Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 473, 2018 г.

В. Б. Матвеев, А. О. Смирнов

ДВУХФАЗНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ИЗ АКНС ИЕРАРХИИ

Посвящается Михаилу Арсеньевичу Семенову-Тян-Шаньскому в связи с его 70 летием

Введение

В этой работе исследуются строго периодические по x алгебро-геометрических решения. рода 2 АКНС иерархии. В общем положении решения рода 2 АКНС иерархии выражаются через 2-мерные тета функции Римана и являются условно-периодическими функциями от пространственной и временной переменных x и t. В данной работе мы строим подкласс таких решений строго периодических по переменной x особенно интересных с точки зрения приложений в нелинейной оптике и гидродинамике. Их выделение из общих решений достигается за счет подходящей специализации спектральных кривых имеющих структуру накрытия над эллиптической кривой. Эта работа является дальнейшим развитием наших предшествующих работ [1–3], в которых исследовались рациональные и квазирациональные решения, удовлетворяющие условиям типа конечной плотности на бесконечности. Результаты настоящей работы иллюстрируют тот факт, что решения с малым числом фаз различных решений уравнений иерархии АКНС незначительно отличаются друг от друга. Вместе с тем можно подобрать параметры решения и так чтобы решения смешанного уравнения АКНС существенно отличалось от решений низших уравнений иерархии.

Работа включает следующие основные разделы. В первом разделе дано краткое описание уравнений иерархии АКНС и её редуцированной формы - иерархии РАКНС. Во втором разделе приведены общие конечнозонные решения уравнений иерархий АКНС и РАКНС в удобной для нас форме. В третьем разделе мы указываем специализацию

Ключевые слова: иерархия АКНС, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Хироты, тэта-функции, спектральные кривые.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 16-01-00518.

гиперэллиптической спектральной кривой рода 2, соответствующую периодическим по двухфазным решениям. Эти решения в общем случае не являются периодическими функциями от t. Вместе с тем, при подходящем выборе параметров кривой ($\lambda_0 = 0$), для уравнений иерархии АКНС с нечетными номерами, эти решения становятся периодическими также и по временам t_{2k-1}, $k = 1, 2, \ldots$. Для уравнений с четными номерами тех же иерархий данные решения представляют собой периодические бегущие волны. Более подробно особенности двухфазных решений исследуются в последнем разделе.

§1. Интегрируемые уравнения из АКНС и РАКНС иерархий

Нелинейные эволюционные уравнения из АКНС иерархии могут быть получены из условий совместности

$$(\Psi_x)_{t_k} = (\Psi_{t_k})_x \tag{1}$$

следующей системы матричных линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \Psi_x = \mathfrak{U}\Psi, \\ \Psi_{t_k} = \mathfrak{V}_k\Psi, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\mathfrak{U} := \lambda J + \mathfrak{U}^0, \quad \mathfrak{V}_1 := 2\lambda\mathfrak{U} + \mathfrak{V}_1^0, \quad \mathfrak{V}_{k+1} := 2\lambda\mathfrak{V}_k + \mathfrak{V}_{k+1}^0, \quad k \geqslant 1$$

$$J := \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{U}^0 := \begin{pmatrix} 0 & ip \\ -iq & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{V}_k^0 = \begin{pmatrix} -i^k F_k(p,q) & i^{k-1} H_k(p,q) \\ i^{k-1} G_k(p,q) & i^k F_k(p,q) \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (1) вытекают следующие рекуррентные соотношения на функции $F_k(p,q)$, $H_k(p,q)$ и $G_k(p,q)$

$$\begin{aligned} H_1(p,q) &= -p_x, \quad G_1(p,q) = -q_x, \\ (F_k(p,q))_x &= -pG_k(p,q) - qH_k(p,q), \\ H_{k+1}(p,q) &= 2pF_k(p,q) + (H_k(p,q))_x\,, \\ G_{k+1}(p,q) &= -2qF_k(p,q) - (G_k(p,q))_x\,. \end{aligned}$$

В частности,

$$F_1(p,q) = pq, \quad H_2(p,q) = 2p^2q - p_{xx},$$

$$
\begin{aligned}
G_2(p,q) &= -2q^2p + q_{xx}, \quad F_2(p,q) = p_xq - pq_x,\\
H_3(p,q) &= 6pqp_x - p_{xxx}, \quad G_3(p,q) = 6pqq_x - q_{xxx},\\
F_3(p,q) &= pq_{xx} + qp_{xx} - p_xq_x - 3p^2q^2,\\
H_4(p,q) &= -6p^3q^2 + 6qp_x^2 + 4pp_xq_x + 8pqp_{xx} + 2p^2q_{xx} - p_{xxxx},\\
G_4(p,q) &= 6p^2q^3 - 6pq_x^2 - 4qp_xq_x - 8pqq_{xx} - 2q^2p_{xx} + q_{xxxx},\\
F_4(p,q) &= -6pq^2p_x + 6p^2qq_x - q_xp_{xx} + p_xq_{xx} + qp_{xxx} - pq_{xxx},\\
H_5(p,q) &= -30p^2q^2p_x + 10p_x^2q_x + 20qp_xp_{xx} + 10pq_xp_{xx}\\
&\quad + 10pp_xq_{xx} + 10pqp_{xxx} - p_{xxxxx},\\
G_5(p,q) &= -30p^2q^2q_x + 10p_xq_x^2 + 10qq_xp_{xx} + 10qp_xq_{xx}\\
&\quad + 20pq_xq_{xx} + 10pqq_{xxx} - q_{xxxxx},\\
F_5(p,q) &= 10p^3q^3 - 5q^2p_x^2 - 5p^2q_x^2 - 10pq^2p_{xx} - 10p^2qq_{xx} + p_{xx}q_{xx}\\
&\quad - q_xp_{xxx} - p_xq_{xxx} + qp_{xxxx} + pq_{xxxx},\\
H_6(p,q) &= 20p^4q^3 - 70pq^2p_x^2 - 60p^2qp_xq_x - 10p^3q_x^2 - 50p^2q^2p_{xx}\\
&\quad + 50p_xq_xp_{xx} + 20qp_{xx}^2 - 20p^3qq_{xx} + 20p_x^2q_{xx} + 22pp_{xx}q_{xx}\\
&\quad + 30qp_xp_{xxx} + 18pq_xp_{xxx} + 8pp_xq_{xxx} + 12pqp_{xxxx}\\
&\quad + 2p^2q_{xxxx} - p_{xxxxxx},\\
G_6(p,q) &= -20p^3q^4 + 10q^3p_x^2 + 60pq^2p_xq_x + 70p^2qq_x^2 + 20pq^3p_{xx}\\
&\quad - 20q_x^2p_{xx} + 50p^2q^2q_{xx} - 50p_xq_xq_{xx} - 22qp_{xx}q_{xx}\\
&\quad - 20pq_{xx}^2 - 8qq_xp_{xxx} - 18qp_xq_{xxx} - 30pq_xq_{xxx}\\
&\quad - 2q^2p_{xxxx} - 12pqq_{xxxx} + q_{xxxxxx},\\
F_6(p,q) &= 30p^2q^3p_x - 30p^3q^2q_x - 10qp_x^2q_x + 10pp_xq_x^2 - 20q^2p_xp_{xx}\\
&\quad + 10pqq_xp_{xx} - 10pqp_xq_{xx} + 20p^2q_xq_{xx} - 10pq^2p_{xxx}\\
&\quad + q_{xx}p_{xxx} + 10p^2qq_{xxx} - p_{xx}q_{xxx} - q_xp_{xxxx}\\
&\quad + p_xq_{xxxx} + qp_{xxxxx} - pq_{xxxxx},\\
H_7(p,q) &= 140p^3q^3p_x - 70q^2p_x^3 - 280pqp_x^2q_x - 70p^2p_xq_x^2 - 280pq^2p_xp_{xx}\\
&\quad - 140p^2qq_xp_{xx} + 70q_xp_{xx}^2 - 140p^2qp_xq_{xx} + 112p_xp_{xx}q_{xx}\\
&\quad - 70p^2q^2p_{xxx} + 98p_xq_xp_{xxx} + 70qp_{xx}p_{xxx} + 42pq_{xx}p_{xxx}\\
&\quad + 28p_x^2q_{xxx} + 28pp_{xx}q_{xxx} + 42qp_xp_{xxxx} + 28pq_xp_{xxxx}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 14pp_xq_{xxxx} + 14pqp_{xxxxx} - p_{xxxxxxx},\\
G_7(p,q) &= 140p^3q^3q_x - 70q^2p_x^2q_x - 280pqp_xq_x^2 - 70p^2q_x^3 - 140pq^2q_xp_{xx}\\
&- 140pq^2p_xq_{xx} - 280p^2qq_xq_{xx} + 112q_xp_{xx}q_{xx} + 70p_xq_{xx}^2\\
&+ 28q_x^2p_{xxx} + 28qq_{xx}p_{xxx} - 70p^2q^2q_{xxx} + 98p_xq_xq_{xxx}\\
&+ 42qp_{xx}q_{xxx} + 70pq_{xx}q_{xxx} + 14qq_xp_{xxxx} + 28qp_xq_{xxxx}\\
&+ 42pq_xq_{xxxx} + 14pqq_{xxxxx} - q_{xxxxxxx},\\
F_7(p,q) &= -35p^4q^4 + 70pq^3p_x^2 + 70p^2q^2p_xq_x + 70p^3qq_x^2 + 21p_x^2q_x^2\\
&+ 70p^2q^3p_{xx} - 28qp_xq_xp_{xx} - 14pq_x^2p_{xx} - 21q^2p_{xx}^2 + 70p^3q^2q_{xx}\\
&- 14qp_x^2q_{xx} - 28pp_xq_xq_{xx} - 56pqp_{xx}q_{xx} - 21p^2q_{xx}^2 - 28q^2p_xp_{xxx}\\
&- 14pqq_xp_{xxx} - 14pqp_xq_{xxx} - 28p^2q_xq_{xxx} - p_{xxx}q_{xxx}\\
&- 14pq^2p_{xxxx} + q_{xx}p_{xxxx} - 14p^2qq_{xxxx} + p_{xx}q_{xxxx}\\
&- q_xp_{xxxxx} - p_xq_{xxxxx} + qp_{xxxxxx} + pq_{xxxxxx},\\
H_8(p,q) &= -70p^5q^4 + 560p^2q^3p_x^2 + 560p^3q^2p_xq_x - 420qp_x^3q_x + 140p^4qq_x^2\\
&- 378pp_x^2q_x^2 + 280p^3q^3p_{xx} - 490q^2p_x^2p_{xx} - 1456pqp_xq_xp_{xx}\\
&- 238p^2q_x^2p_{xx} - 322pq^2p_{xx}^2 + 140p^4q^2q_{xx} - 588pqp_x^2q_{xx}\\
&- 336p^2p_xq_xq_{xx} - 392p^2qp_{xx}q_{xx} + 182p_{xx}^2q_{xx} - 42p^3q_{xx}^2\\
&- 476pq^2p_xp_{xxx} - 308p^2qq_xp_{xxx} + 308q_xp_{xx}p_{xxx} + 252p_xq_{xx}p_{xxx}\\
&+ 70qp_{xxx}^2 - 168p^2qp_xq_{xxx} - 56p^3q_xq_{xxx} + 196p_xp_{xx}q_{xxx}\\
&+ 68pp_{xxx}q_{xxx} - 98p^2q^2p_{xxxx} + 168p_xq_xp_{xxxx} + 112qp_{xx}p_{xxxx}\\
&+ 72pq_{xx}p_{xxxx} - 28p^3qq_{xxxx} + 42p_x^2q_{xxxx} + 44pp_{xx}q_{xxxx}\\
&+ 56qp_xp_{xxxxx} + 40pq_xp_{xxxxx} + 12pp_xq_{xxxxx} + 16pqp_{xxxxxx}\\
&+ 2p^2q_{xxxxxx} - p_{xxxxxxxx},\\
G_8(p,q) &= 70p^4q^5 - 140pq^4p_x^2 - 560p^2q^3p_xq_x - 560p^3q^2q_x^2 + 378qp_x^2q_x^2\\
&+ 420pp_xq_x^3 - 140p^2q^4p_{xx} + 336q^2p_xq_xp_{xx} + 588pqq_x^2p_{xx}\\
&+ 42q^3p_{xx}^2 - 280p^3q^3q_{xx} + 238q^2p_x^2q_{xx} + 1456pqp_xq_xq_{xx}\\
&+ 490p^2q_x^2q_{xx} + 392pq^2p_{xx}q_{xx} + 322p^2qq_{xx}^2 - 182p_{xx}q_{xx}^2\\
&+ 56q^3p_xp_{xxx} + 168pq^2q_xp_{xxx} - 196q_xq_{xx}p_{xxx} + 308pq^2p_xq_{xxx}\\
&+ 476p^2qq_xq_{xxx} - 252q_xp_{xx}q_{xxx} - 308p_xq_{xx}q_{xxx}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 68qp_{xxx}q_{xxx} - 70pq_{xxx}^2 + 28pq^3p_{xxxx} - 42q_x^2p_{xxxx}\\
&- 44qq_{xx}p_{xxxx} + 98p^2q^2q_{xxxx} - 168p_xq_xq_{xxxx} - 72qp_{xx}q_{xxxx}\\
&- 112pq_{xx}q_{xxxx} - 12qq_xp_{xxxxx} - 40qp_xq_{xxxxx} - 56pq_xq_{xxxxx}\\
&- 2q^2p_{xxxxxx} - 16pqq_{xxxxxx} + q_{xxxxxxxx}.
\end{aligned}
$$

Нетрудно показать, что функции $F_k(p,q)$, $H_k(p,q)$ и $G_k(p,q)$ обладают следующими свойствами

$$
\begin{gathered}
F_k(q,p) = (-1)^{k-1}F_k(p,q), \quad F_k(-p,-q) = F_k(p,q),\\
G_{k+1}(p,q) = (-1)^kH_{k+1}(q,p), \quad H_{k+1}(-p,-q) = -H_{k+1}(p,q).
\end{gathered} \tag{3}
$$

Следствием условий совместности (1) также являются интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения АКНС иерархии, которые имеют вид

$$
p_{t_k} = -i^kH_{k+1}(p,q), \quad q_{t_k} = -i^kG_{k+1}(p,q)
$$

или

$$
p_{t_k} + i^kH_{k+1}(p,q) = 0, \quad q_{t_k} + (-i)^kH_{k+1}(q,p) = 0. \tag{4}
$$

Из (3) следует, что редукциями $q = \pm p^*$ из спаренных уравнений АКНС иерархии (4) можно получать уравнения редуцированных АКНС (РАКНС) иерархий

$$
p_{t_k} + i^kH_{k+1}(p,p^*) = 0, \tag{5}
$$

$$
p_{t_k} + i^kH_{k+1}(p,-p^*) = 0. \tag{6}
$$

Первым членом АКНС иерархии (4) является спаренное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ):

$$
\begin{cases}
ip_{t_1} + p_{xx} - 2p^2q = 0,\\
-iq_{t_1} + q_{xx} - 2q^2p = 0,
\end{cases}
$$

а первым членом РАКНС иерархии (6) – фокусирующее НУШ:

$$
ip_{t_1} + p_{xx} + 2|p|^2p = 0. \tag{7}
$$

Второй член АКНС иерархии (4) – модифицированное спаренное уравнение КдФ (мКдФ):

$$
\begin{cases}
p_{t_2} + p_{xxx} - 6pqp_x = 0,\\
q_{t_2} + q_{xxx} - 6pqq_x = 0.
\end{cases}
$$

Его редуцированной формой (6) является (комплексное) уравнение мКдФ

$$p_{t_2} + p_{xxx} + 6|p|^2 p_x = 0. \qquad (8)$$

Следующее спаренное уравнение АКНС иерархии имеет вид:

$$\begin{cases} ip_{t_3} - p_{xxxx} + 8pqp_{xx} + 2p^2 q_{xx} + 6p_x^2 q + 4pp_x q_x - 6p^3 q^2 = 0, \\ -iq_{t_3} - q_{xxxx} + 8pqq_{xx} + 2q^2 p_{xx} + 6pq_x^2 + 4qp_x q_x - 6p^2 q^3 = 0. \end{cases}$$

Его редуцированная форма при $t_3 = -t$ и $q = -p^*$ является хорошо известным уравнением Лакшманана-Порсециана-Даниеля (ЛПД) [5–7]:

$$ip_t + p_{xxxx} + 8|p|^2 p_{xx} + 2p^2 p^*_{xx} + 6p_x^2 p^* + 4p|p_x|^2 + 6|p|^4 p = 0. \qquad (9)$$

Следующие уравнения РАКНС иерархии для $q = -p^*$, $t_4 = -t$, $t_5 = t$, $t_6 = t$, $t_7 = -t$ имеют вид

$$p_t + p_{xxxxx} + 10|p|^2 p_{xxx} + 20p_{xx} p_x p^* + 10(|p_x|^2 p)_x + 30|p|^4 p_x = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} ip_t &+ p_{xxxxxx} + 12|p|^2 p_{xxxx} + 2p^2 p^*_{xxxx} + 30p_{xxx} p_x p^* + 18p_{xxx} pp^*_x + 8p_x pp^*_{xxx} \\ &+ 50p_{xx}|p_x|^2 + 50p_{xx}|p|^4 + 20p_{xx}^2 p^* + 22|p_{xx}|^2 p + 20p_x^2 p^*_{xx} + 20|p|^2 p^2 p^*_{xx} \\ &+ 10p^3 (p^*_x)^2 + 70p_x^2 |p|^2 p^* + 60|p|^2 |p_x|^2 p + 20|p|^6 p = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} p_t &+ p_{xxxxxxx} + 14\,|p|^2\, p_{xxxxx} + 42p^* p_x p_{xxxx} + 28pp^*_x p_{xxxx} \\ &+ 14pp_x p^*_{xxxx} + 70\,|p|^4\, p_{xxx} + 98\,|p_x|^2\, p_{xxx} + 70p^* p_{xx} p_{xxx} \\ &+ 42pp^*_{xx} p_{xxx} + 28p_x^2 p^*_{xxx} + 28pp_{xx} p^*_{xxx} + 280p^*\,|p|^2\, p_x p_{xx} \\ &+ 140\,|p|^2\, pp^*_x p_{xx} + 140\,|p|^2\, pp_x p^*_{xx} + 70p^*_x p_{xx}^2 + 112p_x\,|p_{xx}|^2 \\ &+ 70(p^*)^2 p_x^3 + 280\,|p|^2\,|p_x|^2\, p_x + 70p^2\,|p_x|^2\, p^*_x + 140\,|p|^6\, p_x = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

и

$$\begin{aligned} ip_t &+ p_{xxxxxxxx} + 16\,|p|^2\, p_{xxxxxx} + 2p^2 p^*_{xxxxxx} + 56p^* p_x p_{xxxxx} \\ &+ 40pp^*_x p_{xxxxx} + 12pp_x p^*_{xxxxx} + 98\,|p|^4\, p_{xxxx} + 168\,|p_x|^2\, p_{xxxx} \\ &+ 112p^* p_{xx} p_{xxxx} + 72pp^*_{xx} p_{xxxx} + 28p^2\,|p|^2\, p^*_{xxxx} + 42p_x^2 p^*_{xxxx} \\ &+ 44pp_{xx} p^*_{xxxx} + 68pp_{xxx} p^*_{xxx} + 476\,|p|^2\, p^* p_x p_{xxx} + 252p_x p^*_{xx} p_{xxx} \\ &+ 308p\,|p|^2\, p^*_x p_{xxx} + 308p^*_x p_{xx} p_{xxx} + 70p^* p_{xxx}^2 + 196p_x p_{xx} p^*_{xxx} \\ &+ 168p\,|p|^2\, p_x p^*_{xxx} + 56p^3 p^*_x p^*_{xxx} + 280\,|p|^6\, p_{xx} + 1456\,|p|^2\,|p_x|^2\, p_{xx} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 490(p^*)^2 p_x^2 p_{xx} + 238 p^2 (p_x^*)^2 p_{xx} + 588\,|p|^2\, p_x^2 p_{xx}^* + 336 p^2\,|p_x|^2\, p_{xx}^* \\
&+ 140\,|p|^4\, p^2 p_{xx}^* + 42 p^3 (p_{xx}^*)^2 + 392\,|p|^2\, p\,|p_{xx}|^2 + 322\,|p|^2\, p^* p_{xx}^2 \\
&+ 182 p_{xx}^2 p_{xx}^* + 560\,|p|^4\, p^* p_x^2 + 560\,|p|^4\, p\,|p_x|^2 + 420 p^* p_x^2\,|p_x|^2 \\
&+ 140 p^3\,|p|^2\,(p_x^*)^2 + 378\,|p_x|^4\, p + 70\,|p|^8\, p = 0. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Ключевым свойством рассмотренных уравнений является существование функций

$$\mathfrak{p}(x, t_1, \ldots, t_k, \ldots), p(x, t_1, \ldots, t_k, \ldots)$$

удовлетворяющих всем уравнениям АКНС и соответственно РАКНС иерархии одновременно. Это обстоятельство позволяет увеличить количество интегрируемых моделей за счет подстановки переменной t сразу в несколько фаз t_j одновременно. Например, интегрируемое уравнение Хироты имеет вид [8–12]:

$$ip_t - \gamma_1 H_2(p, -p^*) + i\gamma_2 H_3(p, -p^*) = 0, \quad \gamma_j \in \mathbb{R}. \qquad (14)$$

Очевидно, что это уравнение имеет решение в виде $p(x, \gamma_1 t, -\gamma_2 t, \ldots, t_k)$, где $p(x, t_1, t_2, \ldots, t_k)$ – произвольное решение уравнений РАКНС иерархии (6). В работах [13–15] исследуются решения более сложного “смешанного” уравнения РАКНС иерархии (6)

$$ip_t - \gamma_1 H_2(p, -p^*) + i\gamma_2 H_3(p, -p^*) - \gamma_3 H_4(p, -p^*) = 0, \qquad (15)$$

с решением вида $\mathfrak{p}(x, \gamma_1 t, -\gamma_2 t, -\gamma_3 t, \ldots, t_k)$. Естественно, следующие по сложности смешанные модели описываются уравнениями

$$ip_t - \gamma_1 H_2(p, -p^*) + i\gamma_2 H_3(p, -p^*) - \gamma_3 H_4(p, -p^*) + i\gamma_4 H_5(p, -p^*) = 0, \qquad (16)$$

и

$$
\begin{aligned}
&ip_t - \gamma_1 H_2(p, -p^*) + i\gamma_2 H_3(p, -p^*) - \gamma_3 H_4(p, -p^*) \\
&\qquad + i\gamma_4 H_5(p, -p^*) - \gamma_5 H_6(p, -p^*) = 0, \qquad (17)
\end{aligned}
$$

и уже появились публикации [16–18], в которых исследуются их решения. Нетрудно видеть, что уравнения (14)-(17) являются частными случаями общего смешанного уравнения

$$ip_t + \sum_{k\geq 1} i^{k+1} \gamma_k H_{k+1}(p, -p^*) = 0, \qquad (18)$$

решения которого имеют вид $p(x, \gamma_1 t, \gamma_2 t, \gamma_3 t, \ldots)$.

Следующим шагом по пути усложнения модели является введение зависимости коэффициентов уравнения от времени [1, 19]. Легко видеть, что функция $p(x, \gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t), \ldots)$ удовлетворяет уравнению

$$p_t = \sum_{k\geq 1} p_{t_k} \gamma_k'(t),$$

или

$$ip_t + \sum_{k\geq 1} i^{k+1}\gamma_k'(t) H_{k+1}(p, -p^*) = 0. \tag{19}$$

Класс смешанных уравнений (19), при выборе $f_k(t) = t\gamma_k$, редуцируется к менее общим уравнениям (18).

Следует отметить, что для иерархии КдВ аналогичный класс "смешанных"уравнений был впервые введен ещё в 1971 году, в последней строке основополагающей работы Захарова и Фаддеева [4]. Эта строка работы [4] содержит обобщение иерархии КдВ, аналогичное обобщению РАКНС иерархии описываемому уравнением (19).

§2. Конечнозонные решения уравнений из АКНС иерархии

Мы используем хорошо известный метод [20–24] построения конечнозонных решений из АКНС и РАКНС иерархии (6). Эти решения параметризуются гиперэллиптической кривой $\Gamma = \{(w, \lambda)\}$ рода g:

$$\Gamma : \quad w^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_j).$$

Точки ветвления ($\lambda = \lambda_j$, $j = 1, \ldots, 2g + 2$) этой кривой являются краями зон непрерывного спектра оператора Дирака

$$\Psi_x = \mathfrak{U}\Psi.$$

Бесконечно удаленной точке спектра соответствуют две точки $\mathcal{P}_\infty^\pm$ кривой Γ. При выполнении условия $q = -p^*$ уравнение кривой Γ имеет вид

$$\Gamma : \quad w^2 = \prod_{j=1}^{g+1}(\lambda - \lambda_j)(\lambda - \lambda_j^*), \quad \mathrm{Im}\lambda_j \neq 0. \tag{20}$$

Следуя стандартной процедуре построения конечнозонных решений [21, 25] выберем на кривой Γ канонический базис циклов $\gamma^t =$

$(a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g)$ с матрицей индексов пересечения

$$C_0=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}.$$

Условие $q=-p^*$ приводит [21,25] к тому, что базис циклов удовлетворяет следующему условию:

$$\widehat{\tau}_1\mathbf{a}=-\mathbf{a},\quad \widehat{\tau}_1\mathbf{b}=\mathbf{b}+K\mathbf{a}, \tag{21}$$

где τ_1 есть антиголоморфная инволюция

$$\tau_1:(w,\lambda)\to(w^*,\lambda^*).$$

Каноническому базису циклов соответствует нормированный базис голоморфных дифференциалов $d\mathcal{U}_j$:

$$\oint_{a_k} d\mathcal{U}_j=\delta_{kj},\quad k,j=1,\ldots,g. \tag{22}$$

Хорошо известно [26–29],

что матрица B периодов кривой Γ,

$$B_{kj}=\oint_{b_k} d\mathcal{U}_j,\quad k,j=1,\ldots,g, \tag{23}$$

симметрична, а её мнимая часть $\mathrm{Im}B$ положительно определена.

Следуя [26,29,30], определим g-мерную тэта функцию Римана с характеристиками $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}\in\mathbb{R}^g$:

$$\Theta[\boldsymbol{\eta}^t;\boldsymbol{\zeta}^t](\mathbf{u}|B)=\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^g}\exp\{\pi i(\mathbf{m}+\boldsymbol{\eta})^tB(\mathbf{m}+\boldsymbol{\eta})+2\pi i(\mathbf{m}+\boldsymbol{\eta})^t(\mathbf{u}+\boldsymbol{\zeta})\},$$
$$\Theta[\mathbf{0}^t;\mathbf{0}^t](\mathbf{u}|B)\equiv\Theta(\mathbf{u}|B),\quad \mathbf{u}\in\mathbb{C}^g, \tag{24}$$

Сумма в формуле (24) берется по всем векторам $\mathbf{m}$ из g-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^g$. Нормированные (т.е. имеющие нулевые А-периоды) Абелевы интегралы второго – $\Omega_j(\mathcal{P})$ $\mathcal{P}\in\Gamma$, и третьего рода $\omega_0(\mathcal{P})$, фиксируются следующими асимптотическими условиями[1]

$$\begin{aligned}
&\oint_{a_k} d\Omega_j=\oint_{a_k} d\omega_0=0, && k=1,\ldots,g,\\
&\Omega_j(\mathcal{P})=\mp i\left(2^{j-1}\lambda^j-K_j+O\left(\lambda^{-1}\right)\right), && \mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^\pm,
\end{aligned}$$

[1]Эти интегралы являются многозначными функциями на Γ. Они фиксируются нижеприведенными асимптотическими условиями с точностью до прибавления произвольной целочисленной комбинации их B-периодов.

$$\omega_0(\mathcal{P}) = \mp\left(\ln\lambda - \ln K_0 + O\left(\lambda^{-1}\right)\right), \qquad \mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^\pm,$$
$$w = \pm\left(\lambda^{g+1} + O\left(\lambda^{g}\right)\right), \qquad \mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^\pm.$$

Теорема 1 ([20]). *Конечнозонные решения уравнений из АКНС иерархии описываются следующими формулами:*

$$p(x,t_1,\ldots) = \frac{2K_0}{A}\frac{\Theta(\mathbf{Z})\Theta(\mathbf{U}(x,t_1,\ldots)+\mathbf{Z}-\mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathbf{Z}-\mathbf{\Delta})\Theta(\mathbf{U}(x,t_1,\ldots)+\mathbf{Z})}\exp\{2i\Phi(x,t_1,\ldots)\},$$
$$q(x,t_1,\ldots) = 2AK_0\frac{\Theta(\mathbf{Z}-\mathbf{\Delta})\Theta(\mathbf{U}(x,t_1,\ldots)+\mathbf{Z}+\mathbf{\Delta})}{\Theta(\mathbf{Z})\Theta(\mathbf{U}(x,t_1,\ldots)+\mathbf{Z})}\exp\{-2i\Phi(x,t_1,\ldots)\}, \tag{25}$$

$$\mathbf{U}(x,t_1,\ldots) = \mathbf{V}^1 x + \sum_{j\geq1}\mathbf{V}^{j+1}t_j, \quad V_k^j = \frac{1}{2\pi i}\oint_{b_k} d\Omega_j,$$
$$\Phi(x,t_1,\ldots) = -K_1 x - \sum_{j\geq1} K_{j+1}t_j.$$

Вектор $\mathbf{\Delta}$ – это вектор голоморфных абелевых интегралов, вычисленных вдоль пути, соединяющего точки $\mathcal{P}_\infty^-$ and $\mathcal{P}_\infty^+$, не пересекающего ни один из базисных циклов, $\mathbf{Z}$ – начальная фаза решения, $A\neq0$ – произвольная постоянная.

Замечание 1. Из билинейных соотношений Римана [25,26,29] следует, что b-периоды нормированных абелевых интегралов второго рода равны

$$V_n^j = \frac{i2^{j-1}}{(j-1)!}\left(\left.\frac{d^j\mathcal{U}_n}{d\xi_+^j}\right|_{\xi_+=0} - \left.\frac{d^j\mathcal{U}_n}{d\xi_-^j}\right|_{\xi_-=0}\right), \tag{26}$$

где $\xi_\pm = \lambda^{-1}$ - локальные параметры в окрестности точек $\mathcal{P}_\infty^\pm$.

Замечание 2. Из уравнений (25), (20) следует, что амплитуда решения $|p|$ уравнения из РАКНС иерархии (6) удовлетворяет уравнению

$$|p|^2 = -4K_0^2\frac{\Theta(\mathbf{U}(x,t_1,\ldots)+\mathbf{Z}-\mathbf{\Delta})\Theta(\mathbf{U}(x,t_1,\ldots)+\mathbf{Z}+\mathbf{\Delta})}{\Theta^2(\mathbf{U}(x,t_1,\ldots)+\mathbf{Z})}, \tag{27}$$

где

$$\mathrm{Im}\mathbf{V}^j = \mathrm{Im}\mathbf{Z} = \mathbf{0}, \quad K_0^2 < 0.$$

§3. Кривая рода $g = 2$ с инволюцией

Для построения примера периодического по x решения рода 2 мы будем использовать кривую Γ_2 (fig. 1),

$$\Gamma := \{(w,\lambda) : w^2 = (\lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + |\lambda_1|^2)(\lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + |\lambda_2|^2)(\lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + |\lambda_3|^2)\}, \tag{28}$$

где

$$\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = \mathrm{Re}\lambda_3 = \lambda_0, \quad 0 < \mathrm{Im}\lambda_1 < \mathrm{Im}\lambda_2 < \mathrm{Im}\lambda_3.$$

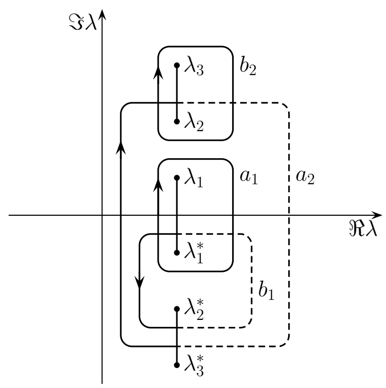

Рис. 1. Кривая Γ_2.

Выберем на Γ_2 базис циклов, как показано на рис. 1 и следующий базис голоморфных дифференциалов:

$$d\mathcal{U}_j = \frac{(c_{j1}\lambda + c_{j2})d\lambda}{w}.$$

.

Поскольку на Γ_2 существуют две голоморфные инволюции:

$$\tau_0 : (w,\lambda) \to (-w,\lambda), \tag{29}$$

$$\tau_2 : (w,\lambda) \to (w, 2\lambda_0 - \lambda), \tag{30}$$

то она накрывает две эллиптические кривые: $\Gamma_+ = \Gamma/\tau_2$ (рис. 2)

$$\Gamma_+ : \quad \chi_+^2 = (t+a^2)(t+b^2)(t+c^2) \tag{31}$$

и $\Gamma_- = \Gamma/(\tau_0\tau_2)$ (fig. 3)

$$\Gamma_- : \quad \chi_-^2 = t(t+a^2)(t+b^2)(t+c^2), \tag{32}$$

где

$$a = \mathrm{Im}\lambda_1, \quad b = \mathrm{Im}\lambda_2, \quad c = \mathrm{Im}\lambda_3.$$

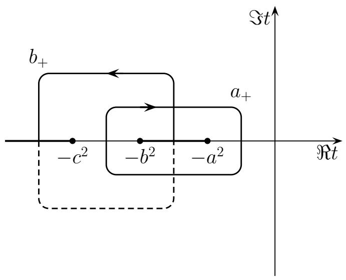

Рис. 2. Кривая Γ_+.

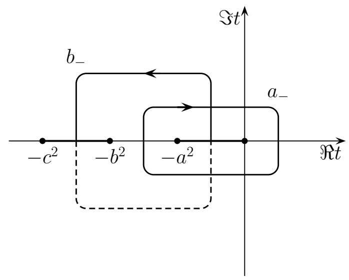

Рис. 3. Кривая Γ_-.

Накрывающие отображения задаются следующими формулами

$$t = (\lambda - \lambda_0)^2, \quad \chi_+ = w, \quad \chi_- = (\lambda - \lambda_0)w, \tag{33}$$

$$\frac{dt}{\chi_+} = \frac{2(\lambda - \lambda_0)d\lambda}{w}, \quad \frac{dt}{\chi_-} = \frac{2d\lambda}{w}. \tag{34}$$

Наличие накрывающих отображений приводит [31, 32] к следующему утверждению.

Теорема 2. *Построенное по кривой* Γ_2 *двухфазное решение может быть выражено через эллиптические функции. Параметры соответствующего решения выражаются через эллиптические интегралы на кривых* $\Gamma_\pm$.

Из равенств (33) следует, что накрывающие отображения порождают следующие отображения между базисами циклов

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_+\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix}, \qquad & \widehat{\sigma}_-\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_- \\ b_- \end{pmatrix}, \\ \widehat{\sigma}_+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix}, \qquad & \widehat{\sigma}_-\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_- \\ b_- \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{35}$$

а из уравнений (34), (35) вытекает, что матрица коэффициентов нормированных голоморфных дифференциалов $d\mathcal{U}_j$ равна

$$C = \begin{pmatrix} 0 & i/(2A_-) \\ -i/(2A_+) & i\lambda_0/(2A_+) \end{pmatrix},$$

где

$$A_+ = \int\limits_{a^2}^{b^2} \frac{dt}{\sqrt{(t-a^2)(b^2-t)(c^2-t)}}, \quad A_- = \int\limits_{0}^{a^2} \frac{dt}{\sqrt{t(a^2-t)(b^2-t)(c^2-t)}}.$$

Вычисляя матрицу периодов кривой Γ_2, имеем

$$B = \begin{pmatrix} i\mathfrak{b}_-/2 & -1/2 \\ -1/2 & i\mathfrak{b}_+/2 \end{pmatrix},$$

где $\mathfrak{b}_\pm = B_\pm / A_\pm$,

$$B_+ = \int\limits_{b^2}^{c^2} \frac{dt}{\sqrt{(t-a^2)(t-b^2)(c^2-t)}}, \quad B_- = \int\limits_{a^2}^{b^2} \frac{dt}{\sqrt{t(t-a^2)(b^2-t)(c^2-t)}}.$$

Вычисляя производные (26) по локальным параметрам от голоморфных дифференциалов, получаем

$$\begin{aligned} &V_m^1 = -2ic_{m1}, \\ &V_m^2 = -12i\lambda_0 c_{m1} - 4ic_{m2}, \\ &V_m^3 = 4i(a^2+b^2+c^2-12\lambda_0^2)c_{m1} - 24i\lambda_0 c_{m2}, \\ &V_m^4 = 40i\lambda_0(a^2+b^2+c^2-4\lambda_0^2)c_{m1} + 8i(a^2+b^2+c^2-12\lambda_0^2)c_{m2}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\mathbf{V}^3 = -2(a^2+b^2+c^2+6\lambda_0^2)\mathbf{V}^1 + 6\lambda_0\mathbf{V}^2, \\ &\mathbf{V}^4 = -8\lambda_0(a^2+b^2+c^2+8\lambda_0^2)\mathbf{V}^1 - 2(a^2+b^2+c^2-12\lambda_0^2)\mathbf{V}^2, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Меняя в формуле (24) суммирование по $\mathbf{m}$ на суммирование по $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$:

$$m_j = 2n_j + k_j, \quad n_j \in \mathbf{Z}, \quad k_j \in \{0;1\}, \quad j = 1,2$$

имеем

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{u}|B) = {} & \vartheta_3(2u_1|2i\mathfrak{b}_-)\vartheta_3(2u_2|2i\mathfrak{b}_+) + \vartheta_2(2u_1|2i\mathfrak{b}_-)\vartheta_3(2u_2|2i\mathfrak{b}_+) \\ & + \vartheta_3(2u_1|2i\mathfrak{b}_-)\vartheta_2(2u_2|2i\mathfrak{b}_+) - \vartheta_2(2u_1|2i\mathfrak{b}_-)\vartheta_2(2u_2|2i\mathfrak{b}_+), \end{aligned}$$

где ϑ_j – эллиптические тэта функции Якоби [33]

$$\vartheta_1(u|b) = 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}h^{(m-1/2)^2}\sin[(2m-1)\pi u], \quad h = e^{\pi i b},$$
$$\vartheta_2(u|b) = 2\sum_{m=1}^{\infty}h^{(m-1/2)^2}\cos[(2m-1)\pi u],$$
$$\vartheta_3(u|b) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}h^{m^2}\cos(2m\pi u),$$
$$\vartheta_4(u|b) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m h^{m^2}\cos(2m\pi u).$$

Следовательно, решение, построенное по кривой (28), имеет вид

$$p = -2iK_0\frac{H(\kappa T + i\delta, kX + 1)}{H(\kappa T, kX)}\exp\{2iK_1x + 2iK_2t_1 + 2iK_3t_2 + \ldots\}, \tag{36}$$

$$q = 2iK_0\frac{H(\kappa T - i\delta, kX - 1)}{H(\kappa T, kX)}\exp\{-2iK_1x - 2iK_2t_1 - 2iK_3t_2 - \ldots\}, \tag{37}$$

$$|p|^2 = -4K_0^2\frac{H(\kappa T - i\delta, kX - 1)H(\kappa T + i\delta, kX + 1)}{H^2(\kappa T, kX)}, \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned} T &= T_0 + 4t_1 + 24\lambda_0 t_2 - 8(a^2 + b^2 + c^2 - 12\lambda_0^2)t_3 + \ldots, \\ X &= X_0 + 2x + 8\lambda_0 t_1 - 4(a^2 + b^2 + c^2 - 12\lambda_0^2)t_2 \\ &\quad - 32\lambda_0(a^2 + b^2 + c^2 - 2\lambda_0^2)t_3 + \ldots, \end{aligned}$$

T_0, X_0 – начальные фазы,

$$\kappa = 1/A_-, \quad k = 1/A_+, \quad \delta = B_-^1/A_-,$$
$$B_-^1 = \int_{c^2}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t(t-a^2)(t-b^2)(t-c^2)}},$$
$$\begin{aligned} H(u_1, u_2) = {} & \vartheta_3(u_1|2i\mathfrak{b}_-)\vartheta_3(u_2|2i\mathfrak{b}_+) + \vartheta_2(u_1|2i\mathfrak{b}_-)\vartheta_3(u_2|2i\mathfrak{b}_+) \\ & + \vartheta_3(u_1|2i\mathfrak{b}_-)\vartheta_2(u_2|2i\mathfrak{b}_+) - \vartheta_2(u_1|2i\mathfrak{b}_-)\vartheta_2(u_2|2i\mathfrak{b}_+). \end{aligned}$$

Коэффициент K_0 равен

$$K_0 = ic\exp(D_-\delta - F_-),$$

где

$$D_- = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} \frac{tdt}{\sqrt{t(a^2-t)(b^2-t)(c^2-t)}},$$

$$F_- = \frac{1}{2}\int\limits_{c^2}^{\infty} \left(\frac{t}{\sqrt{t(t-a^2)(t-b^2)(t-c^2)}} - \frac{1}{t}\right) dt.$$

§4. Особенности двухфазных тэта-функциональных решений

Если $\lambda_0 = 0$, то переменные $x, t_2, t_4, \ldots$ и $t_1, t_3, t_5, \ldots$ разделены по разным фазам решения (36). Следовательно, при $\lambda_0 = 0$ амплитуда решения (36) есть периодическая функция по x и по t_j. Если $\lambda_0 \neq 0$, то переменные t_j находятся одновременно в двух фазах с разными периодами. Поэтому, если $\lambda_0 \neq 0$, то амплитуда решения (36) есть периодическая функция только по x.

Заметим, что в любом случае пики двухфазного решения находятся в вершинах некоторой решетки периодов. Это следует из того, что на гиперэллиптической кривой Γ (20) действительные векторы $\mathbf{V}^1$ и $\mathbf{V}^2$ являются линейно независимыми [25, 26]. Следовательно, при $g = 2$ любой вектор из $\mathbb{R}^2$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{V}^1$ и $\mathbf{V}^2$. В частности, это выполняется для векторов периодов тэта функции Римана, т.е. для $\mathbf{e}_1 = (1,0)^t$ и $\mathbf{e}_2 = (0,1)^t$:

$$\Theta(\mathbf{u} + \mathbf{e}_j) \equiv \Theta(\mathbf{u}).$$

Поэтому для любой гиперэллиптической кривой рода $g = 2$ существуют действительные числа X_j, T_j такие, что выполняются равенства

$$X_j\mathbf{V}^1 + T_j\mathbf{V}^2 = \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2.$$

Из этих равенств и из формулы (27) следует, что амплитуда решения (36) является периодической функцией на плоскости

$$|p|\,(x + X_j, t_1 + T_j) \equiv |p|\,(x, t_1).$$

Это утверждение не зависит от того, выражается двумерная тэта функция через эллиптические функции или нет. Естественно, векторы $\mathbf{V}^k$

для любого $k > 2$ также могут быть разложены в линейную комбинацию векторов $\mathbf{V}^1$ и $\mathbf{V}^2$

$$\mathbf{V}^k = \alpha_k \mathbf{V}^1 + \beta_k \mathbf{V}^2.$$

Поэтому амплитуда

$$|p(x, t_1, \ldots, t_k, \ldots)| = |p(x + \alpha_k t_k, t_1 + \beta_k t_k, \ldots, 0, \ldots)|$$

двухфазного тэта-функционального решения любого уравнения из РАКНС иерархии, в том числе смешанного, также является периодической функцией на плоскости. Если в уравнении (18) постоянная $\gamma_1 = 0$, а кривая удовлетворяет условию $\beta_k = 0$, то амплитуда данного решения будет однофазной периодической функцией, у которой обе переменные находятся в одной фазе.

Поскольку действительный вектор начальной фазы $\mathbf{Z}$ также может быть разложен по векторам $\mathbf{V}^1$ и $\mathbf{V}^2$, то изменение начальной фазы двухфазного решения ведет к тривиальному сдвигу решения на некоторый вектор на плоскости XOT и не меняет характера решения. Поэтому решения любого уравнения РАКНС иерархии без потери общности можно рассматривать при любом $\mathbf{Z}$, в частности, при $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$.

Из формулы (38) и из свойств эллиптических функций [33] следует, что функция $|p|^2(u_1, u_2)$:

(1) является двоякопериодической функцией относительно u_j,

$$\begin{aligned} |p|^2(u_1 \pm 2, u_2) &= |p|^2(u_1, u_2 \pm 2) \\ &= |p|^2(u_1 \pm 2i\mathfrak{b}_-, u_2) = |p|^2(u_1, u_2 \pm 2i\mathfrak{b}_+) = |p|^2(u_1, u_2); \end{aligned}$$

(2) удовлетворяет равенствам

$$|p|^2(u_1 \pm i\mathfrak{b}_-, u_2) = |p|^2(u_1 \pm 1, u_2) \in \mathbb{R},$$
$$|p|^2(u_1, u_2 \pm i\mathfrak{b}_+) = |p|^2(u_1, u_2 \pm 1) \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, начальная фаза $\mathbf{Z}$ может не быть вещественной и иметь не нулевую мнимую часть. Заметим, что условие $\mathfrak{q} = -\mathfrak{p}^*$ для решения (36), (37) эквивалентно следующему:

$$2\mathrm{Im}\mathbf{Z} = \mathrm{Im}(BN), \quad \text{где} \quad N \in \mathbb{Z}^g, \quad \mathrm{Re}(BN) \in \mathbb{Z}^g.$$

В завершение раздела приведем несколько рисунков, иллюстрирующих приведенные здесь утверждения на примере решения (36). На рис. 4 изображена амплитуда периодического решения (36), у которого переменные x и $t = t_1$ разделены по отдельным фазам. На рис. 5

показано, что даже если переменные не разделены по фазам, то можно за счет правильного выбора преобразования [1] кривой получить периодическое по обеим переменным решение. На рис. 8 дано изображение амплитуды решения (36) комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза, у которого переменные x и $t = t_2$ находятся в одной фазе. На рис. 6 изображена амплитуда решения (36) уравнения Хироты (14), у которого переменная t находится одновременно в двух фазах, $t_1 = \gamma_1 t$, $t_2 = -\gamma_2 t$.

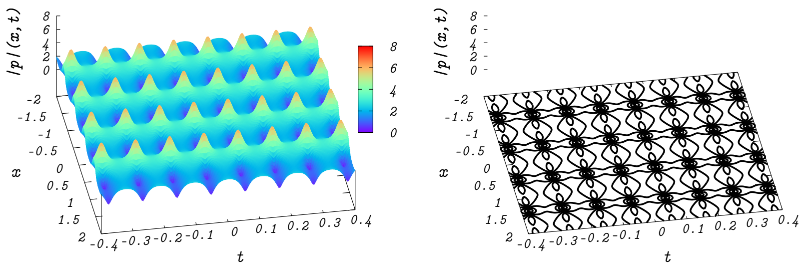

Рис. 4. Амплитуда решения (36) нелинейного уравнения Шредингера (7) для $\lambda_0 = 0$, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $\mathbf{Z} = 0$.

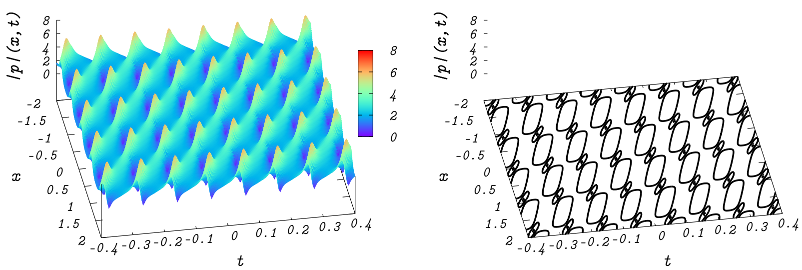

Рис. 5. Амплитуда решения (36) нелинейного уравнения Шредингера (7) для $\lambda_0 = A_+/(2A_-)$, $a = 6$, $b = 8$, $c = 9$, $\mathbf{Z} = 0$.

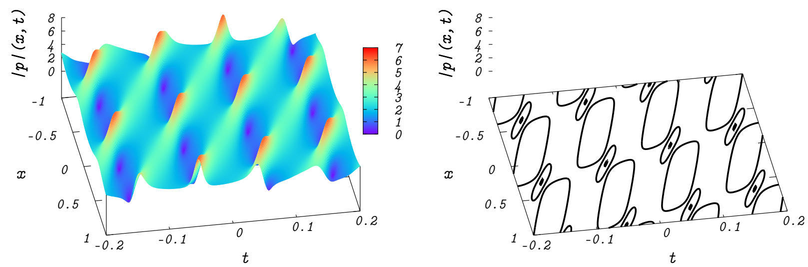

Рис. 6. Амплитуда решения (36) уравнения Хироты (14) для $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.1$, $\lambda_0 = 0$, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $\mathbf{Z} = 0$.

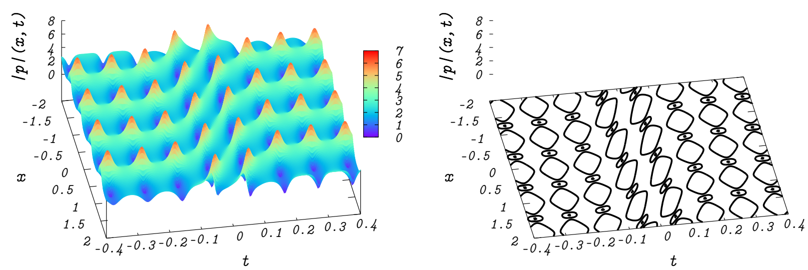

Рис. 7. Амплитуда решения (36) деформированного нелинейного уравнения Шредингера (19) для $\gamma_1'(t) = 1$, $\gamma_2'(t) = 0.1/\cosh^2(10t)$, $\lambda_0 = 0$, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $\mathbf{Z} = 0$.

Заключительные замечания

Подводя итоги анализа двухфазных решений, найденных в настоящей работе, а также в работах [2, 35, 36], можно сделать вывод, что все уравнения АКНС иерархии, включая смешанные, делятся на два класса. В одном классе находятся уравнения только с четными временами t_{2k}. У этих уравнений существуют решения, динамика которых

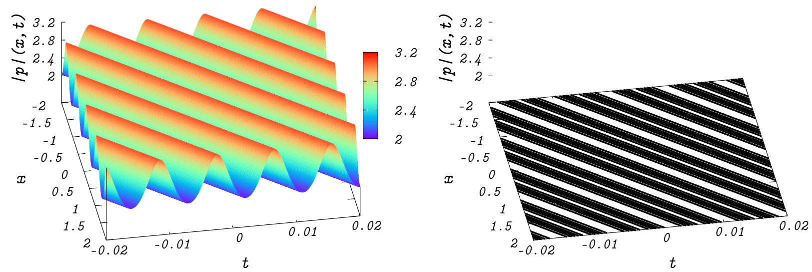

Рис. 8. Амплитуда решения (36) комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (8) для $t_1 = 0$, $\lambda_0 = 0$, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $\mathbf{Z} = 0$.

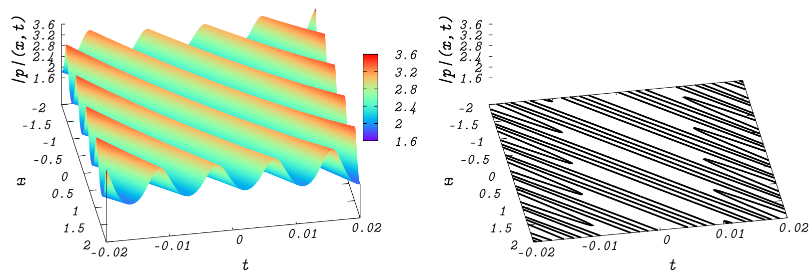

Рис. 9. Амплитуда решения (36) деформированного комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (19) для $\gamma_1'(t) = 1/\cosh^2(10t)$, $\gamma_2'(t) = 1$, $\lambda_0 = 0$, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $\mathbf{Z} = 0$.

содержится только в фазах с нечетными номерами. В фазах с четными временами тех же решений находятся некоторые постоянные параметры. Поведение этих решений (рис. 8) существенно отличается от поведения общих решений (рис. 4 и 6). Ко второму классу относятся уравнения тех же иерархий с нечетными временами. Эти уравнения обладают решениями, у которых данные нечетные времена находятся только в фазах с четными номерами.

Легко видеть, что периодическое по x решение (36) смешанного уравнения (19) с коэффициентами $\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)$, такими что

$$\gamma_2(t) = \frac{-2\lambda_0[a^2 + b^2 + c^2 + 8\lambda_0^2]}{[(a^2 + b^2 + c^2) + 96\lambda_0^4]}\,\gamma_1(t),$$
$$\gamma_3(t) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2[(a^2 + b^2 + c^2) + 96\lambda_0^4]}\,\gamma_1(t),$$

не зависит от времени. Это показывает, что сложные смешанные модели типа (19) могут обладать решениями не имеющими аналогов среди решений уравнений АКНС иерархии с фиксированным номером.

Из работы [34] следует, что из решения (36) предельными переходами можно получить бризер Ахмедиева ($c \to b$), бризер Кузнецова-Ма ($b \to a$) и бризер Перегрина ($c \to b \to a$). При переходе к бризеру Ахмедиева к бесконечности стремятся действительный период первой фазы и мнимый период второй фазы. Соответственно, бризер Кузнецова-Ма получается, когда к бесконечности стремятся мнимый период первой фазы и действительный период второй фазы. Естественно, бризер Перегрина получается из решения (36), когда все четыре периода стремятся к бесконечности.

Авторы выражают признательность Wolfram Research Company за предоставление гранта на покупку лицензионного программного обеспечения Wolfram Mathematica, активно использованного при написании настоящей работе.

Список литературы

1. A. O. Smirnov, V. B. Matveev, *Some comments on continuous symmetries of AKNS hierarchy equations and their solutions.* — Preprint, `arXiv:1509.1134`, 2015.
2. В. Б. Матвеев, А. О. Смирнов, *Решения типа “волн-убийц” уравнений иерархии Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сигура: единый подход.* — ТМФ, **186**, No. 2 (2016), 191–220.
3. V. B. Matveev, A. O. Smirnov, *AKNS and NLS hierarchies, MRW solutions, P_n breathers, and beyond.* — J. Math. Physics, **59**, (2018), 091419–091462. `https://doi.org/10.1063/1.5049949`
4. V. E. Zakharov, L. D. Faddeev, *Korteweg-de Vries equation: A completely integrable Hamiltonian system*, Functional Analysis and Its Applications, **5**, No. 4 (1971), 280–287.
5. M. Lakshmanan, K. Porsezian, M. Daniel, *Effect of discreteness on the continuum limit of the Heisenberg spin chain.* — Phys. Lett. A, **133** (1988), No. 9, 483–488.

6. K. Porsezian, M. Daniel, M. Lakshmanan, *On the integrability aspects of the one-dimensional classical continuum isotropic Heisenberg spin chain.* — J. Math. Phys., **33** (1992), 1807–1816.
7. M. Daniel, K. Porsezian, M. Lakshmanan, *On the integrable models of the higher order water wave equation.* — Phys. Lett. A, **174** (1993), No. 3, 237–240.
8. R. Hirota, *Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation.* — J. Math. Phys., **14** (1973), 805.
9. C. Q. Dai, J. F. Zhang, *New solitons for the Hirota equation and generalized higher-order nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients.* — J. Phys. A, **39** (2006), 723–737.
10. A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, N. Akhmediev, *Rogue waves and rational solutions of the Hirota equation.* — Phys. Rev. E, **81** (2010), 046602.
11. L. Li, Zh. Wu, L. Wang, J. He, *High-order rogue waves for the Hirota equation.* — Annals of Physics, **334** (2013), 198–211.
12. J. S. He, Ch. Zh. Li, K. Porsezian, *Rogue waves of the Hirota and the Maxwell-Bloch equations.* — Phys. Rev. E, **87** (2013), No. 1, 012913.
13. L. H. Wang, K. Porsezian, J. S. He, *Breather and rogue wave solutions of a generalized nonlinear Schrödinger equation.* — Phys. Rev. E, **87** (2013), No. 5, 053202.
14. A. Ankiewicz, N. Akhmediev, *High-order integrable evolution equation and its soliton solutions.* — Phys. Lett. A, **378** (2014), 358–361.
15. A. Chowdury, W. Krolikowski, N. Akhmediev, *Breather solutions of a fourth-order nonlinear Schrödinger equation in the degenerate, soliton, and rogue wave limits.* — Phys. Rev. E, **96** (2017), No. 4, 042209.
16. A. Chowdury, D. J. Kedziora, A. Ankiewicz, N. Akhmediev, *Breather solutions of the integrable quintic nonlinear Schrödinger equation and their interactions.* — Phys. Rev. E, **91** (2015), 022919.
17. A. Ankiewicz, D. J. Kedziora, A. Chowdury, U. Bandelow, N. Akhmediev, *Infinite hierarchy of nonlinear Schrödinger equations and their solutions.* — Phys. Rev. E, **93** (2016), No. 1, 012206.
18. A. Ankiewicz, N. Akhmediev, *Rogue wave-type solutions for the infinite integrable nonlinear Schrödinger hierarchy.* — Phys. Rev. E, **96** (2017), No. 1, 012219.
19. D. Kedziora, A. Ankiewicz, A. Chowdury, N. Akhmediev, *Integrable equations of the infinite nonlinear Schrödingier equation hierarchy with time variable coefficients.* — Chaos, **25** (2015), 103114.
20. А. Р. Итс and В. П. Котляров, *Об одном классе решений нелинейного уравнения Шредингера.* — ДАН УССР, Сер. А, **11** (1976), 965–968.
21. E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'skii, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-geometrical approach to nonlinear evolution equations.* Springer Ser. Nonlinear Dynamics, Springer, 1994.

22. F. Gesztesy, H. Holden, *Soliton equation and their algebro-geometric solutions*: Vol. 1, $(1+1)$-*dimensional continuous models*, Cambridge Stud. in Adv. Math., vol. 79, Cambridge University Press, 2003.
23. А. О. Смирнов, *Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза.* — Матем. Сборник, **185** (1994), No. 8, 103–114.
24. ______, *Эллиптические по t решения нелинейного уравнения Шредингера.* — ТМФ, **107** (1996), No. 2, 188–200.
25. Б. А. Дубровин, *Тэта-функции и нелинейные уравнения.* — УМН, **36** (1981), No. 2, 11–80.
26. Г. Ф. Бейкер, *Абелевы функции. Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций.* МЦНМО, М., 2008.
27. G. Springer, *Introduction to Riemann surfaces.* Addison-Wesley, 1957.
28. H. M. Farkas and I. Kra, *Riemann surfaces.* Springer, New York, 1980.
29. Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях.* Мир, М., 1988.
30. J. D. Fay, *Theta-functions on Riemann surfaces.* — Lect. Notes Math., vol. 352, Springer, 1973.
31. А. О. Смирнов, *Матричный аналог теоремы Аппеля и редукции многомерных тэта-функций Римана.* — Матем. Сборник, **175** (1987), No. 7, 382–391.
32. ______, *Конечнозонные решения абелевой цепочки Тоды рода 4 и 5 в эллиптических функциях.* — ТМФ, **78** (1989), No. 1, 11–21.
33. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций.* Наука, М., 1970.
34. A. O. Smirnov, V. B. Matveev, Yu. A. Gusman, N. V Landa, *Spectral curves for the rogue waves.* Preprint, `arXiv:1712.09309`, 2017.
35. А. О. Смирнов, *Решение нелинейного уравнения Шредингера в виде двухфазных странных волн.* — ТМФ, **173** (2012), No. 1, 89–103.
36. ______, *Периодические двухфазные «волны-убийцы».* — Матем. Заметки, **94** (2013), No. 6, 871–883.

Matveev V. B., Smirnov A. O. Two-phase periodic solutions to the AKNS hierarchy equations.

In this paper we investigate the genus 2 algebro-geometric solutions of the AKNS hierarchy equations, strictly periodic with respect to the space variable x. In general position these solutions, expressed by means of two-dimensional Riemann theta functions are not strictly periodic in x. We show that x periodic solutions can be obtained by appropriate choice of the hyperelliptic spectral curves, having a structure of covering over elliptic curve. For odd number members of AKNS hierarchy these solutions might be made periodic also with respect to the corresponding time variables of the AKNS hierarchy, imposing further restrictions on the structure of the spectral curve pointed out in the paper. The related solutions are especially

interesting from the point of view of potential applications to study the signals propagation in nonlinear optical fibers.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. реки Фонтанки д. 27, 191023 С.-Петербург, Россия;
Institut de Mathématiques de Bourgogne (IMB),
Université de Bourgogne - Franche Comté,
BP 47870, 21078, Dijon, France;
С.-Петербургский государственый
университет аэрокосмического приборостроения,
Большая Морская 67А, 190000 С.-Петербург, Россия
E-mail: matveev@u-bourgogne.fr

Поступило 19 сентября 2018 г.