однородная цепь Маркова $d(n)$, $n = 0, 1, \ldots,$

Ключевые слова: цепь Маркова, диффузионные процессы, диффузии с переключениями, распределения функционалов.

Настоящая работа частично поддерживалась грантом РФФИ 16-01-00367 и грантом СПбГУ-ННИО № 6.65.37.2017.

заданная на множестве $\{1,\dots,r\}$, и имеющая переходные вероятности $\{p_{l,k}\}$, $l=1,\dots,r$, $k=1,\dots,r$. Тогда $L(t):=d(N(t))$.

Пусть $\vec{Y}_j=(Y_j(1),Y_j(2),\dots,Y_j(r))$, $j=1,2,\dots$, – независимые одинаково распределенные случайные векторы, не зависящие от процесса N. Положим $\vec{Y}_0=(0,\dots,0)$.

Пусть $W(t)$, $t\geqslant 0$, – процесс броуновского движения, не зависящий от процесса Пуассона N и от величин $\vec{Y}_j$, $j=1,2,\dots$.

Рассмотрим однородные диффузии $X(l,t)$, $t\geqslant 0$, $l=1,\dots,r$. При каждом l такая диффузия является решением стохастического дифференциального уравнения: с вероятностью единица для любого $t\geqslant 0$

$$X(l,t)=x+\int\limits_0^t \mu(l,X(l,u))\,du+\int\limits_0^t \sigma(l,X(l,u))\,dW(u). \tag{1.1}$$

Пусть $\mu(l,x)$ и $\sigma(l,x)$, $x\in\mathbf{R}$, $l=1,\dots,r$, – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию ограниченности на линейный рост:

$$|\mu(l,x)|+|\sigma(l,x)|\leqslant C(1+|x|)\quad \text{для всех}\quad x\in\mathbf{R}.$$

Предположим, что $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}}\sigma(l,x)>0$, $l=1,\dots,r$, и что производная $\Big(\dfrac{\mu(l,x)}{\sigma^2(l,x)}\Big)'$ ограничена.

Положение диффузии после скачка задается некоторой измеримой функцией $\rho(x,y)$, $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$. В аргумент x будет подставляться значение процесса перед скачком, а в аргумент y – величины $Y_j(l)$, $l=1,\dots,r$, $j=1,2,\dots$. Здесь и далее l – индекс переключения.

Диффузия с переключениями и скачками (обозначим ее J_l, l – индекс начального набора коэффициентов) определяется рекуррентно следующим образом. Полагаем $d(0)=l$, $l=1,\dots,r$, тем самым $L(0)=l$. Пусть $\varkappa_j:=\sum\limits_{k=1}^{j}\tau_k$ – моменты скачков процесса Пуассона. При $\varkappa_0:=0\leqslant t<\varkappa_1$, полагаем $J_l(t):=X(l,t)$, где X – решение уравнения (1.1). На интервале времени $\varkappa_j\leqslant t<\varkappa_{j+1}$, $j=1,2,\dots$, процесс J_l – решение стохастического дифференциального уравнения

$$J_l(t) = \rho\big(J_l(\varkappa_j-), Y_j(L(\varkappa_j))\big) + \int\limits_{\varkappa_j}^{t} \mu(L(\varkappa_j), J_l(u))\, du + \int\limits_{\varkappa_j}^{t} \sigma(L(\varkappa_j), J_l(u))\, dW(u). \tag{1.2}$$

Как трактовать решение стохастического дифференциального уравнения, заданного в интегральной форме со случайным нижним пределом интегрирования обсуждается в [5, гл. VI, §1]. Рассмотрим семейство процессов, являющихся при фиксированных s и x решением следующего стохастического дифференциального уравнения

$$X_{s,x}(l,t) = x + \int\limits_{s}^{t} \mu(l, X_{s,x}(l,u))\, du + \int\limits_{s}^{t} \sigma(l, X_{s,x}(l,u))\, dW(u), \qquad t \geqslant s.$$

Тогда, согласно теореме 9.2 гл. II из [5], при каждом l процесс $X_{s,x}(l,t)$ является с вероятностью единица непрерывным процессом по $(s,t,x) \in [0,\infty)^2 \times \mathbf{R}$ и с вероятностью единица при любом s

$$X(l,t) = X_{s,X(l,s)}(l,t), \qquad s \leqslant t.$$

Ясно, что если $\varkappa_j \leqslant t < \varkappa_{j+1}$, то

$$J_l(t) = X_{\varkappa_j, \rho(J_l(\varkappa_j-), Y_j(L(\varkappa_j)))}(L(\varkappa_j), t).$$

Уравнение (1.2) в дифференциальной форме можно записать следующим образом (см. [4, гл. VI, § 1]):

$$dJ_l(t) = \mu(L(t), J_l(t))\, dt + \sigma(L(t), J_l(t))\, dW(t) + \big(\rho\big(J_l(t-), Y_{N(t)}(L(t))\big) - J_l(t-)\big) dN(t). \tag{1.3}$$

Заметим, что так как переходные вероятности марковской цепи $d(n)$ не зависят от n, то справедливо представление $d(l+k) = d^l_{d(l)}(k)$, где семейство марковских процессов $\{d^l_j(k)\}_{j=1}^r$, $k = 0, 1, \dots$, не зависит от σ-алгебры $\sigma(d(v), 0 \leqslant v \leqslant l)$, порожденной цепью $d(v)$ при $v = 1, \dots, l$, имеет начальное значение $d^l_j(0) = j$ и те же переходные вероятности, что и исходная цепь, т. е. цепь $d^0_j(k)$. Тогда при любых $0 < s < t$

$$L(t) = d(N(t) - N(s) + N(s)) = d^{N(s)}_{L(s)}(N(t) - N(s)). \tag{1.4}$$

Рассмотрим семейство $J_{l,s,x}(t)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in \mathbf{R}$, $l = 1, \dots, r$, решений следующего стохастического дифференциального уравнения

$$J_{l,s,x}(t) = x + \int\limits_s^t \mu\big(d_l^{N(s)}(N(u)-N(s)), J_{l,s,x}(u)\big)\,du$$
$$+ \int\limits_s^t \sigma\big(d_l^{N(s)}(N(u)-N(s)), J_{l,s,x}(u)\big)\,dW(u) \tag{1.5}$$
$$+ \int\limits_s^t \big(\rho\big(J_{l,s,x}(u-), Y_{N(u)}(d_l^{N(s)}(N(u)-N(s)))\big) - J_{l,s,x}(u-)\big)dN(u).$$

При каждом l процесс $J_{l,s,x}(t)$, можно выбрать так, чтобы он был почти наверное непрерывным по переменной $x \in \mathbf{R}$, кусочно непрерывным по t, и при любом фиксированном s

$$J_l(t) = J_{L(s),s,J_l(s)}(t), \quad t \geqslant s \quad \text{п.н.} \tag{1.6}$$

Нетрудно убедиться, что при фиксированном s и любом m на множестве $\{N(s) = m\}$ процесс

$$Y_{N(u)}(d_l^{N(s)}(N(u)-N(s))), \qquad u > s,$$

не зависит от процесса $Y_{N(v)}(d(N(v)))$, $v \leqslant s$. Это выполнено в силу того, что $\vec{Y}_j$, $j = 1, 2, \dots$, – независимые одинаково распределенные случайные векторы, не зависящие от процесса N, имеющего независимые приращения. Важно, что при фиксированном s и любом m на множестве $\{N(s) = m\}$ весь процесс $J_{l,s,x}(t)$, $t \geqslant s$, не зависит от процесса $J_v(q)$, $0 \leqslant q \leqslant s$, и его распределение не меняется с изменением m, а, следовательно, независимость сохраняется и без предположения $\{N(s) = m\}$.

Делая в уравнении (1.5) замену переменных $h = t - s$ и обозначая $\widetilde{N}(v) := N(v+s) - N(s)$, $\widetilde{W}(v) = W(v+s) - W(s)$, получаем, что процесс $\widetilde{J}_x^l(h) := J_{l,s,x}(h+s)$, $h \geqslant 0$, является решением уравнения

$$\widetilde{J}_x^l(h) = x + \int\limits_0^h \mu\big(d_l^{N(s)}(\widetilde{N}(v)), \widetilde{J}_x^l(v)\big)\,dv + \int\limits_0^h \sigma\big(d_l^{N(s)}(\widetilde{N}(v)), \widetilde{J}_x^l(v)\big)d\widetilde{W}(v)$$
$$+ \int\limits_0^h \big(\rho\big(\widetilde{J}_x^l(v-), Y_{\widetilde{N}(v)+N(s)}(d_l^{N(s)}(\widetilde{N}(v)))\big) - \widetilde{J}_x^l(v-)\big)d\widetilde{N}(v). \tag{1.7}$$

С учетом вышесказанного, этот процесс не зависит от σ-алгебры

$$\mathcal{F}_0^s := \sigma(L(v), N(v), W(v), 0 \leqslant v \leqslant s),$$

порожденной процессами $N(v)$, $d(N(v))$, $W(v)$ до момента времени s, поскольку пуассоновский процесс и броуновское движение являются процессами с независимыми приращениями. Процесс $d_l^{N(s)}(\widetilde{N}(h))$, $h \geqslant 0$, тоже не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_0^s$.

Распределения решения уравнения (1.7) не зависят от s так как это верно для процессов $\widetilde{N}(v)$ и $\widetilde{W}(v)$ и $\vec{Y}_{\widetilde{N}(v)+N(s)}$, $v \geqslant 0$. В результате (1.6) можно переписать в виде

$$J_l(t) = \widetilde{J}_{J_l(s)}^{L(s)}(t - s), \qquad t \geqslant s \qquad \text{п.н.} \tag{1.8}$$

Положим

$$\vec{V}_l(t) := \big(L(t), J_l(t)\big), \qquad t \geqslant 0,$$

и докажем что $\vec{V}_l(t)$, $t \geqslant 0$, является однородным марковским процессом. Заметим, что $\vec{V}_l(0) = (l, x)$. Не умаляя общности будем считать, что $d(0) = 1$. Положим $\mathcal{G}_v^s := \sigma(\vec{V}_1(u), v \leqslant u \leqslant s)$ – σ-алгебра событий, порожденная процессом $\vec{V}_1$ на интервале времени $[v, s]$. Поскольку $\mathcal{G}_0^s \subseteq \mathcal{F}_0^s$ и $\mathcal{G}_s^s \subseteq \mathcal{F}_0^s$, то процесс $\widetilde{J}_x^l(h)$, $h \geqslant 0$, $l = 1, \dots, r$, не зависит от σ-алгебр $\mathcal{G}_0^s$ и $\mathcal{G}_s^s$.

Для доказательства марковости процесса $\vec{V}_1(t)$, $t \geqslant 0$, достаточно доказать, что при любых $0 < s < t$ и произвольного $\vec{\gamma} = (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{E}\big\{ \exp(i(\vec{\gamma}, \vec{V}_1(t)))\big|\mathcal{G}_0^s\big\} = \mathbf{E}\big\{ \exp(i(\vec{\gamma}, \vec{V}_1(t)))\big|\mathcal{G}_s^s\big\}. \tag{1.9}$$

Обозначим

$$\varphi_{l,x}(h, \vec{\gamma}) := \mathbf{E}\big\{ \exp(i(\alpha d_l^0(\widetilde{N}(h)) + \beta \widetilde{J}_x^l(h))).$$

Применяя (1.4) и (1.8), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\big\{\exp(i(\vec{\gamma}, \vec{V}_1(t)))\big|\mathcal{G}_0^s\big\} &= \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(i\alpha d_{L(s)}^{N(s)}(\widetilde{N}(t-s)) + i\beta \widetilde{J}_{J_1(s)}^{L(s)}(t-s)\Big)\Big|\mathcal{G}_0^s\Big\} \\ &= \varphi_{L(s),J_1(s)}(t - s, \vec{\gamma}). \end{aligned} \tag{1.10}$$

В последнем равенстве использовалась обобщенная лемма Фубини (см. лемму 2.1 гл. I из [5]). В нашем случае этот результат применим и для условного математического ожидания относительно σ-алгебры $\mathcal{G}_s^s$. Аналогично имеем

$$\mathbf{E}\big\{ \exp(i(\vec{\gamma}, \vec{V}_1(t)))\big|\mathcal{G}_s^s\big\} = \varphi_{L(s),J_1(s)}(t - s, \vec{\gamma}). \tag{1.11}$$

Тем самым равенство (1.9) доказано. Однородность марковского процесса следует из (1.8), поскольку первый аргумент функции $\varphi_{L(s),J_1(s)}$ зависит от разности моментов времени.

Отметим, что $\varphi_{l,x}(t,\vec{\gamma})$ является характеристической функцией переходной функции процесса $\vec{V}_l(t)$. Достаточно в (1.10), (1.11) с начальным значением l вместо 1 выбрать $s=0$.

В дальнейшем нам понадобится аналог формулы (1.8) при $s=\tau_1$. Поскольку $L(\tau_1)=d(1)$, то из (1.3) при $\tau_1 \leqslant t$ следует, что

$$J_l(t)=\rho\big(X(l,\tau_1),Y_1(d(1))\big)+\int\limits_{\tau_1}^{t}\mu\big(d^1_{d(1)}(N(u)-N(\tau_1)),J_l(u)\big)\,du$$

$$+\int\limits_{\tau_1}^{t}\sigma\big(d^1_{d(1)}(N(u)-N(\tau_1)),J_l(u)\big)\,dW(u)$$

$$+\int\limits_{(\tau_1,t]}\big(\rho\big(J_l(u-),Y_{N(u)}(d^1_{d(1)}(N(u)-N(\tau_1)))\big)-J_l(u-)\big)dN(u). \quad (1.12)$$

Положим $\widehat{W}(s):=W(s+\tau_1)-W(\tau_1)$, $\widehat{N}(s):=N(s+\tau_1)-1$, $s\geqslant 0$. Процесс $\widehat{W}(s)$ является броуновским движением, а процесс $\widehat{N}(s)$ является пуассоновским процессом. При этом эти процессы не зависят от σ-алгебры событий, порожденных процессом J_l до момента времени τ_1 (см. [5], предложение 7.4 гл. I).

Делая в интегралах (1.12) замену переменных $u=v+\tau_1$, $t=s+\tau_1$, получаем

$$J_l(s+\tau_1)=\widehat{J}^{d(1)}_{\rho(X(l,\tau_1),Y_1(d(1)))}(s) \qquad \text{п.н.} \quad (1.13)$$

где $\widehat{J}^l_x(s)$ решение следующего уравнения

$$\widehat{J}^l_x(t)=x+\int\limits_0^s\mu\big(d^1_l(\widehat{N}(v)),\widehat{J}^l_x(v)\big)\,du+\int\limits_0^s\sigma\big(d^1_l(\widehat{N}(v)),\widehat{J}^l_x(v)\big)\,d\widehat{W}(u)$$

$$+\int\limits_0^s\big(\rho\big(\widehat{J}^l_x(v-),Y_{\widehat{N}(v)+1}(d^1_l(\widehat{N}(v)))\big)-\widehat{J}^l_x(v-)\big)d\widehat{N}(v). \quad (1.14)$$

Процесс $\widehat{J}^l_x$ имеет, в силу уравнения (1.3), такие же конечномерные распределения, как и исходный процесс J_l при $J_l(0)=x$, причем он не зависит от σ-алгебры событий $\widetilde{\mathcal{G}} = \sigma\big(\mathcal{G}_0^{\tau_1} \bigcup \sigma\big(\vec{Y}_1\big)\big)$, где $\mathcal{G}_0^{\tau_1}$ – σ-алгебра событий, порожденных процессом броуновского движения W до момента τ_1 (см. определение в [5, § 4 гл. I]), а $\sigma\big(\vec{Y}_1\big)$ – σ-алгебра, порожденная случайной величиной $\vec{Y}_1$.

При определении σ-алгебры $\mathcal{G}_0^{\tau_1}$ естественную фильтрацию $\mathcal{G}_0^t$ процесса X_1 нужно пополнить событиями, порожденными самой случайной величиной τ_1, которая не зависит от $\mathcal{G}_0^t$.

2. Распределение интегральных функционалов от переключающего процесса и диффузии с переключениями и скачками. При предположении $L(0) = l$ рассмотрим метод вычисления совместного распределения интегрального функционала

$$A(t) := \int_0^t f(L(s), J_l(s))\, ds, \quad f \geqslant 0, \quad l = 1, 2, \ldots, r,$$

и функционалов инфимума и супремума $\inf\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} J_l(s)$, $\sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} J_l(s)$.

Общий подход к вычислению распределений интегральных функционалов от броуновского движения был описан в [5, § 1 гл. III]. Этот подход применим к широкому классу процессов, в частности к диффузиям с переключениями и скачками. Поэтому мы будем рассматривать лишь основные результаты, которые позволяют вычислять искомые совместные распределения в рамках этого общего подхода.

Пусть τ – не зависящий от процесса Пуассона $\{N(s),\ s \geqslant 0\}$, однородной цепи Маркова $d(n)$, $n = 0, 1, \ldots$, величин $\vec{Y}_j$, $j = 1, 2, \ldots$ и броуновского движения $\{W(s),\ s \geqslant 0\}$ экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени.

Этот момент соответствует преобразованию Лапласа по времени t. Для того чтобы получить распределение функционала в фиксированный момент t, следует обратить преобразование Лапласа по λ в распределении соответствующего функционала в момент τ.

Обозначим $\mathbf{E}_x$ математическое ожидание при условии $L(0) = l$, $J_l(0) = x$. В силу особой важности параметра x мы его выделяем в обозначении математического ожидания. Для краткости будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi;\, A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{1}_A\}$.

Теорема 2.1. *Пусть $\Phi(l, x)$ и $f(l, x)$, $x \in \mathbf{R}$, $l = 1, \ldots, r$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$ и Φ ограничена.*

Тогда при условии $L(0) = l$, $J_l(0) = x$, $l = 1, \dots, r$, *функции*

$$Q_l(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ \varPhi\big(L(\tau), J_l(\tau)\big) \exp\Big(-\int_0^\tau f\big(L(s), J_l(s)\big)\, ds \Big) \Big\} \tag{2.1}$$

являются единственными ограниченными решениями системы уравнений

$$Q_l(x) = M_l(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x) \sum_{k=1}^{r} p_{l,k} \mathbf{E}\{Q_k(\rho(z, Y_1(k)))\}\, dz, \tag{2.2}$$

$l = 1, \dots, r$, *где функция* $M_l(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *является единственным ограниченным решением уравнения*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(l,x) M''(x) + \mu(l,x) M'(x) - (\lambda + \lambda_1 + f(l,x)) M(x) = -\lambda \varPhi(l,x), \tag{2.3}$$

а $G_z^{(l)}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *является единственным непрерывным ограниченным решением задачи*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(l,x) G''(x) + \mu(l,x) G'(x) - (\lambda + \lambda_1 + f(l,x)) G(x) = 0, \quad x \neq z, \tag{2.4}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda_1/\sigma^2(l,z). \tag{2.5}$$

Замечание 2.1. Для кусочно непрерывных функций f и $\varPhi$ уравнение (2.3) при каждом l надо понимать следующим образом: оно имеет место во всех точках непрерывности функций f и $\varPhi$, а в точках разрыва f и $\varPhi$ его решение непрерывно вместе с первой производной.

Доказательство. Доказательство теоремы 2.1 Положим

$$M_l(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ \varPhi(l, X(l,\tau)) \exp\Big(-\int_0^\tau (\lambda_1 + f(l, X(l,s)))\, ds \Big) \Big\}. \tag{2.6}$$

Тогда M_l – единственное ограниченное решение уравнения (2.3) (см. [4], гл. IV, теорема 4.1).

Положим

$$G_z^{(l)}(x) := \frac{d}{dz} \mathbf{E}_x \Big\{ \exp\Big(-\int_0^{\tau_1} (\lambda + f(l, X(l,s)))\, ds \Big); X(l,\tau_1) < z \Big\}. \tag{2.7}$$

Эта функция – решение задачи (2.4), (2.5) (см. [5], гл. IV, теорема 6.2, $a = -\infty$, $b = \infty$).

Для всех x имеем оценку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\,dz = \mathbf{E}_x \exp\biggl(-\int\limits_0^{\tau_1}(\lambda + f(l, X(l,s)))\,ds\biggr) \leqslant \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}.$$

Докажем, что система уравнений (2.2) имеет единственное ограниченное решение. Применим метод последовательных приближений. Положим $Q_l^{(0)}(x) := M_l(x)$ и

$$Q_l^{(n)}(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_y^{(l)}(x) \sum_{k=1}^{r} p_{l,k}\mathbf{E}\bigl\{Q_k^{(n-1)}(\rho(y, Y_1(k)))\bigr\}\,dy,$$

Тогда, поскольку сумма переходных вероятностей $\{p_{l,k}\}$, по k равна единице, то

$$\max_l \sup_{x\in\mathbf{R}} |Q_l^{(n)}(x)| \leqslant \max_l \biggl(\sum_{k=1}^{r} p_{l,k} \sup_{x\in\mathbf{R}} |Q_k^{(n-1)}(x)| \sup_{x\in\mathbf{R}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_y^{(l)}(x)\,dy\biggr)$$

$$\leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1} \max_k \sup_{x\in\mathbf{R}} |Q_k^{(n-1)}(x)| \max_l \sum_{k=1}^{r} p_{l,k} \leqslant \Bigl(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Bigr)^n \max_l \sup_{x\in\mathbf{R}} |M_l(x)|.$$

Так как

$$\max_l \sup_{x\in\mathbf{R}} |M_l(x)| \leqslant C,$$

то ряд $Q_l(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_l^{(n)}(x)$ сходится равномерно по x и

$$\max_l \sup_{x\in\mathbf{R}} |Q_l(x)| \leqslant \frac{\lambda+\lambda_1}{\lambda} \max_l \sup_{x\in\mathbf{R}} |M_l(x)|. \tag{2.8}$$

Ясно, что

$$\sum_{v=0}^{n} Q_l^{(v)}(x) = M_l(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_y^{(l)}(x) \sum_{k=1}^{r} p_{l,k} \sum_{v=1}^{n-1} \mathbf{E}\bigl\{Q_k^{(v-1)}(\rho(y, Y_1(k)))\bigr\}\,dy.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, получаем, что функции Q_l – решения системы уравнений (2.2).

Единственность ограниченного решения системы уравнений (2.2) следует из того, что для разности таких решений (обозначим ее ΔQ_l)

справедлива оценка

$$\max_l \sup_{x\in\mathbf{R}} |\Delta Q_l(x)| \leqslant \max_l \sup_{x\in\mathbf{R}} |\Delta Q_l(x)| \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}.$$

Это влечет $\Delta Q_l \equiv 0$, если ΔQ_l – ограниченная функция.

Из этого доказательства также следует, что для неотрицательных M_l и $G_z^{(l)}$, решение системы уравнений (2.2) неотрицательно.

Докажем (2.2). Имеем

$$\begin{aligned} Q_l(x) = \mathbf{E}_x\biggl\{\varPhi(l, X(l,\tau)) \exp\biggl(-\int_0^\tau f(l, X(l,s))\,ds\biggr); \tau < \tau_1\biggr\} \\ + \mathbf{E}_x\biggl\{\varPhi\bigl(L(\tau), J_l(\tau)\bigr) \exp\biggl(-\int_0^{\tau_1} f\bigl(l, X(l,s)\bigr)\,ds\biggr) \\ \times \exp\biggl(-\int_{\tau_1}^\tau f\bigl(L(s), J_l(s)\bigr)\,ds\biggr); \tau_1 \leqslant \tau\biggr\} =: V_1(x) + V_2(x), \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $V_1(x)$ и $V_2(x)$ – соответственно первое и второе слагаемые. Поскольку τ_1 не зависит от τ и процесса X, то справедлива формула

$$\mathbf{P}\bigl(\tau < \tau_1 \big| \sigma(X(\cdot,\cdot),\tau)\bigr) = e^{-\lambda_1 \tau},$$

где $\sigma(X(\cdot,\cdot),\tau)$ – σ-алгебра событий, порожденная процессами $X(l,s)$, $s \geqslant 0$, $l = 1,\dots,r$, и моментом τ. Тогда, применяя теорему Фубини, при этом сначала вычисляя математическое ожидание по τ_1, а затем по процессу $X(l,\cdot)$ и моменту τ, получим, что

$$V_1(x) = \mathbf{E}_x\biggl\{\varPhi(l, X(l,\tau)) \exp\biggl(-\int_0^\tau (\lambda_1 + f(l, X(l,s)))\,ds\biggr)\biggr\} = M_l(x). \tag{2.10}$$

Для того чтобы преобразовать второе слагаемое $V_2(x)$, воспользуемся независимостью момента τ от процесса J_l и момента τ_1. По теореме

Фубини имеем

$$V_2(x) = \lambda \mathbf{E}_x \biggl\{ \int_{\tau_1}^{\infty} e^{-\lambda t} \exp\biggl(-\int_0^{\tau_1} f(l, X(l,s))\, ds \biggr)$$
$$\times \Phi\bigl(L(t), J_l(t)\bigr) \exp\biggl(-\int_{\tau_1}^{t} f\bigl(L(s), J_l(s)\bigr)\, ds \biggr) dt \biggr\}.$$

Воспользуемся (1.4) при $s = \tau_1$ и представлением (1.13). При $t \geqslant \tau_1$ имеем $L(t) = d^1_{d(1)}(N(t) - 1)$. В выражении для $V_2(x)$ сделаем замену переменной $t = u + \tau_1$. Положим как и ранее $\widehat{N}(u) := N(u + \tau_1) - 1$. Тогда

$$V_2(x) = \mathbf{E}_x \biggl\{ \exp\biggl(-\int_0^{\tau_1} (\lambda + f(l, X(l,s)))\, ds \biggr) \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \sum_{k=1}^{r} \mathbb{1}_{\{d(1)=k\}}$$
$$\times \Phi\bigl(d^1_k(\widehat{N}(u)), \widehat{J}^k_{\rho(X(l,\tau_1), Y_1(k))}(u)\bigr)$$
$$\times \exp\biggl(-\int_0^{u} f\bigl(d^1_k(\widehat{N}(v)), \widehat{J}^k_{\rho(X(l,\tau_1), Y_1(k))}(v)\bigr)\, dv \biggr) du \biggr\}.$$

По теореме Фубини интеграл по параметру u с весом $\lambda e^{-\lambda u}$ можно заменить на подынтегральное выражение с $\widetilde{\tau}$ вместо u, где $\widetilde{\tau}$ – экспоненциально распределенная с параметром λ случайная величина, не зависящая от других процессов и величин. Тем самым, для $V_2(x)$ получим следующее выражение:

$$V_2(x) = \mathbf{E}_x \biggl\{ \exp\biggl(-\int_0^{\tau_1} (\lambda + f(l, X(l,s)))\, ds \biggr)$$
$$\times \sum_{k=1}^{r} p_{l,k} \mathbf{E} \biggl\{ \Phi\bigl(d^1_k(\widehat{N}(\widetilde{\tau})), \widehat{J}^k_{\rho(X(l,\tau_1), Y_1(k))}(\widetilde{\tau})\bigr)$$
$$\times \exp\biggl(-\int_0^{\widetilde{\tau}} f\bigl(d^1_k(\widehat{N}(s)), \widehat{J}^k_{\rho(X(l,\tau_1), Y_1(k))}(s)\bigr) ds \biggr) \biggm| \widetilde{\mathcal{G}} \biggr\},$$

где σ-алгебра $\widetilde{\mathcal{G}}$ определена после формулы (1.14).

Применяя лемму 2.1 гл. I из [5], получим

$$V_2(x)=\mathbf{E}_x\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_0^{\tau_1}(\lambda+f(l,X(l,s)))\,ds\biggr)\sum_{k=1}^r p_{l,k}Q_k(\rho(X(l,\tau_1),Y_1(k)))\biggr\}.$$

Это выражение преобразуется к следующему виду:

$$V_2(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_x\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_0^{\tau_1}(\lambda+f(l,X(l,s)))\,ds\biggr);X(l,\tau_1)\in dz\biggr\}$$

$$\times\sum_{k=1}^r p_{l,k}\mathbf{E}Q_k(\rho(z,Y_1(k)))=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_z^{(l)}(x)\sum_{k=1}^r p_{l,k}\mathbf{E}Q_k(\rho(z,Y_1(k)))\,dz.$$

Принимая во внимание (2.9) и (2.10) заключаем, что теорема 2.1 доказана. □

Сформулируем результат, позволяющий вычислять совместное распределение интегрального функционала от переключающего процесса, диффузии с переключениями и скачками, и функционалов инфимума и супремума. Доказательство этого результата аналогично приведенному при доказательстве теоремы 2.1, нужно только воспользоваться теоремами 4.2 и 6.2 гл. IV из [5] при $a\neq-\infty$ либо $b\neq\infty$.

Теорема 2.2. *Пусть $\varPhi(l,x)$ и $f(l,x)$, $x\in[a,b]$, $l=1,\dots,r$, – кусочно непрерывные функции по $x\in[a,b]$. Предположим, что $f\geqslant 0$ и $\varPhi$ ограничена, когда либо $a=-\infty$, либо $b=\infty$. Тогда при условии $L(0)=l$, $J_l(0)=x$, $l=1,\dots,r$, функции*

$$Q_l(x):=\mathbf{E}_x\biggl\{\varPhi\bigl(L(\tau),J_l(\tau)\bigr)\exp\biggl(-\int\limits_0^{\tau}f\bigl(L(s),J_l(s)\bigr)\,ds\biggr);$$

$$a\leqslant\inf_{0\leqslant s\leqslant\tau}J_l(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}J_l(s)\leqslant b\biggr\}$$

являются единственными ограниченными решениями системы уравнений (2.2), где при каждом $l=1,\dots,r$ функция $M_l(x)$, $x\in[a,b]$, является единственным решением уравнения (2.3) с граничными условиями

$$M(a)=0,\qquad\qquad M(b)=0,\tag{2.11}$$

а при $z \in [a, b]$ *функция* $G_z^{(l)}(x)$, $x \in [a, b]$, *является единственным непрерывным решением задачи* (2.4), (2.5), *дополненной граничными условиями*

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0. \tag{2.12}$$

Полагаем $M_l(x) = 0$, $G_z^{(l)}(x) = 0$ *при* $x, z \notin (a, b)$.

Пример 2.1. Вычислим совместную характеристическую функцию процесса $L(t) = d(N(t))$, где – однородная цепь Маркова, имеющая переходные вероятности $\{p_{l,k}\}$, $p_{1,1} = p_1$, $p_{1,-1} = 1 - p_1$, $p_{-1,1} = 1 - p_{-1}$, $p_{-1,-1} = p_{-1}$, и броуновского движения с линейным сносом, переключающимися характеристиками и со скачками. Состояния цепи Маркова можно выбирать произвольными, не обязательно равными 1 и 2 как в теореме 2.1 при $r = 2$. Здесь мы выберем эти состояния равными $1, -1$. Процесс броуновского движения с линейным сносом, переключающимися характеристиками и со скачками имеет следующий вид:

$$J_l(t) := x + 2\int_0^t \mu_{L(s)}\, ds + 2\int_0^t \sigma_{L(s)}\, dW(s) + \int_0^t Y_{N(s)}(L(s))\, dN(s), \tag{2.13}$$

где μ_l, σ_l, $l = 1, -1$, – два произвольных набора коэффициентов, $\vec{Y}_k = (Y_k(1), Y_k(-1))$, $k = 1, 2, \dots$, – независимые одинаково распределенные случайные векторы, не зависящие от процесса Пуассона N и броуновского движения W. Коэффициент 2 перед интегралами выбран для упрощения записи формул.

Положим $\varphi_l(\beta) := \mathbf{E} e^{i\beta Y_1(l)}$, $\beta \in \mathbf{R}$, – характеристическая функция величин $Y_k(l)$, $l = 1, -1$.

Вычислим

$$Q_l(x) = \mathbf{E}_x \exp\Big(i\alpha L(\tau) + i\beta J_l(\tau)\Big).$$

Здесь $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$, и $l = 1, -1$, $x \in \mathbf{R}$ обозначают начальное состояние процесса (L, J_l). В силу (2.13),

$$\mathbf{E}_x e^{i\alpha L(\tau) + i\beta J_l(\tau)} = e^{i\beta x} \mathbf{E}_0 e^{i\alpha L(\tau) + i\beta J_l(\tau)}. \tag{2.14}$$

Для вычисления этого выражения применим теорему 2.1 при $\varPhi(l, x) = e^{i\alpha l + i\beta x}$, $f(x) \equiv 0$, $\sigma(l, x) = 2\sigma_l$, $\mu(l, x) = 2\mu_l$ и $\rho(x, y) = x + y$. В данном случае ограниченное решение уравнения

$$2\sigma_l^2 M_l''(x) + 2\mu_l M_l'(x) - (\lambda + \lambda_l) M_l(x) = -\lambda e^{i\alpha l} e^{i\beta x}$$

имеет вид (см., например, [6], формула 2.1.0.3)

$$M_l(x) = \frac{\lambda e^{i\alpha l} e^{i\beta x}}{\lambda + \lambda_1 - 2i\mu_l\beta + 2\sigma_l^2\beta^2}.$$

Ограниченное непрерывное решение задачи (2.4), (2.5) имеет вид (см., например, [6], формула 2.1.0.5)

$$G_z^{(l)}(x) = \frac{\lambda_1}{2\sigma_l\sqrt{2\lambda + 2\lambda_1 + \mu_l^2/\sigma_l^2}} e^{\mu_l(z-x)/2\sigma_l^2 - |x-z|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1+\mu_l^2/\sigma_l^2}/2\sigma_l}.$$

Ясно, что $G_z^{(l)}(x) = G_0^{(l)}(x - z)$. Нам понадобится следующее легко проверяемое равенство: при $\delta > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta z}}{\delta} e^{\mu(z-x)-|x-z|\delta}\, dz = \frac{2e^{i\beta x}}{\delta^2 + \beta^2 - 2i\beta\mu - \mu^2}. \tag{2.15}$$

Обозначим

$$Q_l := \mathbf{E}_0 e^{i\alpha L(\tau)+i\beta J_l(\tau)}. \tag{2.16}$$

Тогда, в силу (2.13), $Q_l(x) = e^{i\beta x}Q_l$. Положим $\widetilde{\lambda} := \lambda + \lambda_1$. В результате, уравнение (2.2) преобразуется к следующему виду:

$$Q_l = \frac{\lambda e^{i\alpha l}}{\widetilde{\lambda} - 2i\mu_l\beta + 2\sigma_l^2\beta^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_1 e^{i\beta z} e^{\mu_l(z-x)/2\sigma_l^2} e^{-|x-z|\sqrt{2\sigma_l^2\widetilde{\lambda}+\mu_l^2}/2\sigma_l^2}}{2\sqrt{2\sigma_l^2\widetilde{\lambda} + \mu_l^2}} dz$$

$$\times \big(p_l Q_l \varphi_l(\beta) + (1 - p_l) Q_{-l}\varphi_{-l}(\beta)\big).$$

Принимая во внимание (2.15) получим, что при $l = 1, -1$

$$Q_l = \frac{\lambda e^{i\alpha l}}{\widetilde{\lambda} - 2i\mu_l\beta + 2\sigma_l^2\beta^2} + \frac{\lambda_1}{\widetilde{\lambda} - 2i\mu_l\beta + 2\sigma_l^2\beta^2}\big(p_l Q_l\varphi_l(\beta) + (1-p_l)Q_{-l}\varphi_{-l}(\beta)\big),$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим

$$\frac{1}{\lambda}Q_l = \frac{1}{D}\Big((\widetilde{\lambda} - 2i\mu_{-l}\beta + 2\sigma_{-l}^2\beta^2 - \lambda_1 p_{-l}\varphi_{-l}(\beta))e^{i\alpha l} + \lambda_1(1-p_l)\varphi_{-l}(\beta)e^{-i\alpha l}\Big), \tag{2.17}$$

где

$$D = \big(\widetilde{\lambda} - 2i\mu_1\beta + 2\sigma_1^2\beta^2 - \lambda_1 p_1\varphi_1(\beta)\big)\big(\widetilde{\lambda} - 2i\mu_{-1}\beta + 2\sigma_{-1}^2\beta^2 - \lambda_1 p_{-1}\varphi_{-1}(\beta)\big)$$
$$- \lambda_1^2(1 - p_1)(1 - p_{-1})\varphi_1(\beta)\varphi_{-1}(\beta) = \big(\widetilde{\lambda} + r_+\big)\big(\widetilde{\lambda} + r_-\big).$$

Значения величин r_+ и r_- равны

$$r_\pm = (\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2)\beta^2 - i(\mu_1 + \mu_{-1})\beta - \frac{\lambda_1 p_1}{2}\varphi_1(\beta) - \frac{\lambda_1 p_{-1}}{2}\varphi_{-1}(\beta) \pm \varUpsilon,$$

где

$$\Upsilon=\Big(\Big((\sigma_1^2-\sigma_{-1}^2)\beta^2+i(\mu_{-1}-\mu_1)\beta+\frac{\lambda_1p_{-1}}{2}\varphi_{-1}(\beta)-\frac{\lambda_1p_1}{2}\varphi_1(\beta)\Big)^2$$
$$+\lambda_1^2(1-p_1)(1-p_{-1})\varphi_1(\beta)\varphi_{-1}(\beta)\Big)^{1/2}.$$

Тогда при $d(0)=l$, $l=1,-1$, и $x=0$ с учетом (2.16) имеем

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_0e^{i\alpha L(\tau)+i\beta J_l(\tau)}=\frac{\lambda_1}{2\Upsilon}(1-p_l)\varphi_{-l}(\beta)e^{-i\alpha l}\Big(\frac{1}{\widetilde{\lambda}+r_-}-\frac{1}{\widetilde{\lambda}+r_+}\Big)$$
$$+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\Upsilon}\Big((\sigma_l^2-\sigma_{-l}^2)\beta^2+i(\mu_{-l}-\mu_l)\beta+\frac{\lambda_1p_{-l}}{2}\varphi_{-l}(\beta)-\frac{\lambda_1p_l}{2}\varphi_l(\beta)\Big)\Big)\frac{e^{i\alpha l}}{\widetilde{\lambda}+r_-}$$
$$+\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\Upsilon}\Big((\sigma_l^2-\sigma_{-l}^2)\beta^2+i(\mu_{-l}-\mu_l)\beta+\frac{\lambda_1p_{-l}}{2}\varphi_{-l}(\beta)-\frac{\lambda_1p_l}{2}\varphi_l(\beta)\Big)\Big)\frac{e^{i\alpha l}}{\widetilde{\lambda}+r_+}.$$

Обращая преобразование Лапласа по λ и учитывая, что $\widetilde{\lambda}$ отличается от λ сдвигом λ_1, при $d(0)=l$ и $x=0$ получаем

$$\mathbf{E}_0e^{i\alpha L(t)+i\beta J_l(t)}$$
$$=\exp\Big(-t\Big(\lambda_1+(\sigma_l^2+\sigma_{-l}^2)\beta^2-i(\mu_l+\mu_{-l})\beta-\frac{\lambda_1p_l}{2}\varphi_l(\beta)-\frac{\lambda_1p_{-l}}{2}\varphi_{-l}(\beta)\Big)\Big)$$
$$\times\Big\{\Big(\frac{e^{i\alpha l}}{2}-\frac{e^{i\alpha l}}{2\Upsilon}\Big((\sigma_l^2-\sigma_{-l}^2)\beta^2+i(\mu_{-l}-\mu_l)\beta+\frac{\lambda_1p_{-l}}{2}\varphi_{-l}(\beta)-\frac{\lambda_1p_l}{2}\varphi_l(\beta)\Big)$$
$$+\frac{1}{2\Upsilon}e^{-i\alpha l}\lambda_1(1-p_l)\varphi_{-l}(\beta)\Big)e^{t\Upsilon}+\Big(\frac{e^{i\alpha l}}{2}+\frac{e^{i\alpha l}}{2\Upsilon}\Big((\sigma_l^2-\sigma_{-l}^2)\beta^2+i(\mu_{-l}-\mu_l)\beta$$
$$+\frac{\lambda_1p_{-l}}{2}\varphi_{-l}(\beta)-\frac{\lambda_1p_l}{2}\varphi_l(\beta)\Big)-\frac{1}{2\Upsilon}e^{-i\alpha l}\lambda_1(1-p_l)\varphi_{-l}(\beta)\Big)e^{-t\Upsilon}\Big\}. \quad (2.18)$$

Рассмотрим некоторые приложения формулы (2.18). Пусть $d(n)$ вырожденная цепь с двумя состояниями и вероятностями перехода $p_{1,1}{=}0$, $p_{1,-1}=1$, $p_{-1,1}=1$, $p_{-1,-1}=0$. Тогда $d(n)=d(0)(-1)^n$ и $L(t)=d(N(t))=l(-1)^{N(t)}$.

Вычислим совместную характеристическую функцию телеграфного процесса

$$T(t):=\int\limits_0^t(-1)^{N(s)}\,ds$$

и процесса броуновского движения с переключающейся дисперсией, и со скачками, который согласно (2.13) определяется формулой

$$S_l(t):=x+2\int\limits_0^t\sigma_{l(-1)^{N(s)}}\,dW(s)+\int\limits_0^tY_{N(s)}(l(-1)^{N(s)})\,dN(s), \quad (2.19)$$

где $l = 1, -1$, σ_1, σ_{-1} – два произвольных набора коэффициентов, а $\vec{Y}_k = (Y_k(1), Y_k(-1))$, $k = 1, 2, \dots$, – независимые одинаково распределенные случайные векторы, не зависящие от процесса Пуассона N и броуновского движения W. Интеграл по процессу Пуассона в (2.19) может быть представлен в виде

$$\widetilde{N}_c(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k(l(-1)^k).$$

Это – сложный переключающийся процесс Пуассона. Как следует из дальнейших вычислений этот процесс в отличие от сложного процесса Пуассона не является процессом с независимыми приращениями.

Положим в (2.13) $d(0) = 1$, $\mu_l = il\gamma/2\beta$, $\gamma \in [0, \infty)$, $\beta \in \mathbf{R}$. Выберем в (2.14) $x = 0$, $\alpha = 0$. Тогда

$$\mathbf{E}_0 e^{i\beta J_1(t)} = \mathbf{E}_0 e^{-\gamma T(t) + i\beta S_1(t)}.$$

В данном случае согласно примеру 2.1 имеем

$$r_\pm = (\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2)\beta^2 \pm \Upsilon,$$

где

$$\Upsilon = \sqrt{((\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)\beta^2 + \gamma)^2 + \lambda_1^2 \varphi_1(\beta)\varphi_{-1}(\beta)}.$$

В результате из (2.18) при $\alpha = 0$ следует, что

$$\mathbf{E}_0 e^{-\gamma T(t) + i\beta S_1(t)}$$

$$= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\Upsilon}(\gamma + \beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)) + \frac{\lambda_1}{2\Upsilon}\varphi_{-1}(\beta)\Big) e^{-t(\lambda_1 + \beta^2(\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2) - \Upsilon)}$$

$$+ \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\Upsilon}(\gamma + \beta^2(\sigma_1^2 - \sigma_{-1}^2)) - \frac{\lambda_1}{2\Upsilon}\varphi_{-1}(\beta)\Big) e^{-t(\lambda_1 + \beta^2(\sigma_1^2 + \sigma_{-1}^2) + \Upsilon)}.$$

Этот результат согласуется с результатом полученным в конце работы [2] иным путем для телеграфного процесса и процесса броуновского движения с переключающейся дисперсией, и без скачков. Достаточно положить $\varphi_1(\beta) = \varphi_{-1}(\beta) = 1$.

При $\gamma = 0$, $\sigma_1 = \sigma_{-1} = \sigma$, $\varphi_l(\beta) = \mathbf{E}e^{i\beta Y_k(l)}$, $l = 1, -1$, мы имеем $\Upsilon = \lambda_1\sqrt{\varphi_1(\beta)\varphi_{-1}(\beta)}$,

$$\mathbf{E}_0 \exp\Big(2i\beta\sigma W(t) + i\beta\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k((-1)^k)\Big)$$
$$= \Big(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_1}{\Upsilon}\varphi_{-1}(\beta)\Big)e^{-t(\lambda_1+2\sigma^2\beta^2-\Upsilon)} + \Big(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{\Upsilon}\varphi_{-1}(\beta)\Big)e^{-t(\lambda_1+2\sigma^2\beta^2+\Upsilon)}$$
$$=e^{-t(\lambda_1+2\sigma^2\beta^2)}\Big(\mathrm{ch}\,\big(\lambda_1 t\sqrt{\varphi_1(\beta)\varphi_{-1}(\beta)}\big)$$
$$+ \frac{\sqrt{\varphi_{-1}(\beta)}}{\sqrt{\varphi_1(\beta)}}\,\mathrm{sh}\,\big(\lambda_1 t\sqrt{\varphi_1(\beta)\varphi_{-1}(\beta)}\big)\Big).$$

Этот результат несложно получить и прямым вычислением.

Рассмотрим еще один частный случай формулы (2.18) при $\beta = 0$. Имеем $\Upsilon = \dfrac{\lambda_1}{2}(2 - p_1 - p_{-1})$. Тогда при $d(0) = l$, $l = 1, -1$, (условие обозначается индексом у математического ожидания)

$$\mathbf{E}_l e^{i\alpha L(t)} = \frac{(1 - p_{-l})e^{i\alpha l}}{2 - p_1 - p_{-1}} + \frac{(1 - p_l)e^{-i\alpha l}}{2 - p_1 - p_{-1}} + \frac{(1 - p_l)(e^{i\alpha l} - e^{-i\alpha l})}{2 - p_1 - p_{-1}}e^{-t\lambda_1(2-p_1-p_{-1})}.$$

Эти формулы можно вычислить и непосредственно. Поскольку $L(t) = d(N(t))$, где $d(n)$ – однородная цепь Маркова с матрицей вероятностей перехода

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 1 - p_1 \\ 1 - p_{-1} & p_{-1} \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 e^{i\alpha L(t)} \\ \mathbf{E}_{-1} e^{i\alpha L(t)} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(N(t) = k)P^k \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$
$$= e^{-\lambda_1 t}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}P^k \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} \end{pmatrix} = e^{-\lambda_1 t}\, e^{\lambda_1 t P} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} \end{pmatrix}.$$

Используя хорошо известную формулу для матричных экспонент, имеем

$$e^{\lambda_1 t P} = \frac{P - \rho_2 I}{\rho_1 - \rho_2}e^{\lambda_1\rho_1 t} + \frac{P - \rho_1 I}{\rho_2 - \rho_1}e^{\lambda_1\rho_2 t},$$

где ρ_1 и ρ_2 – собственные числа матрицы P, а I – единичная матрица. Эти числа равны 1 и $p_1 + p_{-1} - 1$. Таким образом, при $\Delta := 2 - p_1 - p_{-1}$

$$e^{\lambda_1 t P} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 1 - p_{-1} & 1 - p_1 \\ 1 - p_{-1} & 1 - p_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} p_1 - 1 & 1 - p_1 \\ 1 - p_{-1} & p_{-1} - 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1(p_1+p_{-1}-1)t}.$$

В итоге имеем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 e^{i\alpha L(t)} \\ \mathbf{E}_{-1} e^{i\alpha L(t)} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\Delta}\left(\begin{pmatrix} 1-p_{-1} & 1-p_1 \\ 1-p_{-1} & 1-p_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1-1 & 1-p_1 \\ 1-p_{-1} & p_{-1}-1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1(p_1+p_{-1}-2)t}\right)\begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} \end{pmatrix}.$$

Список литературы

1. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от скачкообразных диффузий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **339** (2006), 15–36.
2. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от телеграфного процесса и диффузий с переключениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 38–53.
3. G. Yin, C. Zhu, Hybrid Switching Diffusions: Properties and Applications, Springer, New York, 2010.
4. M. Kac, *On distribution of certain Wiener functionals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65**, No. 1 (1949), 1–13.
5. A. N. Borodin, *Stochastic processes.* Birkhäuser, Cham, Switzerland, 2017.
6. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы.* Лань, Санкт-Петербург, 2016

Borodin A. N. Distributions of functionals of switching diffusions with jumps.

The paper deals with the methods for computing of distributions of functionals of switching diffusions with jumps. The switching between two collections of diffusion coefficients happens at the Poisson time moments, which are independent of the initial diffusions. At the same moments diffusion can have a jumps. The process governing the switching is determined by a Markov chain.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский государственный университет

E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 10 октября 2018 г.