

А. В. Иванов

О ПОЛНОТЕ ПРОЕКТОРОВ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ СЕРИЙ ГРУППЫ $SL(2, \mathbb{R})$

Посвящается юбилею М. А. Семенова-Тян-Шанского

§1. ВВЕДЕНИЕ

Группа Ли $SL(2, \mathbb{R})$ играет важную роль в математической и теоретической физике ([1, 2]). К примеру, представления данной группы используются при анализе интегрируемых моделей ([3, 4]). В данной работе рассматривается разложение тензорного произведения представлений непрерывных серий группы $SL(2, \mathbb{R})$ в прямую сумму представлений непрерывной и дискретной серий. Основными объектами являются проекторы, осуществляющие данное разложение. Из общей теории известно, что для них выполнены свойства ортогональности и полноты ([5–12]).

Основной целью работы является проверка полноты (формула Планшереля) для проекторов (см. секции 2.7 и 3) в смысле обобщенных функций. В некотором смысле эта статья является продолжением ([3]), в которой были построены проекторы и показана их ортогональность. Данная работа содержит полезные факты, необходимые для работы с операторами проекции и их анализа, и может найти свое применение в различных приложениях, в частности, при вычислениях $6j$ – символов ([13]).

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Определения представлений. Основной целью данной части является дать определения представлений дискретной и непрерывной серий группы $SL(2, \mathbb{R})$, которая состоит из вещественных матриц

Ключевые слова: формула Планшереля, непрерывный спектр, дискретный спектр, тензорное произведение представлений, ортогональность проекторов, полнота проекторов, диаграммная техника, цепное соотношение, соотношение звезда-треугольник.

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 14-11-00598).

$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ со свойством $ad - cb = 1$. Представления дискретной серии D_h^\pm нумеруются положительным целым или полуцелым числом h и знаком \pm . Пространством представления является Гильбертово пространство \mathcal{H}_h^\pm , состоящее из аналитических в верхней (+) или нижней (-) полуплоскости функций со скалярным произведением

$$(\phi, \psi) = \int \mathcal{D}^\pm \omega \phi(\omega) \overline{\psi(\omega)}$$

и мерой

$$\mathcal{D}^\pm \omega = \frac{2h-1}{2\pi i} \theta(\pm \text{Im}(\omega)) (\pm 2\text{Im}(\omega))^{2h-2} d\omega d\bar{\omega}.$$

Действие оператора представления может быть записано в виде

$$[D_h^\pm(g^{-1})\phi](\omega) = (c\omega + d)^{-2h} \phi\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right), \quad \forall \phi(\omega) \in \mathcal{H}_h^\pm.$$

Представления непрерывной серии $T^{(\rho, \varepsilon)}$ нумеруются двумя индексами: вещественное ρ и дискретное $\varepsilon \in \{0, \frac{1}{2}\}$. Все они, за исключением $T^{(0, \frac{1}{2})} = D_{1/2}^+ \oplus D_{1/2}^-$, являются неприводимыми. Соответствующий оператор представления действует на $L^2(\mathbb{R})$ согласно правилу

$$[T^{(\rho, \varepsilon)}(g^{-1})\phi](x) = \frac{\text{sign}^{2\varepsilon}(cx + d)}{|cx + d|^{1+2i\rho}} \phi\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right), \quad \forall \phi(x) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Полезно также отметить (см. [8, 9]), что представление $T^{(\rho, \varepsilon)}$ эквивалентно представлению $T^{(-\rho, \varepsilon)}$, при этом ядро сплетающего оператора с точностью до фазового множителя имеет вид

$$(\sqrt{\pi}A(1 - 2i\rho, \varepsilon))^{-1} D_{(1-2i\rho, \varepsilon)}(x - y)$$

(см. раздел 2.2).

2.2. Обозначения и диаграммная техника. Для дальнейших выкладок удобно использовать мультииндекс $\alpha = (\alpha, \varepsilon)$, где $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\varepsilon \in \{0, \frac{1}{2}\}$, для которого справедливы следующие операции

$$\alpha^* = (\bar{\alpha}, \varepsilon), \quad -\alpha = (-\alpha, \varepsilon), \quad \alpha + \alpha' = \alpha'' = (\alpha + \alpha', \varepsilon + \varepsilon' \bmod 1).$$

где $\varepsilon' \in \{0, \frac{1}{2}\}$ и $\alpha' \in \mathbb{C}$. Как правило при работе с проекторами возникают громоздкие формулы, поэтому при вычислениях используется

диаграммная техника, которая упрощает запись и при этом отображает все необходимые свойства выражений. Базовым элементом является линия, отвечающая функции $D(\alpha) = |x|^{-\alpha} \text{sign}^{2\varepsilon}(x)$ (см. рис. (1)), преобразование Фурье которой имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ipx} D_{\alpha}(x) = \sqrt{\pi} 2^{1-\alpha} A(\alpha) D_{1-\alpha}(p),$$

$$A(\alpha) = e^{-i\pi\varepsilon} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2\varepsilon} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \varepsilon - \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\varepsilon + \frac{\alpha}{2})}.$$

Функция $A(\alpha)$ обладает (см. (11)) свойствами: $A(\alpha)A(1-\alpha) = (-1)^{2\varepsilon}$ и для $\rho \in \mathbb{R}$

$$A(1+2i\rho, \varepsilon)A(1-2i\rho, \varepsilon) = (-1)^{2\varepsilon} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\cosh(\pi\rho)}{\sinh(\pi\rho)} \right)^{1-4\varepsilon}. \quad (1)$$

Далее, используя точку для обозначения операции интегрирования по соответствующей мере, можно доказать основные свойства (цепное соотношение и звезда-треугольник) диаграммной техники (см. рис. (2) и (3)).

2.3. Разложение тензорного произведения. Из общей теории (см. [8–10]) хорошо известно, что $T^{\rho_1} \otimes T^{\rho_2}$ раскладывается в прямой интеграл представлений непрерывной серии и прямую сумму представлений, отвечающих дискретному спектру, в следующем виде:

$$T^{\rho_1} \otimes T^{\rho_2} = \bigoplus_{h=1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}^{\infty} D_h^+ \oplus \bigoplus_{h=1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}^{\infty} D_h^- \oplus 2 \int_{[0,+\infty)}^{\oplus} d\rho T^{(\rho, \varepsilon_1+\varepsilon_2)},$$

где $\rho_1 = (\rho_1, \varepsilon_1)$, $\rho_2 = (\rho_2, \varepsilon_2)$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, \frac{1}{2}\}$ и $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \pmod{1}$.

2.4. Проекторы. Соответствующие формулы могут быть получены из условия коммутативности оператора проекции с оператором представления. Используя для удобства обозначения $b = \rho_1 + \rho_2$ и $a = \rho_1 - \rho_2$, проекторы на дискретную составляющую спектра действуют

из $T^{\rho_1} \otimes T^{\rho_2}$ в D_h^\pm и имеют вид

$$P_{\rho_1, \rho_2}^{h, \pm}(\omega | y_1, y_2) = |y_2 - y_1|^{ib-1+\varepsilon_1+\varepsilon_2} \frac{(y_2 - y_1)^{h-\varepsilon_1-\varepsilon_2}}{(\omega - y_1)^{h+\varepsilon_1-\varepsilon_2} (\omega - y_2)^{h-\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \left[\frac{\omega - y_1}{\omega - y_2} (y_1 - y_2) \right]^{\frac{ia+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}} \left[\frac{\omega - y_2}{\omega - y_1} (y_2 - y_1) \right]^{-\frac{ia+\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}}, \quad (2)$$

где \pm отвечает $\omega \in \mathbb{C}^\pm$ и квадратные скобки содержат однозначную функцию от ω в верхней или нижней полуплоскости. В случае непрерывного спектра существует два проектора, действующих из $T^{\rho_1} \otimes T^{\rho_2}$ в T^ρ . Они отличаются дискретным индексом $\varepsilon \in \{0, \frac{1}{2}\}$ и могут быть выписаны в виде

$$P_{\rho_1, \rho_2}^{\rho, \varepsilon}(y | y_1, y_2) = D_{\alpha_1}(y - y_1) D_{\alpha_2}(y - y_2) D_{\alpha_3}(y_2 - y_1), \quad (3)$$

где $\rho = (\rho, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ и

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{2} + i(\rho - a), \varepsilon_2 + \varepsilon\right), \quad \alpha_2 = \left(\frac{1}{2} + i(\rho + a), \varepsilon_1 + \varepsilon\right), \\ \alpha_3 = \left(\frac{1}{2} - i(\rho + b), \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon\right).$$

2.5. Об унитарной эквивалентности. Для упрощения вычислений удобно построить операторы, осуществляющие унитарную эквивалентность между $T^{\rho_1} \otimes T^{\rho_2}$ и $T^{\rho_1 - \alpha} \otimes T^{\rho_2 + \alpha}$, где $\alpha = (\frac{\rho_1 - \rho_2}{2}, 0)$ или $\alpha = (\frac{\rho_1 - \rho_2}{2}, \frac{1}{2})$. Предлагается искать такой оператор в виде оператора интегрирования с ядром

$$U_{a,b}^{\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''}(y_1, y_2 | y_3) = \Lambda D_{(-ib, \varepsilon)}(y_2 - y_1) D_{(1-ia, \varepsilon')}(y_2 - y_3) D_{(i(a+b), \varepsilon'')}(y_1 - y_3),$$

где Λ - константа нормировки. Затем, используя диаграммную технику и формулы (1), (10) и (16), можно найти Λ и показать (см. рис. (4) и (5)), что операторы обладают свойством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 U_{a,b}^{\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''}(y_1, y_2 | y) \overline{U_{a,b}^{\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''}(y_1, y_2 | y')} = \delta(y - y'),$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \in \{0, \frac{1}{2}\}$ и

$$\Lambda(a, \varepsilon') = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \left(\frac{\cosh(\frac{\pi a}{2})}{\sinh(\frac{\pi a}{2})} \right)^{2\varepsilon' - \frac{1}{2}}.$$

Далее, используя инвариантность и диаграммную технику, легко доказать, что индексы U -оператора имеют специальные значения. Таким образом, для $\rho_1 = (\rho_1, \varepsilon_1)$, $\rho_2 = (\rho_2, \varepsilon_2)$, $b = \rho_1 + \rho_2$, $a = \rho_1 - \rho_2$ и $\delta, \kappa \in \{0, \frac{1}{2}\}$ выполняются

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 P_{\rho_1, \rho_2}^{\rho, \varepsilon}(y|y_1, y_2) U_{a, -b}^{\delta+\kappa, \varepsilon_2+\delta+\kappa, \varepsilon_2+\kappa}(y_1, y_2 | y') = C_{\rho, a}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon, \delta, \kappa} P_{\alpha_1, \alpha_2}^{\rho, \varepsilon+\kappa}(y|y_1, y'), \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 P_{\rho_1, \rho_2}^{h, \pm}(\omega|y_1, y_2) U_{a, -b}^{\delta+\kappa, \varepsilon_2+\delta+\kappa, \varepsilon_2+\kappa}(y_1, y_2 | y') = C_{h, a, \pm}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon, \delta, \kappa} P_{\alpha_1, \alpha_2}^{h, \pm}(\omega|y_1, y'), \quad (5)$$

где $\rho = (\rho, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, $h \in \mathbb{N}$ для $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ и $h - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ для $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = (\frac{b}{2}, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \delta)$ $\alpha_2 = (\frac{b}{2}, \delta)$, и

$$C_{\rho, a}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon, \delta, \kappa} = (-1)^{2\delta} \frac{\sqrt{\pi} \Lambda(a, \varepsilon_2 + \delta + \kappa)}{A(ia, \varepsilon_2 + \delta + \kappa)} \frac{A(\frac{1}{2} + i(\rho + a), \varepsilon_1 + \varepsilon)}{A(\frac{1}{2} + i\rho, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon + \delta + \kappa)},$$

$$C_{h, a, \pm}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon, \delta, \kappa} = \frac{\sqrt{\pi} \Lambda(a, \varepsilon_2 + \delta + \kappa)}{A(ia, \varepsilon_2 + \delta + \kappa)} \frac{\Gamma(h)}{\Gamma(h + ia)} 2^{ia} (\pm 1)^{2\delta} (\mp 1)^{2(\varepsilon_2 + \kappa)} \times e^{\pm \frac{i\pi}{2} [\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \delta - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \delta)]}.$$

Необходимо отметить, что

$$|C_{\rho, a}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon, \delta, \kappa}| = 1 \quad \text{и} \quad |C_{h, a, \pm}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon, \delta, \kappa}| = \Gamma(h) |\Gamma(h + ia)|^{-1}.$$

2.6. Ортогональность. Используя операторы для унитарной эквивалентности (см. раздел 2.5), условие ортогональности достаточно выписать только для $\rho_1 = (\frac{b}{2}, \varepsilon_1)$, $\rho_2 = (\frac{b}{2}, \varepsilon_2)$, $b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, \frac{1}{2}\}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 dy_2 P_{\rho_1, \rho_2}^{h, \pm}(\omega | y_1, y_2) \overline{P_{\rho_1, \rho_2}^{h', \pm}(z | y_1, y_2)} = \delta_{h, h'} N(h) \frac{e^{\pm i\pi h}}{(\omega - \bar{z})^h}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dy_2 P_{\rho_1, \rho_2}^{\rho, \varepsilon}(y | y_1, y_2) \overline{P_{\rho_1, \rho_2}^{\rho', \varepsilon'}(y' | y_1, y_2)} \\ & = N^{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}(\rho) \delta_{\varepsilon, \varepsilon'} \delta(y - y') \delta(\rho - \rho'), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\omega, z \in \mathbb{C}^\pm$, $\rho, \rho' > 0$, $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, \frac{1}{2}\}$ и

$$N(h) = (2\pi)^2 \frac{\Gamma(2h-1)}{(\Gamma(h))^2}, \quad N^{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}(\rho) = (2\pi)^2 \frac{1}{\rho} \left(\frac{\cosh(\pi\rho)}{\sinh(\pi\rho)} \right)^{1-4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

2.7. Формула Планшереля. В рассматриваемой модели условие полноты проекторов записывается в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma=\pm} \sum_{h=1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}^{\infty} \frac{|\Gamma(h+ia)|^2}{N(h)(\Gamma(h))^2} \int \mathcal{D}^\gamma \omega P_{\rho_1, \rho_2}^{h, \gamma}(\omega | y_3, y_4) \overline{P_{\rho_1, \rho_2}^{h, \gamma}(\omega | y_1, y_2)} \\ & + \sum_{\varepsilon \in \{0, \frac{1}{2}\}} \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{N^{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}(\rho)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy P_{\rho_1, \rho_2}^{\rho, \varepsilon}(y | y_3, y_4) \overline{P_{\rho_1, \rho_2}^{\rho, \varepsilon}(y | y_1, y_2)} \\ & = \delta(y_3 - y_1) \delta(y_4 - y_2), \end{aligned}$$

где $\rho_1 = (\rho_1, \varepsilon_1)$, $\rho_2 = (\rho_2, \varepsilon_2)$, $\rho = (\rho, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, \frac{1}{2}\}$ и $a = \rho_1 - \rho_2$. Доказательство вышеизложенного равенства является достаточно трудоемкой задачей, ввиду этого следует сперва упростить левую часть без потери общности. Из разделов 2.1 и 2.5 следует, что достаточно рассматривать лишь следующие случаи: $\rho_1 = \rho_2 = \frac{b}{2} > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 = 0$. Затем, используя сдвиг и масштабное преобразование, можно показать, что необходимо рассматривать только $y_3 = 0$ и $y_4 = 1$. Далее, вводя для удобства вычислений функции

$$J_{h,b}^{\varepsilon_1, 0, \pm}(y_1, y_2) = \int \mathcal{D}^\pm \omega P_{\rho_1, \rho_2}^{h, \pm}(\omega | 0, 1) \overline{P_{\rho_1, \rho_2}^{h, \pm}(\omega | y_1, y_2)}, \quad (8)$$

$$J_{\rho,b}^{\varepsilon_1, 0, \varepsilon}(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy P_{\rho_1, \rho_2}^{\rho, \varepsilon}(y | 0, 1) \overline{P_{\rho_1, \rho_2}^{\rho, \varepsilon}(y | y_1, y_2)}, \quad (9)$$

условие полноты принимает вид:

$$\sum_{\gamma=\pm} \sum_{h=1+\varepsilon_1}^{\infty} \frac{1}{N(h)} J_{h,b}^{\varepsilon_1,0,\pm}(y_1, y_2) + \sum_{\varepsilon \in \{0, \frac{1}{2}\}} \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{N^{\varepsilon_1}(\rho)} J_{\rho,b}^{\varepsilon_1,0,\varepsilon}(y_1, y_2) = \delta(y_1)\delta(1-y_2).$$

Доказательство последнего равенства может быть разбито на три шага.

1) Необходимо показать, что носитель левой части равенства принадлежит множеству $\mathbb{R} \times \{1\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ в смысле обобщенных функций. В разделе 3 данной статьи получено, что

$$\sum_{\gamma=\pm} \sum_{h=1+\varepsilon_1}^{\infty} \frac{1}{N(h)} J_{h,b}^{\varepsilon_1,0,\pm}(y_1, y_2) + \sum_{\varepsilon \in \{0, \frac{1}{2}\}} \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{N^{\varepsilon_1}(\rho)} J_{\rho,b}^{\varepsilon_1,0,\varepsilon}(y_1, y_2) = 0$$

на множестве $(1, +\infty) \cup (-\infty, 0)$. Аналогичным образом это может быть показано для любых интервалов $(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2)$, таких что $0 \notin (a_1, b_1)$ и $1 \notin (a_2, b_2)$.

2) Из предыдущего шага следует, что левая часть равенства имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{N_1} g_n(y_1) \delta^{(n)}(1-y_2) + \sum_{n=0}^{N_2} \delta^{(n)}(y_1) h_n(y_2),$$

где $N_1, N_2 \in \mathbb{N} \cup 0$, $g_i(y_1)$, $i \in \{0, \dots, N_1\}$ и $h_j(y_2)$, $j \in \{0, \dots, N_2\}$ – некоторые обобщенные функции. Ясно, что итоговый интегральный оператор должен преобразовываться под действием оператора представления так же, как и левая часть формулы Планшереля, построенная по проекторам. Таким образом, применяя оператор представления и используя операторную неприводимость, можно показать, что остается лишь одно слагаемое вида $c\delta(y_1)\delta(1-y_2)$, где c – некоторая константа.

3) Из ортогональности (раздел 2.6) следует, что $c = 1$.

§3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

3.1. Дискретная часть. Прежде всего удобно рассмотреть случай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. На основе формулы для проекторов на дискретную составляющую (2), правая часть равенства (8) может быть выписана на

множестве $y_1 > 1$, $y_2 < 0$ в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{(2y)^{2h-2}(2h-1)}{\pi} \frac{(y_2 - y_1)^h (y_1 - y_2)^{-ib-1}}{(\omega)^h (\omega - 1)^h (\bar{\omega} - y_1)^h (\bar{\omega} - y_2)^h}.$$

Затем, сперва применяя формулу (13) ко всем множителям, содержащим ω и $\bar{\omega}$, используя

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ixq} = 2\pi\delta(q), \quad \int_0^{+\infty} dy \frac{(2y)^{2h-2}(2h-1)}{\pi} e^{-yq} = \frac{1}{\pi} 2^{2h-2} q^{1-2h} \Gamma(2h),$$

и вновь применяя (13), но в обратном порядке, дискретная часть принимает вид

$$J_{h,b}^{0,0,+}(y_1, y_2) = \frac{(y_2 - y_1)^h}{(y_1 - y_2)^{1+ib}} \frac{e^{-i\pi h} \Gamma(2h)}{(\Gamma(h))^2} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^{h-1} (1-\alpha)^{h-1}}{(1-\alpha-y_1)^h (1-\alpha-y_2)^h}.$$

После замены переменной вида

$$\alpha = \frac{(y_1 - 1)(1 - y_2)}{(y_1 - 1)(1 - y_2) + (y_1 - y_2)u}, \quad \eta = \frac{y_1(1 - y_2)}{y_1 - y_2},$$

для интеграла из правой части следует равенство

$$\int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^{h-1} (1-\alpha)^{h-1}}{(1-\alpha-y_1)^h (1-\alpha-y_2)^h} = \int_0^{+\infty} \frac{du u^{h-1} (y_2 - y_1)^{-h}}{(u + \eta)^h (u + \eta - 1)^h}.$$

Повторяя предыдущие шаги для D_h^- и для $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 = 0$ легко проверить следующие равенства

$$J_{h,b}^{0,0,+}(y_1, y_2) = J_{h,b}^{0,0,-}(y_1, y_2), \quad J_{h,b}^{\frac{1}{2},0,+}(y_1, y_2) = -J_{h,b}^{\frac{1}{2},0,-}(y_1, y_2).$$

Таким образом, после использования (12) и суммирования по $h \in \mathbb{N}$, окончательное выражение имеет вид

$$\sum_{\gamma=\pm} \sum_{h=1+\varepsilon_1}^{\infty} \frac{1}{N(h)} J_{h,b}^{\varepsilon_1,0,\gamma}(y_1, y_2) = \frac{\delta_{0,\varepsilon_1}}{2\pi^2 (y_1 - y_2)^{1+ib}} \int_0^{+\infty} du \frac{k(u)(k(u) - 1)}{u(k(u) + 1)^2},$$

где

$$k(u) = \frac{u}{(u + \eta)(u + \eta - 1)}.$$

3.2. Непрерывная часть. После подстановки (3) в (9) и следующей замены переменных

$$y = \frac{y_2}{1-bv}, \quad \eta = \frac{y_1(1-y_2)}{y_1-y_2}, \quad b = \frac{y_2-y_1}{y_1},$$

правая часть на множестве $y_1 > 1$, $y_2 < 0$ принимает вид

$$\frac{\text{sign}^{2\varepsilon_1}(y_2-y_1)\text{sign}^{2\varepsilon_1}(y_2)}{(y_1-y_2)^{1+ib}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{\text{sign}^{2(\varepsilon_1+\varepsilon)}(v)}{|v|^{\frac{1}{2}+i\rho}} \frac{\text{sign}^{2\varepsilon}(v+1)}{|1+v|^{\frac{1}{2}+i\rho}} \frac{\text{sign}^{2(\varepsilon_1+\varepsilon)}(\eta+v)}{|\eta+v|^{\frac{1}{2}-i\rho}}.$$

Интеграл в последней формуле можно представить в виде суммы четырех слагаемых:

$$I_j(\rho) = \int_{\Omega_j} \frac{dv}{|v|^{\frac{1}{2}+i\rho} |1+v|^{\frac{1}{2}+i\rho} |\eta+v|^{\frac{1}{2}-i\rho}}, \quad j \in \{1, 2, 3, 4\},$$

где $\Omega_1 = [-\infty, -\eta]$, $\Omega_2 = [-\eta, -1]$, $\Omega_3 = [-1, 0]$ и $\Omega_4 = [0, +\infty]$, поскольку $\eta > 1$. Далее, из формул (17) и (18) следует равенство

$$J_{\rho,b}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon}(y_1,y_2) = \frac{1}{(y_1-y_2)^{1+ib}} \times \left[(-1)^{2\varepsilon} I_1(\rho) + (-1)^{2\varepsilon_1} I_2(\rho) + (-1)^{2(\varepsilon_1+\varepsilon)} I_3(\rho) + I_4(\rho) \right].$$

После суммирования по ε и использования соотношения (19), получаем

$$\sum_{\varepsilon \in \{0, \frac{1}{2}\}} J_{\rho,b}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon}(y_1,y_2) = \frac{4i}{(y_1-y_2)^{1+ib}} \frac{\cosh(\pi\rho)}{\sinh(2\pi\rho)} (I_1(\rho) - I_3(\rho)) \delta_{0,\varepsilon_1+\varepsilon_2}.$$

Далее, производя интегрирование по переменной ρ от 0 до $+\infty$ с весом $(N^{\varepsilon_1}(\rho))^{-1}$ и применяя формулу (12), ответ для случая непрерывного спектра выписывается в виде

$$\sum_{\varepsilon \in \{0, \frac{1}{2}\}} \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{N^{\varepsilon_1}(\rho)} J_{\rho,b}^{\varepsilon_1,0,\varepsilon}(y_1,y_2) = \frac{-\delta_{0,\varepsilon_1}}{2\pi^2(y_1-y_2)^{1+ib}} \int_0^{+\infty} du \frac{k(u)(k(u)-1)}{u(k(u)+1)^2},$$

где

$$k(u) = \frac{u}{(u+\eta)(u+\eta-1)}.$$

§4. ПРИЛОЖЕНИЕ

4.1. Общие формулы.

$$\frac{\delta}{\delta^2 + y^2} \xrightarrow{S'(\mathbb{R})} \pi \delta(y), \quad \frac{\delta}{|y|^{1-\delta}} \xrightarrow{S'(\mathbb{R})} 2\delta(y), \quad \delta \rightarrow +0, \quad (10)$$

$$\Gamma(-ix)\Gamma(1+ix) = \frac{i\pi}{\sinh(\pi x)}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} - ix\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + ix\right) = \frac{\pi}{\cosh(\pi x)}, \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx x e^{ixk}}{\cosh(\pi x)} = \frac{i(e^{\frac{1}{2}k} - e^{-\frac{1}{2}k})}{(e^{\frac{1}{2}k} + e^{-\frac{1}{2}k})^2}, \quad \sum_{h=1}^{\infty} e^{i\pi h} (2h-1)k^h = \frac{k(k-1)}{(k+1)^2}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{(x-y)_{\pm}^{\alpha}} = \frac{e^{\mp \frac{i\pi\alpha}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} dp p^{\alpha-1} e^{\pm ip(x-y)}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c; z) &= \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (1-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b, a-b+1; \frac{1}{1-z}\right) \\ &+ \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (1-z)^{-b} {}_2F_1\left(c-a, b, b-a+1; \frac{1}{1-z}\right), \quad (14) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} dx x^{\nu-1} (\beta+x)^{-\mu} (\gamma+x)^{-\lambda} = \beta^{-\mu} \gamma^{\nu-\lambda} B(\nu, \mu-\nu+\lambda) {}_2F_1\left(\mu, \nu, \mu+\lambda; 1-\frac{\gamma}{\beta}\right), \quad (15)$$

где (см. [14])

$$|\beta| < \pi, \quad |\gamma| < \pi, \quad \operatorname{Re} \nu > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re}(\nu - \lambda).$$

4.2. Вспомогательные формулы. 1) Если $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, \frac{1}{2}\}$ и $\delta \rightarrow +0$, тогда

$$\frac{A(1-i\rho-\delta, \varepsilon+\varepsilon')}{A(1-2\delta, 0)} \frac{S'(\mathbb{R}) \times S'(\mathbb{R})}{|x|^{1+i\rho-\delta}} \rightarrow 4\pi \delta(x) \delta(\rho) \delta_{\varepsilon, \varepsilon'}. \quad (16)$$

Для доказательства необходимо отметить, что в случае, если ε не равно ε' , формула стремится к нулю. Из-за этого появляется символ $\delta_{\varepsilon, \varepsilon'}$. Остальные случаи следуют из (10).

2) После замены переменных $v = -u - \eta$ в $I_1(\rho)$, $v = -\frac{u+\eta}{u+1}$ в $I_2(\rho)$ и $v = -\frac{\eta}{u+\eta}$ в $I_3(\rho)$, легко проверить равенства

$$I_1(\rho) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u+\eta)^{\frac{1}{2}+i\rho} (u+\eta-1)^{\frac{1}{2}+i\rho} u^{\frac{1}{2}-i\rho}} = I_3(-\rho), \quad (17)$$

$$I_2(\rho) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u + \eta)^{\frac{1}{2} + i\rho} (u + 1)^{\frac{1}{2} - i\rho} u^{\frac{1}{2} - i\rho}} = I_4(-\rho). \quad (18)$$

С другой стороны, для предыдущих интегралов выполняется соотношение

$$I_2(\rho) = I_4(\rho) = i \frac{\cosh(\pi\rho)}{\sinh(2\pi\rho)} (I_1(\rho) - I_3(\rho)), \quad (19)$$

Чтобы увидеть это, необходимо использовать формулу (15) с параметрами $\nu = \frac{1}{2} + i\rho$, $\mu = \frac{1}{2} - i\rho$, $\lambda = \frac{1}{2} + i\rho$ и $\beta = 1$, $\gamma = \eta$. Затем подставить (14) и вновь применить (15), но в обратном порядке, с параметрами $\nu = \frac{1}{2} - i\rho$, $\mu = \frac{1}{2} - i\rho$, $\lambda = \frac{1}{2} - i\rho$, $\beta = \eta$ и $\gamma = \eta - 1$. Таким образом, можно получить

$$\frac{\Gamma(1 - 2i\rho)\Gamma(2i\rho)}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\rho)\Gamma(\frac{1}{2} - i\rho)} \int_0^{\infty} dx x^{-\frac{1}{2} - i\rho} (\eta + x)^{-\frac{1}{2} + i\rho} (\eta - 1 + x)^{-\frac{1}{2} + i\rho} + (\rho \leftrightarrow -\rho).$$

Отсюда соотношение (19) получается подстановкой формул из (11).

4.3. Диаграммы.

$$\frac{\text{sign}^{2\varepsilon}(y_2 - y_1)}{|y_2 - y_1|^\alpha} = y_1 \xrightarrow{(\alpha, \varepsilon)} y_2$$

Рис. 1. Линия.

$$z \xrightarrow{\beta} \bullet \xrightarrow{\alpha} x = \sqrt{\pi} \frac{A(\alpha)A(\beta)}{A(\gamma)} z \xrightarrow{\gamma} x$$

Рис. 2. Цепное соотношение.

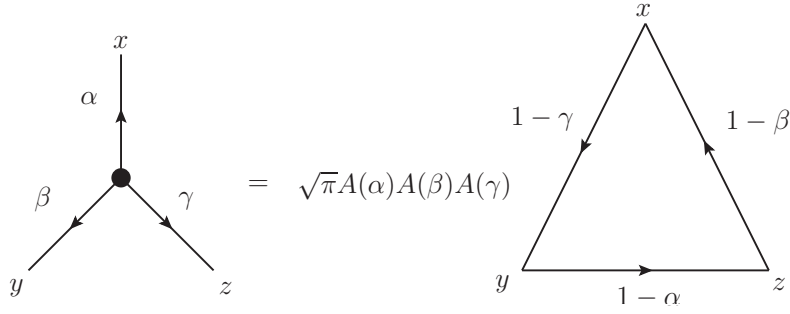


Рис. 3. Соотношение звезда-треугольник.

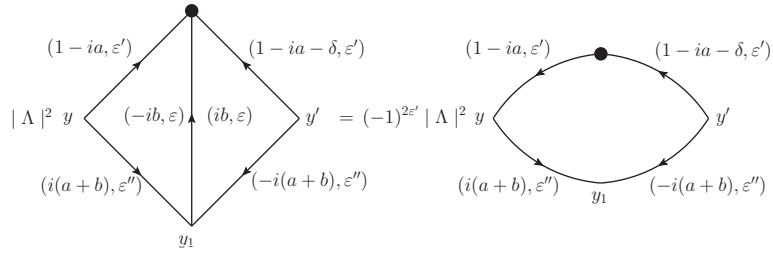


Рис. 4. Доказательство из раздела 2.5, часть 1.

$$y \xrightarrow{(1-ia, \epsilon')} \bullet \xleftarrow{(1+ia-\delta, \epsilon')} y' = \frac{\sqrt{\pi}A(1-ia, \epsilon')A(1+ia-\delta, \epsilon')}{A(1-\delta, 0)|y-y'|^{1-\delta}}$$

Рис. 5. Доказательство из раздела 2.5, часть 2.

Автор выражает благодарность С. Э. Деркачеву, А. Н. Манашову и Н. В. Харук за обсуждения и комментарии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Kitaev, *Notes on $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ representations*. (2018), arXiv:1711.08169v2.

2. A. Kitaev, S. Josephine Suh, *The soft mode in the Sachdev-Ye-Kitaev model and its gravity dual*. (2018), [arXiv:1711.08467v4](https://arxiv.org/abs/1711.08467v4).
3. M. Kirch, A. N. Manashov, *Noncompact $SL(2, \mathbb{R})$ spin chain*. — JHEP **0406** (2004), 035.
4. S. É. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov, *Separation of variables for the quantum $SL(2, \mathbb{R})$ spin chain*. — JHEP **0307** (2003), 047.
5. V. Bargmann, *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*. — Annals of Mathematics **48** (3), (1947) 568–640.
6. Harish-Chandra, *Plancherel formula for the 2×2 real unimodular group*. — Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., **38** (4), (1952) 337–342.
7. L. Pukánszky, *On the Kronecker products of irreducible representations of the 2×2 real unimodular group, I*. — Trans. Amer. Math. Soc. **100**, (1961) 116.
8. I. M. Gelfand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions*, Academic Press, Vol. 5, (1966).
9. S. Lang, *$SL_2(\mathbb{R})$* , Addison-Wesley, Reading, Mass. (1975).
10. R. P. Martin, *On the decomposition of tensor products of principal series representations for real-rank one semisimple groups*. — Trans. Amer. Math. Soc. **201**, (1975) 177–211.
11. J. Repka, *Tensor products of unitary representations of $SL_2(\mathbb{R})$* . — Bull. Amer. Math. Soc. **82** (6), (1976) 930–932.
12. J. Repka, *Tensor products of unitary representations of $SL_2(\mathbb{R})$* . — Amer. J. Math. **100** (4), (1978) 747–774.
13. W. Groenevelt, *Wilson function transforms related to Racah coefficients*, — Acta Appl. Math. **91**:2, (2006) 133–191.
14. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, Academic Press, sixth ed. (2000).

Ivanov A. V. On the completeness of projectors for tensor product decomposition of continuous series representations groups $SL(2, \mathbb{R})$.

As it is well known, the tensor product of two representations of continuous series in the case of the group $SL(2, \mathbb{R})$ can be decomposed into a direct sum of representations corresponding to the discrete and continuous spectra. From the general theory completeness of the projectors performing the decomposition follows as well. The main aim of the work is to check this equality in the sense of generalized functions. It is worth noting that in the course of calculations, a technique for working with projectors is developed, in particular, operators for unitary equivalence are built. This work can be useful in various applications, for example, for calculating of $6j$ -symbols.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: regul1@mail.ru

Поступило 7 ноября 2018 г.