Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 473, 2018 г.

А. В. Иванов

О ПРИМЕНЕНИИ МАТРИЧНОГО ФОРМАЛИЗМА ДЛЯ ТЕПЛОВОГО ЯДРА В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

К 70-летию М. А. Семенова-Тян-Шанского

§1. Введение

Данная работа является следствием техники, полученной в [1] при изучении комбинаторных свойств теплового ядра оператора Лапласа с ковариантной производной в случае калибровочной связности с гладкими компонентами. Вкратце основной результат вышеупомянутой работы может быть сформулирован следующим образом. Тепловое ядро $K(x,y,\tau)$ для d-мерного ($d>1$) оператора Лапласа с ковариантной производной $\partial_\mu+\omega_\mu(x)$ может быть представлено в виде асимптотического ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\tau^n a_n(x,y)$, коэффициенты которого называются коэффициентами Сили–ДеВитта. Вычисление данных коэффициентов является достаточно трудоемкой задачей, которая изучалась на протяжении многих лет [2]. В статье предлагается техника, позволяющая получить ответ для произвольного коэффициента (ранее похожие методы строились [3], однако они имеют принципиальные отличия). Основными элементами техники являются операторы A^μ, B^μ, S_l^μ и S_l^1, которые действуют на матрицах с двумя строками и произвольным

Ключевые слова: тепловое ядро, теория чисел, производящая функция, диаграммная техника, биалгебра, тензорная алгебра, полунорма, упорядоченная экспонента, операторная функция, калибровочная связность, матричный формализм, ковариантная производная.
Данная работа была поддержана грантом Российского Научного Фонда (номер 14-11-00598).

количеством столбцов по следующим правилам

$$B^{\mu}\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n\\ k_1 & k_2 & \dots & k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu\nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n\\ k_1+1 & k_2 & \dots & k_n\end{pmatrix}+\dots$$

$$+\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & \dots & \mu\nu_n\\ k_1+1 & k_2+1 & \dots & k_n+1\end{pmatrix},$$

$$B^{\mu}\begin{pmatrix}\mathtt{1}\\ k\end{pmatrix}=0\,,$$

$$A^{\mu}\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n\\ k_1 & k_2 & \dots & k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu & \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n\\ k_1+1 & k_1 & k_2 & \dots & k_n\end{pmatrix}+\dots$$

$$+\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & \dots & \mu & \nu_n\\ k_1+1 & k_2+1 & \dots & k_n+1 & k_n\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n & \mu\\ k_1+1 & k_2+1 & \dots & k_n+1 & 1\end{pmatrix},$$

$$S^{\mu}_{l}\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n\\ k_1 & k_2 & \dots & k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu & \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n\\ l & k_1 & k_2 & \dots & k_n\end{pmatrix},$$

где $\mu\in\{1,\dots,d\}$, $\nu_1,\dots,\nu_n\in\{1,\dots,d\}\cup\{\mathtt{1}\}$ и $l,k_1\dots,k_n\in\mathbb{N}$. Элемент $\mathtt{1}$ имеет отдельное значение, которое не будет обсуждаться в данной работе. Аналогичным образом могут быть введены оператор $S^{\mathtt{1}}_{l}$ и отображение Υ, которое переводит столбец в тензор с некоторым коэффициентом согласно правилу

$$\Upsilon\begin{pmatrix}\mu_{I_n}\nu\\ k\end{pmatrix}=\frac{1}{k}\sum_{k=1}^{n}\nabla_{\mu_{I_n\setminus k}}F_{\mu_k\nu}(x),\quad \Upsilon\begin{pmatrix}\mathtt{1}\\ k\end{pmatrix}=\frac{1}{k}\,,$$

где $k\in\mathbb{N}$, $I_n=\{1,\dots,n\}$, $\nu,\mu_1,\dots,\mu_n\in\{1,\dots,d\}$, $\mu_{I_n}=\mu_1\dots\mu_n$, $F_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu\omega_\nu(x)-\partial_\nu\omega_\mu(x)+[\omega_\mu(x),\omega_\nu(x)]$ и матрицы следует понимать в смысле набора столбцов. Таким образом, коэффициент Сили–Де Витта может быть выписан в виде:

$$a_n(x,x)=\Upsilon\prod_{k=1}^{n}S^{\mathtt{1}}_{k}(A^{\mu_k}+B^{\mu_k})(A^{\mu_k}+B^{\mu_k})\mathbb{1}\,,$$

где начальный элемент $\mathbb{1}$ определяется свойствами

$$B^{\mu}\mathbb{1}=0,\quad A^{\mu}\mathbb{1}=\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix},\quad S^{\mu}_{l}\mathbb{1}=\begin{pmatrix}\mu\\ l\end{pmatrix},\quad S^{\mathtt{1}}_{l}\mathbb{1}=\begin{pmatrix}\mathtt{1}\\ l\end{pmatrix},\quad \Upsilon\mathbb{1}=1.$$

Основными объектами изучения в данной статье являются операторы A, B и Υ, упрощенные варианты A^μ, B^μ и Υ, которые определяются при помощи формул (1, 2 и 3).

§2. Формулировка задачи

Прежде всего, для того чтобы дать определения операторов, необходимо сделать несколько оговорок. В работе рассматривается действие операторов только с одинаковыми верхними индексами (без потери общности это могут быть A^1 и B^1). Из определения видно, что при действии оператора B^μ на столбец в первом элементе добавляется дополнительный индекс μ. Поскольку первые компоненты столбцов состоят из единиц, то предлагается рассмотреть специальный случай, когда верхний элемент столбца показывает какое количество раз оператор B^1 был применен к данному столбцу. Таким образом, используя упрощения, упомянутые выше, определения изучаемых операторов имеют вид:

Определение 1.

$$A\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ k_1+1 & k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} + \dots$$
$$+ \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & 0 & s_n \\ k_1+1 & k_2+1 & \dots & k_n+1 & k_n \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n & 0 \\ k_1+1 & k_2+1 & \dots & k_n+1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Определение 2.

$$B\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1+1 & s_2 & \dots & s_n \\ k_1+1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} + \dots$$
$$+ \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n+1 \\ k_1+1 & k_2+1 & \dots & k_n+1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Определение 3.

$$\Upsilon\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \dfrac{s_i}{k_i} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ и $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Начальный элемент $\mathbb{1}$ определяется равенствами:

$$B\mathbb{1} = 0\ ,\ A\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon\mathbb{1} = 1. \tag{4}$$

Основной задачей данной работы является дать строгое математическое определение (см. (10)–(13)) операторов A, B и Υ, а также найти связь (см. (19) и (20)) между производящими функциями и числами вида

$$\varpi_n = \Upsilon(A+B)^n\mathbb{1}, \quad n \geqslant 0. \tag{5}$$

§3. Вспомогательная модель

3.1. Мотивировка. При построении модели удобно учесть несколько эвристических условий, которые делают модель проще и нагляднее и при этом не мешают изучению операторов A, B и Υ:

- компоненты связности – скалярные функции;
- первая компонента связности равна нулю ($\omega_1(x) = 0$);
- $d = 2$.

Также полезно отметить, что свойство $\partial_x^n(xe^x)\big|_{x=0} = n$ может быть использовано при построении второй компоненты, поскольку верхний элемент столбца равен степени примененного оператора B.

3.2. Двумерная модель. Набор вышеизложенных условий позволяет найти вторую компоненту связности $\omega_2(x_1, x_2)$, где $x = (x_1, x_2)$. Из построения диаграммной техники и матричного формализма следует соотношение между компонентой напряженности $F_{\mu\nu}(x)$ и определением оператора B, которое может быть сформулировано в виде

$$x_2 F_{21}(x_1, x_2) = x_1 e^{x_1}\,. \tag{6}$$

Лемма 3.1. *Классическое решение* (6) *с условием* $\omega_2(0, x_2) = 0$*, где* $x_2 \neq 0$*, имеет вид*

$$\omega_2(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2}\left(e^{x_1}(1 - x_1) - 1\right)\,. \tag{7}$$

3.3. Упорядоченная экспонента. В случае коммутирующих компонент связности упорядоченная экспонента

$$\Phi(x,y) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 ds_1 \ldots ds_n \frac{dz_1^{\nu_1}}{ds_1} \ldots \frac{dz_n^{\nu_n}}{ds_n} \omega_{\nu_1}(z_1) \ldots \omega_{\nu_n}(z_n),$$

где $z_n^\nu = y^\nu + (x^\nu - y^\nu)\prod\limits_{k=1}^{n} s_k$, может быть редуцирована к обычной экспоненциальной функции.

Лемма 3.2. *Пусть* $x = (x_1, x_2)$ *и* $y = (y_1, y_2)$, *тогда*

$$\Phi(x,y) = \exp\left\{\int\limits_{y_1}^{x_1} \frac{dt}{t}(e^t(t-1)+1)\left(\frac{(x_2-y_2)t}{(y_2(x_1-y_1)+(x_2-y_2)(t-y_1))}\right)\right\}.$$

Доказательство. Необходимо использовать (7), параметризацию $z_\mu(s) = (1-s)y_\mu + sx_\mu$ и замену переменных вида $s \mapsto t = y_1 + s(x_1 - y_1)$

$$-\int\limits_0^1 ds \frac{dz_\mu(s)}{ds}\omega_\mu(z(s)) = -\int\limits_0^1 ds \frac{x_2-y_2}{z_2(s)}\left(e^{z_1(s)}(1-z_1(s))-1\right). \quad \square$$

3.4. Производящая функция.

Теорема 3.3. *Для* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\Upsilon(A+B)^n \mathbb{1} = \partial_x^n \exp\left\{\int\limits_0^x \frac{dt}{t}(e^t(t-1)+1)\right\}\Bigg|_{x=0}. \tag{8}$$

Доказательство. После выбора начальной точки $y = (0,0)$ формула (см. [4])

$$(\partial_\mu + \omega_\mu(x))\Phi(x,y) = \int\limits_0^1 dss\frac{dz_\nu(s)}{ds}\Phi(x,z(s))F_{\nu\mu}(z(s))\Phi(z(s),y)$$

в рассматриваемом случае ($\mu = 1$, $\omega_1(x) = 0$ и $x_2 F_{21}(x_1,x_2) = x_1 e^{x_1}$) редуцируется к

$$\partial_1\Phi(x,0) = \int\limits_0^1 ds\Phi(x,sx)sx_1e^{sx_2}\Phi(sx,0).$$

Для окончания доказательства необходимо воспользоваться теоремой о дифференцировании диаграммы, поскольку:

- числа в верхних элементах столбцов получаются за счет действия производной на фактор вида ze^z, при этом степени параметров параметризации стоящих левее увеличиваются на единицу;

- действие производной на упорядоченную экспоненту приводит к появлению нового столбца и изменению индексов.

□

§4. Алгебраическая структура

Основным мотивирующим фактором для описания данной комбинаторики является оператор A, который отображает матрицу с n столбцами в набор матриц с $n+1$ столбцом. В тоже время матрицы равны (как элементы пространства) тогда и только тогда, когда все их компоненты совпадают. Данные замечания наводят на мысль о введении векторного пространства, копроизведения и других операций, которые приводят к биалгебрам (см. [5]).

4.1. Моноиды. Для дальнейшей работы удобно ввести два множества

$$G_1 = \mathbb{N} \cup \{0\}\ ,\ G_2 = \left\{\frac{1}{q} : q \in \mathbb{N}\right\} \cup \{\infty\}\,,$$

где знак бесконечности имеет смысл обратного элемента к нулю относительно стандартного произведения чисел. После введения ассоциативной бинарной операции $\star$ на G_2, которая отображает $\forall\, p,q \in G_2$ согласно правилу

$$\star : (p,q) \longmapsto \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)^{-1} \in G_2\,,$$

элемент ∞ является единицей в G_2.

Лемма 4.1. *G_1 и G_2 – моноиды относительно операций $+$ и $\star$ соответственно.*

Используя G_1 и G_2 можно определить два векторных пространства $\mathbb{R}^{G_i}$, $i = 1,2$, каждое из которых состоит из линейных комбинаций базисных векторов $\mathbb{e}^i_q$, где $q \in G_i$, соответственно.

4.2. Биалгебры. Для того чтобы построить биалгебру, необходимо достроить векторное пространство до унитальной ассоциативной алгебры и коунитальной коассоциативной коалгебры с соблюдением необходимых свойств, которые могут быть выражены в виде четырех коммутативных диаграмм. Таким образом, на $\mathbb{R}^{G_1}$ имеют место быть четыре операции:

1) умножение $\mu_1 : \mathbb{R}^{G_1} \otimes \mathbb{R}^{G_1} \longmapsto \mathbb{R}^{G_1}$, действующее согласно правилу

$$\mu_1(\mathbb{e}^1_p \otimes \mathbb{e}^1_q) = \mathbb{e}^1_{p+q}\,,\ \forall \mathbb{e}^1_p\,, \mathbb{e}^1_q \in \mathbb{R}^{G_2}\,;$$

2) единица $\eta_1 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^{G_1}$:

$$\eta_1(1) = \mathbb{e}^1_0\,;$$

3) коумножение $\Delta_1 : \mathbb{R}^{G_1} \longmapsto \mathbb{R}^{G_1} \otimes \mathbb{R}^{G_1}$, действующее согласно правилу

$$\Delta_1(\mathbb{e}^1_q) = \mathbb{e}^1_q \otimes \mathbb{e}^1_q\,,\ \forall \mathbb{e}^1_q \in \mathbb{R}^{G_1}\,;$$

4) коединица $\varepsilon_1 : \mathbb{R}^{G_1} \longmapsto \mathbb{R}$:

$$\varepsilon_1(\mathbb{e}^1_q) = 1\,,\ \forall \mathbb{e}^1_q \in \mathbb{R}^{G_1}\,.$$

Аналогичным образом μ_2, η_2, Δ_2 и ε_2 строятся для $\mathbb{R}^{G_2}$, путем замены верхнего индекса в базисных векторах и подстановкой $\star$ вместо $+$ и ∞ вместо 0.

Лемма 4.2. $(\mathbb{R}^{G_1}, \mu_1, \eta_1, \Delta_1, \varepsilon_1)$ *и* $(\mathbb{R}^{G_2}, \mu_2, \eta_2, \Delta_2, \varepsilon_2)$ *– биалгебры.*

Следствие 4.2.1. $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *– биалгебра, где*

$$V = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{G_1} \\ \mathbb{R}^{G_2} \end{pmatrix}\ ,\ \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\ ,\ \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}\ ,\ \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix}\ ,\ \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}\ .$$

4.3. Тензорная алгебра. Для построения тензорной алгебры необходимо ввести отображения $|\ |_1$ и $|\ |_2$, действующие из $\mathbb{R}^{G_1}$ и $\mathbb{R}^{G_2}$ соответственно в $\mathbb{R}$ по следующим правилам (см. [6]):

$$|\ |_1 : \mathbb{R}^{G_1} \longmapsto \mathbb{R} : \left| \sum_{g \in G_1} \alpha_g \mathbb{e}^1_g \right|_1 = \sum_{g \in G_1} |\alpha_g| g\ ,\ \forall \alpha_g \in \mathbb{R}\,,$$

$$|\ |_2 : \mathbb{R}^{G_2} \longmapsto \mathbb{R} : \left| \beta_\infty \mathbb{e}^2_\infty + \sum_{g \in G_2 \setminus \{\infty\}} \beta_g \mathbb{e}^2_g \right|_2 = \sum_{g \in G_2 \setminus \{\infty\}} |\beta_g| g\ ,\ \forall \beta_g \in \mathbb{R}\,.$$

Лемма 4.3. $|\ |_1$ *и* $|\ |_2$ *– полунормы на* $\mathbb{R}^{G_1}$ *и* $\mathbb{R}^{G_2}$ *соответственно.*

Объекты, введенные выше, могут быть обобщены до полунормы на V по формуле

$$\begin{aligned} |\ | : V \longmapsto \mathbb{R} : \left| \sum_{\substack{g_1 \in G_1, \\ g_2 \in G_2}} \alpha_{g_1,g_2} \begin{pmatrix} \mathbb{e}^1_{g_1} \\ \mathbb{e}^2_{g_2} \end{pmatrix} \right| \\ = \sum_{\substack{g_1 \in G_1, \\ g_2 \in G_2 \setminus \{\infty\}}} |\alpha_{g_1,g_2}| g_1 g_2, \qquad \forall \alpha_{g_1,g_2} \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{9}$$

которая, после определения тензорной алгебры

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes k},$$

распространяется с V на $T(V)$ аналогичным (9) образом с учетом того факта, что на $\mathbb{R}$ она является обычным модулем. Если $H = T(V)/ \overset{L}{\sim}$, где $L = \{v \in T(V) : |v| = 0\}$, то $|\ |$ - норма на H.

4.4. Алгебраическое определение операторов. Вышеизложенного набора операций не достаточно для определения операторов, ввиду этого необходимо ввести дополнительные отображения из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^{G_1}$ и $\mathbb{R}^{G_2}$:

$$\theta_1 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^{G_1}, \quad \theta_2 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^{G_2},$$

которые отображают согласно правилам:

$$\theta_1(1) = \mathbb{e}^1_1, \quad \theta_2(1) = \mathbb{e}^1_1.$$

В этом случае операторы A, B и Υ принимают достаточно ясное значение $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $|\ |$.

Теорема 4.4. *Оператор $\mathcal{A} : T(V) \longmapsto T(V)$ действует согласно правилу:*

$$\mathcal{A}(1) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} 1 = \begin{pmatrix} \mathbb{e}^1_0 \\ \mathbb{e}^2_1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\mathcal{A}(v) = \sum_{j=0}^{k-1} \mu^{\otimes(j+1)} \otimes id^{\otimes(k-j)} \circ \left(\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \otimes id \right)^{\otimes j} \otimes \begin{pmatrix} \eta_1 \otimes \eta_1 \otimes id \\ \theta_2 \otimes \Delta_2 \end{pmatrix}$$
$$\otimes\, id^{\otimes(k-1-j)} v + \mu^{\otimes k} \otimes id \circ \left(\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \otimes id \right)^{\otimes k} \otimes \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} v \,,$$
$$\forall v \in V^{\otimes k} \,,\ \forall k \in \mathbb{N}\,. \qquad (11)$$

Оператор $\mathcal{B} : T(V) \longmapsto T(V)$ *действует согласно правилу:* $\mathcal{B}(1) = 0$,

$$\mathcal{B}(v) = \sum_{j=0}^{k-1} \mu^{\otimes(j+1)} \otimes id^{\otimes(k-1-j)} \circ \left(\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \otimes id \right)^{\otimes j} \otimes \begin{pmatrix} \theta_1 \otimes id \\ \theta_2 \otimes id \end{pmatrix}$$
$$\otimes\, id^{\otimes(k-1-j)} v, \qquad \forall v \in V^{\otimes k},\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad (12)$$

Оператор $\Upsilon : T(V) \longmapsto \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$*:*

$$\Upsilon(v) = |v|,\ \ \forall v \in T(V)\,. \qquad (13)$$

Доказательство. Достаточно проверить действие формул (11) и (12) на базисных векторах из V:

$$\mu \circ \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \otimes id \begin{pmatrix} \mathbb{e}^1_{g_1} \\ \mathbb{e}^2_{g_2} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \mathbb{e}^1_0 & \mathbb{e}^1_{g_1} \\ \mathbb{e}^2_1 & \mathbb{e}^2_{g_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{e}^1_{g_1} \\ \mathbb{e}^2_{g_2\star 1} \end{pmatrix},\ \ \forall g_1 \in G_1,\ \ \forall g_2 \in G_2,$$

$$\mu \otimes id \circ \begin{pmatrix} \eta_1 \otimes \eta_1 \otimes id \\ \theta_2 \otimes \Delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{e}^1_{g_1} \\ \mathbb{e}^2_{g_2} \end{pmatrix} = \mu \otimes id \begin{pmatrix} \mathbb{e}^1_0 & \mathbb{e}^1_0 & \mathbb{e}^1_{g_1} \\ \mathbb{e}^2_1 & \mathbb{e}^2_{g_2} & \mathbb{e}^2_{g_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{e}^1_0 & \mathbb{e}^1_{g_1} \\ \mathbb{e}^2_{g_2\star 1} & \mathbb{e}^2_{g_2} \end{pmatrix},$$
$$\forall g_1 \in G_1,\ \ \forall g_2 \in G_2,$$

$$\mu \circ \begin{pmatrix} \theta_1 \otimes id \\ \theta_2 \otimes id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{e}^1_{g_1} \\ \mathbb{e}^2_{g_2} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \mathbb{e}^1_1 & \mathbb{e}^1_{g_1} \\ \mathbb{e}^2_1 & \mathbb{e}^2_{g_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{e}^1_{g_1+1} \\ \mathbb{e}^2_{g_2\star 1} \end{pmatrix},\ \ \forall g_1 \in G_1,\ \ \forall g_2 \in G_2.\ \square$$

§5. Обобщение

Полученная выше комбинаторика базируется на предположении $x_2F_{21}(x_1, x_2) = x_1 e^{x_1}$, которое контролирует действие оператора B правилом (2). Однако, от этого предположения можно отказаться, тем самым расширяя класс рассматриваемых операторов.

5.1. Производящая функция. С этой целью необходимо рассмотреть равенство более общего случая. Оно может быть записано в виде

$$x_2 F_{21}(x_1, x_2) = f(x_1)\,, \tag{14}$$

где разложение функции $f(x_1)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля дается формулой

$$f(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} x_1^k\,.$$

С учетом нового предположения, после повтора всех ранее произведенных действий, производящая функция принимает вид:

$$\Phi(x_1, 0) = \exp\left\{\int_0^{x_1} \frac{dt}{t} \int_0^t ds f(s)\right\}\,. \tag{15}$$

5.2. Алгебраическая структура. Для описания алгебраической структуры модели с условием (14) необходимо подкорректировать лишь определения отображения $|\ |_1$, то есть ядро полунормы и нормировку базисных векторов. В случае когда функция $f(x)$ имеет отрицательные коэффициенты Тейлора, отображение $|\ |_1$ теряет смысл полунормы. Формально такая трансформация выглядит так:

$$|\mathbb{e}_g^1|_1 = g\,,\ \forall g \in G_1 \longrightarrow |\mathbb{e}_g^1|_1 = b_g\,,\ \forall g \in G_1\,, \tag{16}$$

$$\mathtt{Ker}(|\ |_1) = \{\mathbb{e}_0^1\} \longrightarrow \mathtt{Ker}(|\ |_1) = \{\mathbb{e}_g^1\,,\ \forall g \in G_1 : b_g = 0\}\,. \tag{17}$$

Теорема 5.1. *Переход от модели с условием* $x_2 F_{21}(x_1, x_2) = x_1 e^{x_1}$ *к модели с условием* $x_2 F_{21}(x_1, x_2) = f(x_1)$ *может быть сделан при помощи замены производящей функции на* (15) *и изменения определения отображения* $|\ |_1$ *согласно* (16) *и* (17).

5.3. Обратная задача. Возникает естественный вопрос: возможно ли по производящей функции $F(x)$ построить такие операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и Υ, что выполнялось бы соотношение $\Upsilon(\mathcal{A} + \mathcal{B})^n 1 = F^{(n)}(0)$ для $n \geqslant 0$? Ответ положительный, и для начала нужно указать на тот факт, что функция $f(x_1)$ восстанавливается по упорядоченной экспоненте $\Phi(x_1, 0)$.

Лемма 5.2.

$$f(x_1) = \frac{\Phi(x_1,0)\Phi'(x_1,0) + x_1(\Phi(x_1,0)\Phi''(x_1,0) - (\Phi'(x_1,0))^2)}{(\Phi(x_1,0))^2}\,. \tag{18}$$

Доказательство.

$$\omega_2(x_1,x_2) = -\frac{x_1}{x_2}\partial_{x_1}\left(\ln(\Phi(x_1,0))\right),$$
$$x_2F_{21}(x_1,x_2) = -x_2\partial_{x_1}\omega_2(x_1,x_2). \qquad \square$$

Важно отметить, что в рассматриваемом случае функция $\Phi(x_1,0)$ имеет специальное свойство, а именно $\Phi(0,0)=1$. Ясно, что не каждая производящая функция равна единице в нуле, поэтому формула (18), ввиду отмеченной в [10] проблемы, не применима для произвольного случая. Однако, существует несколько способов исправить описанную схему.

Теорема 5.3. *Пусть $F(x_1)$ – производящая функция чисел такая, что $F(0)\neq 0$, тогда функция $f(x_1)$ может быть построена по формуле* (18) *для*

$$\Phi(x_1,0) = \frac{F(x_1)}{F(0)},$$

что приведет к изменению начальных данных $1 \mapsto F(0)$ в (5) *и*

$$\varpi_n = \Upsilon(\mathcal{A}+\mathcal{B})^n F(0). \tag{19}$$

Теорема 5.4. *Пусть $F(x_1)$ – произвольная производящая функция чисел, тогда функция $f(x_1)$ может быть построена по формуле* (18) *для*

$$\Phi(x_1,0) = F(x_1) - F(0) + 1,$$

что приведет к появлению невязки вида

$$\varpi_n = \Upsilon(\mathcal{A}+\mathcal{B})^n 1 + (F(0)-1)\delta_{n0}\,. \tag{20}$$

5.4. Примеры.

Числа	$F(x)$	$f(x)$
числа Каталана [7]	$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$	$\frac{1}{(1-4x)^{3/2}}$
числа Белла [9]	e^{e^x-1}	$e^x(x+1)$
биномиальное разложение	$(1+x)^\alpha, \forall\alpha\in\mathbb{C}$	$\frac{\alpha}{(1+x)^2}, \forall\alpha\in\mathbb{C}$
экспоненциальные числа [8]	$e^{sin(x)}$	$\cos(x) - x\sin(x)$

§6. Следствия

6.1. Операторная функция. Выше был изучен специальный случай $\phi(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathcal{A}+\mathcal{B})^n$, когда $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Основным интересом данной части являются числа вида $\Upsilon\phi(\mathcal{A},\mathcal{B})1$, где рассматриваемая функция имеет вид

$$\Upsilon\prod_{k=1}^{n}\Lambda_k^{\sigma_k}1\,,$$

где $n\in\mathbb{N}$, $\Lambda_k\in\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}$ и $\sigma_k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ для $k\in\{1,\ldots,n\}$. Используя диаграммную технику легко понять, что оператор $\mathcal{A}$ действует только на упорядоченные экспоненты (линии), в то время как оператор $\mathcal{B}$ дифференцирует все функции (окружности) за исключением упорядоченных экспонент. Однако в рассматриваемом случае, ввиду коммутативности компонент связности $\omega_\mu(x)$, упорядоченные экспоненты могут быть вынесены из выражений в виде единого множителя $\Phi(x,0)$, поэтому оператор $\mathcal{A}$ является оператором умножения на функцию $\partial_x\ln\Phi(x,0)$. В свою очередь оператор $\mathcal{B}$ действует как ковариантная производная со связностью вида $-\ln'_x\Phi(x,0)$.

Теорема 6.1. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $\Lambda_k\in\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}$ и $\sigma_k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ для $k\in\{1,\ldots,n\}$, и*

$$\phi(\mathcal{A},\mathcal{B})=\prod_{k=1}^{n}\Lambda_k^{\sigma_k}\,,$$

тогда

$$\Upsilon\phi(\mathcal{A},\mathcal{B})1=\phi(\ln'_x\Phi(x,0),\partial_x-\ln'_x\Phi(x,0))\Phi(x,0)\big|_{x=0}\,.$$

6.2. Оценки упорядоченной экспоненты. Полученные выше числа ϖ_n могут быть использованы для локальных оценок ковариантных производных упорядоченной экспоненты.

Теорема 6.2. *Пусть размерность пространства равна d, $\nabla_\mu=\partial_\mu+\omega_\mu(x)$, $\Phi(x,y)$ - упорядоченная экспонента, построенная по компонентам связности $\omega_\mu(x)$ и в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$, где $\delta>0$, некоторой точки $x_0\in\mathbb{R}^d$ $\exists C>0:$ при $x\in U_\delta(x_0)$ выполнены неравенства вида*

$$|\nabla_{\mu_1}\cdot\ldots\cdot\nabla_{\mu_{k-2}}F_{\mu_{k-1}\mu_k}(x)|\leqslant C^k\,,\ \forall k>1\,,\ \forall\mu_1,\ldots,\mu_k\in\{1,\ldots,d\}\,,$$

тогда

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\nabla^{\mu_k}\nabla_{\mu_k}\Phi(x,y)\Big|_{y=x}\right|\leqslant d^nC^{2n}\varpi_{2n}\,,\ \forall n\in\mathbb{N}\,,$$

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\int_{0}^{1} dss^{k-1}s^{(x-y)^{\rho}\partial_{\rho}}\nabla^{\mu_k}\nabla_{\mu_k}\Phi(x,y)\Big|_{y=x}\right| \leqslant d^{n}C^{2n}\frac{\varpi_{2n}}{n!}\,,\ \forall n\in\mathbb{N}\,.$$

Список литературы

1. A. V. Ivanov, *Diagram technique of the heat kernel of the covariant Laplace operator*. — Theor. Math. Phys. (to appear)
2. H. P. McKean and I. M. Singer, J. Diff. Geom., **1** (1967), 43–69;
   P. Gilkey, J. Diff. Geom., **10** (1975), 601–618
   P. Amsterdamski, A. L. Berkin, D. J. O'Connor, Class. Quant. Grav., **6** (1989), 1981—1991;
   I. G. Avramidi, Phys. Lett. B, **238** (1990), 92–97;
   I. G. Avramidi, Nucl. Phys. B, **355** (1991), 712–754;
   A. E. M. van de Ven, Class. Quant. Grav., **15** (1998), 2311–2344;
   D. V. Vassilevich, Phys. Rep., **388** (2003), 279–360.
3. A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky, Nucl. Phys. B, **282** (1987), 163–188;
   A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky, Nucl. Phys. B, **333** (1990), 471–524;
   I. G. Avramidi, Commun. Math. Phys., **288** (2009), 963–1006.
4. Graham M. Shore, Annals of physics, **137** (1981), 262–305.
5. S. Dascalescu, C. Nastasescu, S. Raianu, *Hopf algebras: an introduction*, Monographs in Pure and Applied Mathematics, **235**, Marcel Dekker, New York, 2000;
   Moss E. Sweedler, *Hopf algebras*, Mathematics Lecture Note Series, New York, 1969.
6. Eugene F. Krause, *Taxicab Geometry*, Courier Corporation, 1975.
7. P. Hilton, J. Pedersen, Math. Int., **13** (1991), 64–75.
8. E. T. Bell, Amer. Math. Monthly, **41** (1934), 411–419;
   J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, NY, 1958.
9. G. T. Williams, Amer. Math. Monthly, **52** (1945), 323–327;
   E. A. Enneking, J, C. Ahuja, **14** (1976), 67–73.
10. M. Pourahmadi, Amer. Math. Monthly, **91** (1984), 303–307.

Ivanov A. V. On the application of matrix formalism of heat kernel to the number theory.

Earlier, in the studies of the combinatorial properties of the heat kernel of Laplace operator with covariant derivative, the diagram technique and the matrix formalism were constructed. In particular, the obtained formalism makes it possible to control the coefficients of the heat kernel, that is rather useful for calculations. In this paper, a simple case with abelian connection in two-dimensional space is considered. We give a mathematical description of operators and find a relation between operators and generating functions of numbers.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
набережная реки Фонтанки 27,
191023, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: regul1@mail.ru

Поступило 4 октября 2018 г.