Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 474, 2018 г.

Я. И. Белопольская

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ХЕМОТАКСИСА

§1. Введение

Хемотаксисом называют направленное движение клеток или организмов в ответ на химическое воздействие. Хемотаксис играет чрезвычайно важную роль в широком спектре биологических процессов. Наиболее распространенная модель хемотаксиса, описывающая эволюцию концентрации клеток ρ и концентрации химического вещества c, представляет собой систему нелинейных параболических уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\nabla\cdot(\alpha_1(\rho,c)\nabla\rho - \alpha_2(\rho,c)\rho\nabla c) + \alpha_3(\rho,c), \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\nabla\cdot(\sigma^2\nabla c) + \alpha_4(\rho,c)\rho - \alpha_5(\rho,c)c, \end{cases} \tag{1.1}$$

для которой рассматривается задача Коши с начальными данными

$$\rho(0,x) = \rho_0(x), c(0,x) = c_0(x).$$

Здесь $t \in [0,T], x \in R^d$, $d \geqslant 3$, $x\cdot y = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k y_k$– скалярное произведение в R^d.

Предполагается, что коэффициенты этой системы обладают следующими свойствами:

• Хемостатическая чувствительность $\chi = \alpha_2(\rho,c)\rho$ пропорциональна концентрации клеток ρ; при этом, если функция χ положительна, то происходит притяжение клеток, а если она отрицательна, то происходит отталкивание;

• Коэффициент диффузии клеток $\alpha_1(\rho,c)$ – это положительная вещественная функция;

• Функция $\alpha_2(\rho,c)$ отвечает за среднее увеличение или уменьшение концентрации клеток;

Ключевые слова: диффузионные процессы, системы прямых уравнений Колмогорова, слабые и ослабленные решения задачи Коши.

Работа поддержана грантом РНФ 17-11-01136.

• Функция $\alpha_4(\rho, c)$ описывает влияние химического воздействия (она пропорциональна концентрации ρ, если химическое воздействие обусловлено жизнедеятельностью клеток), наконец, функция $\alpha_5(\rho, c)$ описывает скорость потребления химического вещества. Обе функции предполагаются положительными.

Цель этой работы состоит в том, чтобы построить марковские процессы, ассоциированные с рассматриваемыми системами (1.1), интерпретируя их как системы прямых уравнений Колмогорова, и получить вероятностные представления обобщенного (слабого) решения и/или мерозначного решения этих систем, а также соответствующих ослабленных решений.

Системы вида (1.1) изучались многими авторами в рамках теории уравнений в частных производных, и ссылки на эти работы можно найти, например, в работах [1–3]. Особенностью этих систем является треугольный вид матрицы старших производных. При этом, рассматривая второе уравнение как неоднородное линейное параболическое уравнение, можно найти его решение $c(t, x)$, а также его производную $\nabla c(t, x)$ и подставить $\nabla c(t, x)$ в первое уравнение, что позволяет свести решение системы (1.1) к решению одного уравнения типа уравнения Маккина–Власова.

Вероятностный подход к рассмотрению систем нелинейных параболических уравнений с кросс-диффузией, активно развиваемый в последние десятилетия, как правило, основан на том, что изучаемая система рассматривается как предельная система, описывающая поведение взаимодействующих многочастичных систем при стремлении числа частиц к бесконечности. Полученные при этом предельные уравнения называют уравнениями среднего поля [4, 5]. Отметим также недавнюю работу [6], в которой построена вероятностная модель простейшего одномерного варианта системы (1.1). В настоящей работе предлагается альтернативный подход к вероятностной интерпретации систем уравнений вида (1.1), позволяющий получить альтернативное вероятностное представление решения этой системы и распространить развиваемый подход на более широкий класс систем. Этот подход аналогичен подходу, предложенному в работах [7–9].

§2. Случайные процессы, моделирующие хемотаксис

Для построения обобщенного решения задачи Коши (1.1) нам понадобится ряд функциональных пространств. Обозначим $C_b(R^d)$ пространство ограниченных непрерывных функций и $C_0^\infty(R^d)$ пространство бесконечно дифференцируемых (гладких) функций с компактными носителями. Для любых положительных целых чисел l, k обозначим $C_b^{l,k} = C_b^{k,p}([0,T] \times R^d, R^{d_1})$ множество непрерывно дифференцируемых ограниченных вещественных функций заданных на $[0,T] \times R^d$ с равномерно ограниченными производными по t до порядка l и по x до порядка k. Пусть C_b^∞ обозначает пространство ограниченных гладких функций, $C_0(R^d)$– пространство непрерывных функций с компактными носителями.

Пусть $L^1_{\rm loc}(R^d)$ – пространство локально-интегрируемых функций. Для натуральных k, p обозначим $W^{k,p}(R^d)$ соболевское пространство вещественных функций интегрируемых вместе со своими производными до порядка k в степени p и пусть $W^{1,1}_{\rm loc}$ - пространство функций, производные которых принадлежат $L^1_{\rm loc}$.

Ниже нам понадобятся понятия слабого и ослабленного решения задачи Коши для системы (1.1).

Пару функций (ρ, c) назовем слабым решением (1.1), если для всех $h, g \in C_0^\infty(R^d)$ справедливы интегральные тождества

$$\int\limits_{R^d} \rho(t,y)h(y)dy - \int\limits_{R^d} \rho_0(y)h(y)dy$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} \rho(\theta,y)\frac{1}{2}[\alpha_1(\rho,c)\Delta h(y) - \alpha_2(\rho,c)\nabla c \cdot \nabla h(y)]dyd\theta$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} \rho(\theta,x)\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\alpha_1(\rho,c)\nabla\rho(\theta,y) + \frac{\partial}{\partial c}\alpha_1(\rho,c)\nabla c(\theta,y)\right]\right.$$
$$\left. \times\nabla h(xy) + \frac{\alpha_3(\rho,c)}{\rho(\theta,y)}h(y)\right] dyd\theta \quad (2.1)$$

и

$$\int\limits_{R^d} c(t,y)g(y)dy - \int\limits_{R^d} c_0(y)g(y)dy$$

$$
= \int_0^t \int_{R^d} c(\theta, y) \frac{\sigma^2}{2} \Delta g(y) dy d\theta
$$

$$
+ \int_0^t \int_{R^d} c(\theta, y) \left[\alpha_4(\rho, c) \frac{\rho(\theta, y)}{c(\theta, y)} - \alpha_5(\rho, c) \right] g(y) dy d\theta. \quad (2.2)
$$

Вид эллиптических операторов в правых частях соотношений (2.1) и (2.2) подсказывает, что с ними можно связать диффузионные процессы $\xi_q(t)$, удовлетворяющие следующим стохастическим уравнениям

$$
d\xi_q(\theta) = m_q^{\rho,c}(\theta, \xi_q(\theta)))d\theta + M_q^{\rho,c}(\theta, \xi_q(\theta)))dw(\theta), \quad \xi_q(0) = \xi_{0q}, \quad (2.3)
$$

где $q = 1, 2$, а ξ_{0q} – случайные величины, не зависящие от винеровского процесса $w(t)$ и имеющие распределения $u_{0q}(dy) = P(\xi_{0q} \in dy)$. Здесь и ниже приняты обозначения:

$$
m_1^{\mu,\nu}(\theta, x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \alpha_1(\mu, \nu) \nabla \mu(\theta, x) + \frac{\partial}{\partial \nu} \alpha_1(\mu, \nu) \nabla \nu(\theta, x) \right]
$$

$$
- \frac{1}{2} \alpha_2(\mu, \nu) \nabla \nu(\theta, x),
$$

$$
m_2^{\mu,\nu}(\theta, x) = 0, \quad b_1^{\mu,\nu}(\theta, x) = \frac{\alpha_3(\mu(\theta, x), \nu(\theta, x))}{\mu(\theta, x)},
$$

$$
b_2^{\mu,\nu}(\theta, x) = \alpha_4(\mu(\theta, x), \nu(\theta, x)) \frac{\mu(\theta, x)}{\nu(\theta, x)} - \alpha_5(\mu(\theta, x), \nu(\theta, x)),
$$

$$
[M_1^{\mu,\nu}(\theta, x)]^2 = \alpha_1(\mu(\theta, x), \nu(\theta, x)),
$$

$$
[M_2^{\mu,\nu}(\theta, x)]^2 = \sigma^2.
$$

Обозначим $P_q(0, x, t, dy)$, $q = 1, 2$, – переходные вероятности марковских процессов $\xi_q(t)$, удовлетворяющих СДУ (2.3).

Пару функций (ρ, c) назовем ослабленным решением (1.1), если (ρ, c) – ограниченные дифференцируемые функции класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(R^d)$ и для всех $h_1, h_2 \in C_0^\infty(R^d)$ справедливы интегральные тождества

$$\begin{aligned}\int\limits_{R^d} \rho(t,y)h_1(y)dy &= \int\limits_{R^d}\int\limits_{R^d} \rho_0(x)P_1(0,x,t,dy)h_1(y)dx \\ &+ \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} b_1^{\rho,c}(\theta,z)\rho(\theta,z)\Big[\int\limits_{R^d} h_1(y)P_1(\theta,z,t,dy)\Big]dzd\theta,\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{R^d} c(t,y)h_2(y)dy &= \int\limits_{R^d}\int\limits_{R^d} \rho_0(x)P_2(0,x,t,dy)h_2(y)dx \\ &+ \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} b_2^{\rho,c}(\theta,z))c(\theta,z)\Big[\int\limits_{R^d} h_2(y)P_2(\theta,z,t,dy)\Big]dzd\theta.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Связь между слабыми и ослабленными решениями задачи Коши (1.1) может быть описана следующим образом.

Лемма 2.1 *Пусть* (ρ, c) *– слабое решение задачи Коши* (1.1) *и существует единственное слабое решение* κ_q *задачи Коши*

$$\frac{\partial \kappa_q}{\partial t} = \mathcal{L}_q^* \kappa_q, \quad \kappa_q(0,y) = 0, \quad q = 1, 2, \tag{2.6}$$

где

$$\mathcal{L}_q = m^{\rho,c}\nabla + \frac{1}{2}[M_q^{\rho,c}]\Delta. \tag{2.7}$$

Тогда (ρ, c) *– ослабленное решение задачи Коши* (1.1)*. Если же* (ρ, c) *ослабленное решение* (1.1) *и существует единственное решение* (2.6)*, то* (ρ, c) *является слабым решением* (1.1).

Доказательство. Пусть (ρ, c) – ослабленное решение (1.1). Поскольку плотности переходных вероятностей процессов $\xi_q(t)$, удовлетворяющих СДУ (2.3), удовлетворяют в слабом смысле задаче Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\nabla\cdot(\alpha_1(\rho,c)\nabla p_1 - \alpha_2(\rho,c)p_1\nabla p_2), \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\nabla\cdot(\sigma^2\nabla p_2), \quad p_q(0,x,0,dy) = \delta_x(y), \end{cases} \tag{2.8}$$

где δ – функция Дирака, то, как легко проверить, (ρ, c) является слабым решением (1.1). С другой стороны, пусть (ρ, c) – слабое решение

(1.1). Рассмотрим функции

$$u_1(t,y) = \int\limits_{R^d} p_1(0,x,t,y)\rho_0(dx) + \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} p_1(\theta,z,t,y) b_1^{\rho,c}(\theta,z) u_1(\theta,dz)d\theta,$$

$$u_2(t,y) = \int\limits_{R^d} p_2(0,x,t,y)_0(dx) + \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} p_1(\theta,z,t,y) b_2^{\rho,c}(\theta,z) u_2(\theta,dz)d\theta$$

и покажем, что $\rho = u_1, c = u_2$. С одной стороны, умножая последние равенства на тестовые функции $h_q, q = 1,2$ и интегрируя по R^d, получим, что u_q являются слабыми решениями задачи Коши

$$\frac{\partial u_q}{\partial t} = [\mathcal{L}_q^{\rho,c}]^* u_q + b_q^{\rho,c} u_q, \tag{2.9}$$
$$u_1(0) = \rho_0, u_2(0) = c_0.$$

С другой стороны, поскольку пара (ρ, c) является слабым решением (1.1), то она также является слабым решением (2.9). Пусть $g_1 = u_1 - \rho, g_2 = u_2 - c$. Как нетрудно проверить, как g_q так и $\kappa_q \equiv 0$ удовлетворяют (2.6) и, следовательно, $g_q = 0$ в силу единственности решения (2.6). $\square$

Для удобства перепишем систему (1.1) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\nabla\cdot(\alpha_1(u_1,u_2)\nabla u_1 - \alpha_2(u_1,u_2)u_1\nabla u_2) + \alpha_3(u_1,u_2), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\nabla\cdot(\sigma^2\nabla u_2) + \alpha_4 u_1, u_2)u_1 - \alpha_5(u_1,u_2)u_2, \\ u_1(0,y) = u_{01}(y), u_2(0,y) = u_{02}(y), \end{cases} \tag{2.10}$$

приняв обозначения $u_1 = \rho, u_2 = c$.

Будем говорить, что выполнено условие **С 2.1**, если функции $\alpha_q(\mu,\nu)$ дифференцируемы и справедлива оценка

$$\alpha_1(\mu,\nu) \geqslant 0, \quad \mu(t,y) > 0, \;\; \nu(t,y) > 0. \tag{2.11}$$

Как следует из общих результатов теории стохастических уравнений, существование и единственность марковских процессов $\xi_q(\theta)$, удовлетворяющих СДУ (2.3), мы можем гарантировать при априорных предположениях о том, что:

1) существует единственное обобщенное решение $(u_1(t),\ u_2(t)) \in W^{1,1}(R^d) \times W^{1,1}(R^d)$ системы (2.10);

2) функции $u_q(t,y)$, $q = 1,2,$ – положительные интегрируемые функции, ограниченные вместе со своими первыми производными по y и справедливы оценки (2.11).

Для того, чтобы получить замкнутую систему уравнений, позволяющую найти процессы $\xi_1(\theta), \xi_2(\theta)$ и их распределения, не предполагая существования решения задачи (2.10), мы рассмотрим вначале соответствующую линеаризованную задачу.

Пусть $\mu(t,y)$ и $\nu(t,y)$ – строго положительные интегрируемые функции, ограниченные вместе со своими первыми производными по y. Рассмотрим задачу Коши для системы линейных параболических уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \kappa_1}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\nabla \cdot (\alpha_1^{\mu,\nu}\nabla\kappa_1 - \alpha_2^{\mu,\nu}\mu\nabla\kappa_2) + b_1^{\mu,\nu}\kappa_1, \\ \dfrac{\partial \kappa_2}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\nabla \cdot (\sigma^2\nabla\kappa_2) + b_2^{\mu,\nu}\kappa_2, \\ \kappa_1(0,y) = u_{01}(y), \ \ \kappa_2(0,y) = u_{02}(y), \end{cases} \tag{2.12}$$

коэффициенты которой удовлетворяют условию **C 2.1** и ассоциированные с ней случайные процессы $\bar{\xi}_q, \bar{\eta}_q, \quad q = 1,2$, удовлетворяющие СДУ

$$\bar{\xi}_1(t) = \xi_{01} + \int_0^t m_1^{\mu,\nu}(\theta, \bar{\xi}_1(\theta))d\theta + \int_0^t M_1^{\mu,\nu}(\theta, \bar{\xi}_1(\theta))dw(\theta), \tag{2.13}$$

$$\bar{\xi}_2(t) = \xi_{02} + \sigma w(t), \tag{2.14}$$

где $\mu(t,x), \nu(t,x)$ – заданные функции, ξ_{01}, ξ_{02} – случайные величины с распределениями $P\{\xi_{01} \in dy\} = u_{01}(y)dy$, $P\{\xi_{02} \in dy\} = u_{02}(y)dy$, не зависящие от винеровского процесса $w(t)$, и

$$\bar{\eta}_1(t) = 1 + \int_0^t b_1^{\mu,\nu}(\theta, \bar{\xi}_1(\theta))\bar{\eta}_1(\theta)d\theta \tag{2.15}$$

$$\bar{\eta}_2(t) = 1 + \int_0^t b_2^{\mu,\nu}(\theta, \bar{\xi}_2(\theta))\bar{\eta}_2(\theta)d\theta. \tag{2.16}$$

Ниже нам потребуется определение мерозначных решений параболических систем. Такие решения можно определить как для линеаризованных систем вида (2.12), так и для систем параболических уравнений типа уравнения Маккина–Власова, т.е. параболических уравнений, коэффициенты которых представляют собой функционалы от искомых мер. Определим понятие слабого и ослабленного мерозначного решения для линеаризованной системы (2.12).

Обозначим $\mathcal{M}(R^d)$ пространство финитных борелевских мер на R^d, снабженное нормой полной вариации

$$\|\mu\|_{TV} = \sup_{\substack{f \in C_b(R^d),\\ \|f\|_\infty \leqslant 1}} \Big| \int_{R^d} f(y)\mu(dy) \Big|.$$

Пару отображений $\kappa_q : [0,T] \times R^d \to \mathcal{M}(R^d)$, $q = 1, 2$, назовем слабым мерозначным решением линеаризованой системы (2.12), если для всех $h_q \in C_0^\infty(R^d), t \in [0,T]$ выполняются интегральные тождества

$$\begin{aligned} &\int_{R^d} h_q(y)\kappa_q(t,dy) - \int_{R^d} h_q(y)\kappa_{0q}(dy) \\ &\quad = \int_0^t \int_{R^d} \kappa_q(\theta,dy)\mathcal{L}_q^{\mu,\nu} h_q(y)d\theta \\ &\qquad + \int_0^t \int_{R^d} \kappa_q(\theta,dz)h_q(z)b_q(\mu(\theta,z),\nu(\theta,z))d\theta. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Здесь

$$\mathcal{L}_q^{\mu,\nu} h_q = m_q^{\mu,\nu} \cdot \nabla h_q + \frac{1}{2}[M_q^{\mu,\nu}]^2 \Delta h_q.$$

Пару отображений $\kappa_q : [0,T] \times R^d \to \mathcal{M}(R^d)$, $q = 1, 2$, назовем ослабленным мерозначным решением линеаризованой системы (2.12), если для всех $h_q \in C_0^\infty(R^d), t \in [0,T]$ выполняется интегральные тождества

$$\int\limits_{R^d} h_q(y)\kappa_q(t,dy) = \int\limits_{R^d} h_q(y) \int\limits_{R^d} u_{0q}(dx) P_q(0,x,t,dy)$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} \left[\int\limits_{R^d} h_q(y) P_q(\theta,z,t,dy) \right] b_q^{\mu,\nu}(\theta,z)\kappa_q(\theta,dz)d\theta. \quad (2.18)$$

Замечание. Поскольку κ_q – финитная мера, то, используя стандартные рассуждения об аппроксимации непрерывной ограниченной функции гладкими функциями, можно показать, что в определении ослабленного решения вместо пространства тестовых функций $C_0^\infty(R^d)$ достаточно рассмотреть пространство $C_b(R^d)$.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* **C 2.1** *и меры* $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2)$ *заданы соотношениями*

$$\int\limits_{R^d} h_q(y)\kappa_q(t,dy) = E\left[h_1(\bar{\xi}_q(t))\bar{\eta}_q(t)\right], \quad q = 1,2, \quad (2.19)$$

справедливыми для любых тестовых функций $h_q \in C_b(R^d)$. *Тогда* $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2)$ *является ослабленным решением* (2.12). *Справедливо и обратное утверждение. Если* κ *– ослабленное решение* (2.12)*, то справедливы соотношения* (2.19).

Доказательство. Прежде всего, заметим, что при априорном предположении о том, что μ и ν – дифференцируемые ограниченные функции, существует единственное решение системы СДУ (2.13)–(2.16), представляющее собой пару марковских процессов $\xi_q(t), q = 1,2$ и их мультипликативных функционалов, порожденных процессами $\eta_q(t)$. При этом, если соотношения (2.19) выполняются для любой ограниченной борелевской функции h_q, то, в силу теоремы Рисса, определены меры $\kappa_q(t,dx)$.

Обозначим $\bar{P}_q(\theta,z,t,dy), q = 1,2$, переходные вероятности марковских процессов $\bar{\xi}_q(t)$. Покажем, что меры κ_q, определенные соотношениями (2.19), удовлетворяют системе линейных уравнений вида (2.12). Для того, чтобы это проверить, заметим, что из соотношений (2.19) следует, что справедливы равенства

$$\int\limits_{R^d} h_q(x)\kappa_q(t,dx) = \mathbf{E}[h_q(\bar{\xi}_q(t))]$$
$$+\int\limits_0^t E[h_q(\bar{\xi}_q(\theta))b_q^{\mu,\nu}(\theta,\bar{\xi}_q(\theta))\bar{\eta}_q(\theta)d\theta. \qquad (2.20)$$

Первые слагаемые в правых частях (2.20) могут быть представлены в виде

$$\mathbf{E}[h_q(\bar{\xi}_q(t))] = \int\limits_{R^d}\kappa_{q0}(dx)\int\limits_{R^d} h_q(y)\bar{P}_q(0,x,t,dy) \qquad (2.21)$$

для произвольных $t \in [0,T]$ и $h_q \in C_0^\infty(R^d)$. С другой стороны, используя соотношение

$$\mathbf{E}[h_q(\xi_q(t))|\xi_q(\theta)] = \int\limits_{R^d} h_q(y)\bar{P}_q(\theta,\xi_q(\theta),t,dy), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant t, \qquad (2.22)$$

получим

$$\mathbf{E}[h_q(\bar{\xi}_q(t))b_q^{\mu,\nu}(\theta,\bar{\xi}_q(\theta))\bar{\eta}_q(\theta)] = \mathbf{E}[b_q^{\mu,\nu}(\theta,\bar{\xi}_q(\theta))\bar{\eta}_q(\theta)\mathbf{E}[h_1(\bar{\xi}_q(t))|\bar{\xi}_q(\theta)]].$$
$$= \mathbf{E}[b_q^{\mu,\nu}(\theta,\bar{\xi}_q(\theta))\bar{\eta}(\theta)\int\limits_{R^d} h_q(y)\bar{P}_q(\theta,\bar{\xi}(\theta),t,dy)]$$
$$= \int\limits_{R^d} b_q^{\mu,\nu}(\theta,z)\int\limits_{R^d} h_q(y)\bar{P}_q(\theta,z,t,dy)\widetilde{\kappa}_q(\theta,dz). \qquad (2.23)$$

Последнее из равенств в (2.23) вытекает из теоремы Рисса, в которой в качестве тестовой функции выбрана функция

$$b_q^{\mu,\nu}(\theta,z)\int\limits_{R^d} h_q(y)\bar{P}_q(\theta,z,t,dy).$$

Подставляя (2.22) и (2.23) в правую часть (2.20), мы придем к соотношению

$$\int\limits_{R^d} h_q(y)\widetilde{\kappa}_q(t,dy) = \int\limits_{R^d} \rho_0(dx) \int\limits_{R^d} h_q(y)\bar{P}_q(0,x,t,dy)$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} b_q^{\mu,\nu}(\theta,z) \int\limits_{R^d} h_q(y)\bar{P}_q(\theta,z,t,dy)\widetilde{\kappa}_q(\theta,dz)d\theta, \quad (2.24)$$

т.е. пара $\widetilde{\kappa}_q(t,dy), q = 1,2$ является ослабленным мерозначным решением задачи (2.12). Остается показать, что это решение единственно.

Предположим, что существует еще одно ослабленное решение $\kappa^1 = (\kappa_1^1, \kappa_2^1)$ системы (2.12) и обозначим

$$\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2) = (\kappa_1 - \kappa_1^1, \kappa_2 - \kappa_2^1).$$

Поскольку функции $b_q^{\mu,\nu}(t,x) \equiv b_q(\mu(t,x),\nu(t,x))$ ограничены в силу ограниченности μ и ν, то из (2.19) следует, что $\|\upsilon_q\|_{TV} < \infty$. При этом υ_q удовлетворяют соотношениям

$$\int\limits_{R^d} h_q(y)\upsilon_q(t,dy) = \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} b_q^{\mu,\nu}(\theta,z) \int\limits_{R^d} h_q(y)\bar{P}_q(\theta,z,t,dy)\upsilon_q(\theta,dz)d\theta.$$

Вычисляя в последних соотношениях супремум по $h_q \in C_b(R^d)$, удовлетворяющим оценке $\|h_q\|_\infty \leqslant 1$, и используя свойства функций μ и ν, мы получим неравенства

$$\|\upsilon_q(t)\|_{TV} \leqslant \sup_{(t,y)\in[0,T]\times R^d} |b_q^{\mu,\nu}(t,y)| \int\limits_0^t \|\upsilon_q(\theta)\|_{TV} d\theta, \quad (2.25)$$

откуда в силу леммы Гронуолла вытекает, что $\upsilon_q(t) = 0$, $q = 1,2$. □

Возвратившись к нелинейной системе (2.10), мы предположим, что существует решение задачи Коши для этой системы и функции $u_1(t,y)$, $u_2(t,y)$ ограничены и интегрируемы по y вместе со своими первыми производными.

Обозначим $\kappa_q^u(t,dy)$ меры, заданные соотношениями

$$\int\limits_{R^d} h_q(y)\kappa_q^u(t,y)dy = \mathbf{E}\left[h_q(\xi_q(t))\eta_q(t)\right], \quad q = 1,2, \quad (2.26)$$

справедливыми для любых тестовых функций $h_q \in C_b(R^d), q = 1, 2$. Здесь $\xi_q(\theta), \eta_q(\theta)$ – случайные процессы, удовлетворяющие СДУ

$$d\xi_1(\theta) = m_1^{u_1,u_2}(\theta, \xi_1(\theta))d\theta + M_1^{u_1,u_2}(\theta, \xi_1(\theta))dw(\theta), \quad \xi_1(0) = x, \tag{2.27}$$

$$d\xi_2(\theta) = \sigma dw(\theta), \quad \xi_2(0) = x, \tag{2.28}$$

$$\bar{\eta}_1(t) = 1 + \int_0^t b_1^{u_1,u_2}(\theta, \xi_1(\theta)\eta_1(\theta)d\theta, \tag{2.29}$$

$$\eta_2(t) = 1 + \int_0^t b_2^{u_1,u_2}(\theta, \xi_2(\theta))\eta_2(\theta)d\theta. \tag{2.30}$$

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* **C 2.1**. *Функции*

$$u_q \in L^1([0, T], W^{1,1}(R^d))$$

являются ослабленными решениями задачи (2.10) *тогда и только тогда, когда для всех* $h_q \in C_b(R^d)$ *справедливы равенства*

$$\int_{R^d} h_q(y)u_q(t, y)dy = \mathbf{E}\left[h_q(\xi_q(t))\eta_q(t)\right], \quad q = 1, 2, \tag{2.31}$$

где $\xi_q(t), \eta_q(t), q = 1, 2,$ *– случайные процессы, удовлетворяющие уравнениям* (2.27)–(2.30).

Доказательство. Пусть $u_q(t, y)$ – ослабленное решение задачи (2.10). Покажем, что при этом справедливо соотношение (2.31). Поскольку выполнены условие **C 2.1**, то, как нетрудно проверить, меры $g_q(t, dy)$, заданные соотношениями

$$\int_{R^d} h_q(y)g_q(t, dy) = \mathbf{E}\left[h_q(\xi_q(t))\eta_q(t)\right], \quad q = 1, 2,$$

определяют единственное ослабленное мерозначное решение линейной задачи

$$\frac{\partial g_q}{\partial t} = \mathcal{L}_q^u g_q + b_q^u g_q, \quad g_q(0, dy) = u_{0q}(y)dy. \tag{2.32}$$

С другой стороны, поскольку $u_q(t, y)$ – ослабленное решение задачи (2.10), то мера $\lambda_q(t, dy) = u_q(t, y)dy$ также является ослабленным мерозначным решением задачи (2.29) и $g_q(t, y)dy = \lambda_q(t, dy) = u_q(t, y)dy$ в силу единственности решения задачи (2.6).

С учетом замечания, приведенного выше, мы получим, что для любой тестовой функции $h_q \in C_b(R^d)$

$$\int\limits_{R^d} h_q(y)u_q(t,y)dy = \int\limits_{R^d} h_q(y)\lambda_q(t,dy) = \mathbf{E}[h_q(\xi_q(t))\eta_q(t)]. \tag{2.33}$$

Наоборот, пусть функция $u_q(t,x)$ задана соотношением (2.33). Тогда, полагая $\lambda_q(t,dx) = u_q(t,x)dx$, заметим, что (2.31) можно переписать в виде

$$\int\limits_{R^d} h_q(y)\lambda_q(t,dy) = \mathbf{E}[h_q(\xi_q(t))\eta_q(t)], \quad h_q \in C_b(R^d),\ \ t \in [0,T]. \tag{2.34}$$

Воспользовавшись снова предложением 2.1, получим, что $\lambda_q(t)$ представляет собой единственное ослабленное мерозначное решение задачи (2.32). В частности, для любых тестовых функций $h_q \in C_0^\infty(R^d)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\int\limits_{R^d} h_q(y)u_q(t,y)dy &= \int\limits_{R^d} h_q(y)\lambda_q(t,dy)\\ &= \int\limits_{R^d}\Bigg[\int\limits_{R^d} h_q(y)P_q(0,x,t,dy)\Bigg]u_{0q}(x)dx\\ &+ \int\limits_0^t\int\limits_{R^d}\Bigg[\int\limits_{R^d} P_q(\theta,z,t,dy)h_q(y)\Bigg]b_q(u(\theta,z))u_q(\theta,z)dzd\theta, \end{aligned} \tag{2.35}$$

откуда вытекает, что $u_q, q = 1,2,$ – ослабленное решение задачи (2.32). □

Замечание 2.4. Система (2.26)–(2.30), (2.32) не является замкнутой системой, поскольку коэффициенты m_q зависят как от u_q, так и от ∇u_q. Для того, чтобы превратить эту систему в замкнутую систему, рассмотрим соответствующую регуляризованную систему, ассоциированную с системой (2.15). С этой целью мы введем в рассмотрение систему сглаживающих функций $R_\epsilon \in W^{1,1}(R^d) \cap W^{1,\infty}(R^d)$, обладающих свойствами

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{R^d} R_\epsilon(x-y)\mu(t,dy) = \mu(t,x),$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{R^d}\nabla R_\epsilon(x-y)\mu(t,dy)=\nabla\mu(t,x),$$

где сходимость понимается в топологии пространств обобщенных функций.

Рассмотрим систему СДУ

$$d\xi_{\epsilon,1}(\theta)=m^u_{\epsilon,1}(\theta,\xi_{\epsilon,1}(\theta))d\theta+M^u_{\epsilon,1}(\theta,\xi_{\epsilon,1}(\theta))dw(\theta), \tag{2.36}$$
$$\xi_{\epsilon,1}(0)=x,$$
$$d\xi_2(\theta)=\sigma dw(\theta),\quad \xi_2(0)=x, \tag{2.37}$$
$$\bar\eta_{\epsilon,1}(t)=1+\int\limits_0^t b^u_{\epsilon,1}(\theta,\xi_{\epsilon,1}(\theta)\eta_{\epsilon,1}(\theta)d\theta, \tag{2.38}$$
$$\eta_{\epsilon,2}(t)=1+\int\limits_0^t b^u_{\epsilon,2}(\theta,\xi_{\epsilon,2}(\theta))\eta_{\epsilon,2}(\theta)d\theta. \tag{2.39}$$

Здесь

$$m^u_{\epsilon,q}(t,x)=m_q([R_\epsilon*u_1](t,x),[R_\epsilon*u_2](t,x)),$$

$$M^u_{\epsilon,q}(t,x)=M_q([R_\epsilon*u_1](t,x),[R_\epsilon*u_2](t,x)),$$

и

$$b_{\epsilon,q}(u)(t,x)=b_q([R_\epsilon*u_1](t,x),[R_\epsilon*u_2(t,x)]),\quad q=1,\dots,5.$$

Уравнения (2.36)–(2.39), вместе с уравнениями вида

$$\int\limits_{R^d}h_q(x)u_q(t,x)dx=\mathbf{E}\left[h_q(\xi_{\epsilon,q}(t))\eta_{\epsilon,q}(t)\right],\quad q=1,2 \tag{2.40}$$

образуют замкнутую систему, которая будет будет исследована в другой работе.

Замечание 2.5. В заключение этого параграфа рассмотрим еще один вариант вероятностной модели исходной системы. Рассматривая слагаемое $\nabla\cdot\alpha_2(u_1,u_2)u_1\nabla u_2)$ как неоднородность в уравнении (2.10) мы придем к новой стохастической системе вида (2.27)–(2.30) с

$$m_1^{u_1,u_2}(t,y)=\nabla\alpha_1(\mu,\nu) \tag{2.41}$$

и измененным замыкающим соотношением для u_1

$$u_1(t,y) = \int\limits_{R^d} u_{01}(x) p_1(0,x,t,y)dx$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} \nabla p_1(\theta,z,t,y)\cdot \alpha_2(u_1(\theta,z),u_2(\theta,z))\nabla u_2(\theta,z)dzd\theta.$$

В некоторых случаях это позволит отказаться от необходимости рассматривать регуляризацию исходной системы (1.1) для доказательства существования и единственности решения задачи Коши для этой системы.

В частности, такой подход работает в модели Келлера–Сегеля.

§3. Модель Келлера–Сегеля

Модель Келлера–Сегеля задается системой нелинейных параболических уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla \cdot \Big(\dfrac{1}{2}[\nabla \sigma_1^2 u_1 - \chi u_1(1-u_1)\nabla u_2\Big), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\sigma_2^2 \Delta u_2 + d_{21}u_1 - d_{22}u_2, \\ u_1(0,x) = u_{01}(x), \quad u_2(0,x) = u_{02}(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь σ_q, χ, d_{2q} – положительные константы, u_{0q} – заданные функции, $q = 1,2$. Простота этой системы позволяет воспользоваться схемой построения стохастического аналога этой системы, описанной в последнем замечании предыдущего параграфа.

Рассмотрим стохастические процессы

$$w^1(t) = \xi_{01} + \int\limits_s^t \sigma_1 dw(t), \tag{3.2}$$

$$w^2(t) = \xi_{02} + \sigma_2 w(t), \tag{3.3}$$

$$\eta(t) = 1 - \int\limits_0^t d_{22}\eta(\theta)d\theta, \tag{3.4}$$

где $\xi_{0q} \in R^d$ – независимые случайные величины, не зависящие от $\mathcal{F}_t$ и имеющие распределения с плотностями u_{0q}.

Введем в рассмотрение соотношения

$$u_1(t,y)=\mathbf{E}[u_{01}(w^1_{\xi_0}(t))] - \mathbf{E}\Big[\int_0^t \chi\nabla\cdot[u_1(1-u_1)](\theta,w^1_{\xi_{01}}(\theta))\nabla u_2(\theta,w^1_{\xi_{01}}(\theta))d\theta\Big], \tag{3.5}$$

$$u_2(t,y)=\mathbf{E}[e^{-d_{22}t}u_{02}(w^2_{\xi_{02}}(t))] + \int_0^t \mathbf{E}\left[e^{-d_{22}(t-\theta)}u_1(\theta,w^2_{\xi_{02}}(\theta))\right]d\theta, \tag{3.6}$$

которые вместе с (3.2)–(3.4) позволяют задать стохастический аналог системы (3.1). Однако, система соотношений (3.2)–(3.6) не замкнута. Для замыкания этой системы нам понадобится также выражение, задающее ∇u_2, которое (в отличие от общего случая) можно получить, формально продифференцировав соотношение (3.6). Перепишем соотношения (3.5) и (3.6) в виде

$$G_1(u_1,u_2)(t,\cdot)=\int_{R^d} u_{01}(x)p_1(0,x,t,\cdot)dx - \chi\int_0^t\int_{R^d} p_1(\theta,z,t,\cdot)\nabla\cdot[u_1(1-u_1)](\theta,z)\nabla u_2(\theta,z)dzd\theta, \tag{3.7}$$

$$G_2(u_1,u_2)(t)=e^{-d_{22}t}\int_{R^d} u_{02}(x)p_2(0,x,t,y)dx + \int_0^t\int_{R^d} e^{-d_{22}(t-\theta)}d_{21}u_1(\theta,z)p_2(\theta,z,t,y)dzd\theta. \tag{3.8}$$

Для того, чтобы получить замкнутую систему, продифференцируем соотношение (3.6)

$$\nabla u_2(t,y)=e^{-d_{22}t}\int_{R^d} u_{02}(x)\nabla p_2(0,x,t,y)dx + \int_0^t e^{-d_{22}(t-\theta)}d_{21}u_1(\theta,z)\nabla p_2(\theta,z,t,y)dzd\theta. \tag{3.9}$$

При этом, поскольку $p_2(0,x,t,y) = \frac{1}{(2\pi\sigma_2^2 t)^{\frac{d}{2}}} e^{\frac{-\|y-x\|^2}{2\sigma_2^2 t}}$, то недостающее представление для функции ∇u_2 получим в виде

$$\nabla u_2(t,y) = e^{-d_{22}t} \int\limits_{R^d} \frac{u_{0q}(x)(y-x)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \sigma_2^{d+1} (t-\theta))^{\frac{d+2}{2}}} e^{\frac{-\|y-x\|^2}{2\sigma_2^2(t-\theta)}} dx$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} \frac{e^{d_{22}(t-\theta)}}{(2\pi\sigma_2^2)^{\frac{d}{2}} (t-\theta))^{\frac{d+2}{2}}} \frac{y-z}{\sigma_2^2} e^{\frac{-\|y-z\|^2}{2\sigma_2^2(t-\theta)}} u_1(\theta,z) dz d\theta. \quad (3.10)$$

Рассмотрим линейные отображения

$$V_q u_{0q}(t,y) = \int\limits_{R^d} u_{0q}(x) p_q(0,x,t,y), \quad q = 1,2, \quad (3.11)$$

и заметим, что для них выполняются оценки

$$\|V_q u_{0q}(t)\|_\infty \leqslant \|u_{0q}\|_\infty, \text{ и } \quad \|V_q u_{0q}(t)\|_1 \leqslant \|u_{0q}\|_1, \quad q = 1,2.$$

Обозначим

$$\mathcal{W} = L^1(R^d) \cap L^\infty(R^d) \times W^{1,1}(R^d) \cap W^{1,\infty}(R^d)$$

и пусть $B(0,K) = \{(u_1,u_2) \in \mathcal{W} : \|(u_1,u_2)\|_{B(0,K)} \leqslant K\}$ – шар с центром в нуле и радиусом K в пространстве $\mathcal{W}$ и

$$\|(u_1,u_2)\|_{B(0,K)} = \sup_{t\in[0,T]} \{\|u_1(t) - V_1 u_{01}(t)\|_1$$
$$+ \|u_1(t) - V_1 u_{01}(t)\|_\infty + \|u_2(t) - e^{-d_{22}t} V_2 u_{02}(t)\|_1$$
$$+ \|u_2(t) - e^{-d_{22}t} V_2 u_{02}(t)\|_\infty + \|\nabla u_2(t) - \nabla(e^{-d_{22}t} V_2 u_{02}(t))\|_1$$
$$+ \|\nabla u_2(t) - \nabla(e^{-d_{22}t} V_2 u_{02}(t))\|_\infty\}.$$

Покажем, что множество $B(0,K)$ инвариантно относительно действия отображения $G = (G_1, G_2)$, где G_q, $q = 1,2$, заданы соотношениями (3.7), (3.8) и G является сжимающим отображением.

В дальнейшем символом C мы будем обозначать положительную константу, которая может изменяться при переходе от одного неравенства к другому. Если нужно указать зависимость этой константы от параметра κ, мы будем использовать обозначение $C(\kappa)$.

Теорема 3.1. *Пусть* $(u_{01}, u_{02}) \in B(0,K)$. *Тогда существует* $T > 0$, *для которого существует единственное решение*

$$(u_1, u_2) \in C([0,T]; B(0,K))$$

задачи (3.5), (3.6).

Доказательство. Покажем, что отображение G является сжимающим отображением. Поскольку все необходимые для этого оценки выводятся аналогично, мы приведем подробный вывод лишь для двух из них, нужных для доказательства инвариантности $B(0,K)$) относительно G и проверки того, что G является сжатием.

Пусть $(u_{01},u_{02})\in B(0,K)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\|G_1(u_1,u_2)(t)-V_1u_{01}(t)\|_1\\
&\leqslant \chi\int\limits_0^t \|\nabla p_1(\theta,z,t,\cdot)\|_1\|[u_1(1-u_1)\nabla u_2](\theta)\|_1 d\theta\\
&\leqslant \int\limits_0^t C(t-\theta)^{-\frac12}\|\nabla u_2(\theta)\|_1\left[\|u_1(\theta)\|_\infty+\|u_1(\theta)\|_\infty^2\right]d\theta\\
&\leqslant \int\limits_0^t C(t-\theta)^{-\frac12}\left[(\|\nabla(e^{t-\theta}V_1u_{02})(\theta)\|_1+K)\right.\\
&\times(\|V_1(\theta)u_{01}\|_\infty+K)(\|V_2u_{01}(\theta)\|_\infty+K+1)\left.\right]d\theta\\
&\leqslant C(K,\|u_{01}\|_\infty,\|\nabla u_{02}\|_1)t^{\frac{t}{2}}.
\end{aligned}$$

Аналогично выводятся оценки

$$\|G_1(u_1,u_2)(t)-V_1u_{01}(t)\|_\infty\leqslant C(K,\|u_{01}\|_\infty,\|\nabla u_{02}\|_\infty)t^{\frac12},$$
$$\|G_1(u_1,u_2)(t)-V_1u_{01}(t)\|_\infty\leqslant C(K,\|u_{01}\|_1)(1-e^{-d_{21}t}),$$
$$\|G_1(u_1,u_2)(t)-V_1u_{01}(t)\|_\infty\leqslant C(K,\|u_1\|_\infty)(1-e^{-d_{21}t}).$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
&\|\nabla[G_2(u_1,u_2)(t)-e^{-d_{21}t}V_{02}u_{02}(t)]\|_1\\
&\leqslant\int\limits_0^t e^{-(t-\theta)}\|\nabla(V_1u_1(\theta))\|_1 d\theta\\
&\leqslant\int\limits_0^t e^{-(t-\theta)}(t-\theta)^{-\frac12}\|u_1(\theta)\|_1 d\theta\leqslant C(K,\|u_{01}\|_1)t^{\frac12}
\end{aligned}$$

и

$$\|\nabla G_2 - e^{-d_{21}t}u_{02}\|_\infty \leqslant C(K, \|u_{01}\|_\infty)t^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, для заданных $(u_{01}, u_{02}) \in B(0, K)$

$$\|G(u_1, u_2)\|_{B(0,K)} \leqslant CT^{\frac{1}{2}}$$

где $C = C(K, \|u_{01}\|_1, \|u_{01}\|_\infty, \|\nabla u_{02}\|_1, \|\nabla u_{02}\|_\infty)$ и $G(u_1, u_2) \in B(0, K)$ для достаточно малых T.

Проверим, что G является сжимающим отображением на $B(0, K)$. Оценим разность

$$\|G_1(u_1, u_2)(t) - G_1(u_1^1, u_2^1)(t)\|_1 \leqslant \|\nabla V_1[u_1(1-u_1)\nabla u_2$$
$$- u_1^1(1-u_1^1)\nabla u_2^1]\|_1 d\theta \leqslant \int\limits_0^t (t-\theta)^{-\frac{1}{2}} \| \, [u_1(1-u_1)\nabla u_2$$
$$-u_1^1(1-u_1^1)\nabla u_2^1 + u_1\nabla u_2 + u_1^1\nabla u_2(u_1^1 + (1-u_1))$$
$$-u_1^1\nabla u_1(u_1^1 + (1-u_1))\big] \, \|_1(\theta)d\theta$$
$$\leqslant \int\limits_0^t (t-\theta)^{-\frac{1}{2}} \| \, \big[\|(1-u_1)\nabla u_2\|_\infty \|u_1 - u_1^1\|_1 + [\|u_1^1\|_\infty$$
$$+\|(u_1^1)^2\|_\infty]\|[\nabla u_2 - \nabla u_2^1]\|_1 + \|u_1^1\nabla u_2\|_\infty \|[u_1 - u_1^1](\theta)\|_1\big] \, d\theta$$
$$\leqslant CT^{\frac{1}{2}}(\sup_{t\in[0,T]} \|[u_1 - u_1^1](t)\|_1 + \sup_{t\in[0,T]} \|[\nabla u_2 - \nabla u_2^1](t)\|_1,$$

где $C = C(K, \|u_1\|_\infty, \|u_1^1\|_\infty, \|\nabla u_2\|_\infty, \|\nabla u_2^1\|_\infty)$. Аналогично можно показать, что

$$\|G_1(u_1, u_2)(t) - G_1(u_1^1, u_2^1)(t)\|_\infty$$
$$\leqslant CT^{\frac{1}{2}}(\sup_{t\in[0,T]} \|[u_1 - u_1^1](t)\|_\infty + \sup_{t\in[0,T]} \|[\nabla u_2 - \nabla u_2^1](t)\|_\infty,$$

где $C = C(K, \|u_1\|_\infty, \|u_1^1\|_\infty, \|\nabla u_2\|_\infty, \|\nabla u_2^1\|_\infty)$. Соответствующие оценки для G_2 имеют вид

$$\|G_2(u_1, u_2)(t) - G_2(u_1^1, u_2^1)(t)\|_1 \leqslant C(1 - e^{-T}) \sup_{t\in[0,T]} \|[u_1 - u_1^1](t)\|_1,$$

$$\|G_2(u_1, u_2)(t) - G_2(u_1^1, u_2^1)(t)\|_\infty \leqslant C(1 - e^{-T}) \sup_{t\in[0,T]} \|[u_1 - u_1^1](t)\|_\infty,$$

$$\|\nabla(G_2(u_1, u_2)(t) - G_2(u_1^1, u_2^1)(t))\|_1 \leqslant CT^{\frac{1}{2}} \sup_{t\in[0,T]} \|[u_1 - u_1^1](t)\|_1,$$

$$\|\nabla(G_2(u_1,u_2)(t) - G_2(u_1^1,u_2^1)(t))\|_\infty \leqslant CT^{\frac{1}{2}} \sup_{t\in[0,T]} \|[u_1 - u_1^1](t)\|_\infty.$$

Таким образом, если T достаточно мало, то справедливо неравенство

$$\|G(u_1,u_2) - G(u_1^1,u_2^1)\|_{B(0,K)} \leqslant \gamma\|(u_1,u_2) - (u_1^1,u_2^1)\|_{B(0,K)},$$

где $0 < \gamma < 1$, откуда следует, что отображение G – это сжимающее отображение. □

Используя полученные результаты, можно доказать существование и единственность глобального решения задачи (3.1).

Теорема 3.2. *Пусть $u_{01}, u_{02} \in \mathcal{W}$ и $0 < u_{01} < 1$. Тогда существует единственное слабое решение задачи* (3.1)*, определенное для всех $t \in [0,\infty)$ и принадлежащее $\mathcal{W}$.*

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что существует единственное слабое решение задачи (3.1), определенное на $(0,T)$ при некотором T. Предположим, что утверждение теоремы неверно и существует максимальное время $T_{\max}$, на котором существует решение (u_1,u_2). Тогда $\|(u_1,u_2)\|_{B(0,K)}$ должна стремиться к ∞ при $t \to T_{\max}$. Но из легко проверяемого закона сохранения

$$\int\limits_{R^d} u_1(t,y)dy = \int\limits_{R^d} u_{01}(y)dy$$

и того факта, что $\rho \equiv 0$ и $\rho \equiv 1$ яаляются суб и супер-решениями (3.1), вытекает, что $u_1(t)$ равномерно ограничено в $L^1(R^d) \cap L^\infty(R^d)$. Соответствующие оценки для $u_2(t)$ немедленно следуют из (3.6) и, следовательно, $u_2(t)$ определено глобально по времени. Используя далее L^∞-оценки u_1 и соотношение (3.10) можно показать, что для любого конечного момента времени ограничены также величины $\|\nabla u_2\|_{L^\infty}$ и $\|\nabla u_2\|_{L_1}$. Следовательно такое $T_{\max}$ существовать не может. □

Список литературы

1. B. Perthame, *PDE models for chemotactic movements: parabolic, hyperbolic and kinetic.* — Appl. Math. **49**, No. 6 (2004), 539–564.
2. L. Corrias, M. Escobedo, J. Matos, *Existence, uniqueness and asymptotic behaviour of the solutions to the fully parabolic Keller–Segel system in the plane.* — J. Differential Equations **257**, No. 6 (2014), 1840–1878.
3. X. Chen, E. S. Daus, A. Jüngel, *Global existence analysis of cross-diffusion population systems for multiple species.* — Arch. Rational Mech. Anal. **227** (2018), 715–747.

4. J. Fontbona, S. Meleard, *Non local Lotka–Volterra system with cross-diffusion in an heterogeneous medium.* — J. Math. Biology **70** No. 4 (2015), 829–854.
5. G. Galiano, V.Selgas, *On a cross-diffusion segregation problem arising from a model of interacting particles.* — Nonlinear Anal., Real World Appl. **18** (2014), 34–49.
6. D. Talay, M. Tomasevic, *A new McKean–Vlasov stochastic interpretation of the parabolic-parabolic Keller–Segel model: The one-dimensional case.* 2018. — `hal-01673332v5`
7. Я. И. Белопольская, *Стохастическая интерпретация квазилинейных параболических систем с кросс-диффузией.* — Теория вероятн. и ее примен. **61**, No. 2 (2016), 268–299.
8. Ya. Belopolskaya, *Probabilistic representation of the Cauchy problem solutions for systems of nonlinear parabolic equations.* — Global Stoch. Anal. **3**, No. 1 (2016), 25–32.
9. Я.И. Белопольская, А.О. Степанова, *Стохастическая интерпретация системы МГД-Бюргерс.*— Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 7–29.
10. A. Le Cavil, N. Oudjane, F. Russo, *Forward Feynman–Kac type representation for semilinear nonconservative partial differential equations,* preprint (2017), `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01353757v3/document.`
11. A. Le Cavil, N. Oudjane, F. Russo, *Monte-Carlo algorithms for a forward Feynman–Kac type representation for semilinear nonconservative partial differential equations.* — Monte Carlo Methods Appl., **24**, No. 1 (2018), 55–70.
12. E. F. Keller, L. A. Segel, I*nitiation of slime mold aggregation viewed as an instability,* — J. Theoret. Biol. **26** (1970), 399–415.

Belopolskaya Ya. I. Stochastic models of chemotaxis processes.

We construct a probabilistic representation of the Cauchy problem generalized solutions for a class of systems of parabolic equations with cross-diffusion which generalize the Keller–Segel system.

С.-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
ул. 2-я Красноармейская 4,
190005 С.-Петербург;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. Фонтанки 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: `yana@yb1569.spb.edu`

Поступило 6 ноября 2018 г.