Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 473, 2018 г.

Е. В. Дамаскинский, М. А. Соколов

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Посвящается юбилею М. А. Семенова-Тян-Шанского

1. В этой заметке будут получены дифференциальные операторы, собственными функциями которых являются полиномы Чебышева первого рода от нескольких переменных, ассоциированные с корневыми системами простых алгебр Ли C_2 и G_2. Ранее в работе Коорнвиндера [1] такие операторы (второго и третьего порядков) были найдены для полиномов, ассоциированных с алгеброй A_2.

Классические ортогональные полиномы появляются в физике при решении различных задач на собственные значения для линейных дифференциальных операторов. Стандартные примеры: задачи о 3d-гармоническом осцилляторе и об атоме водорода. Уравнение Шредингера в этих примерах допускает разделение переменных и его решение сводится, в конечном итоге, к решению задач на собственные значения для линейных дифференциальных операторов второго порядка от одной переменной. Первый из приведенных примеров дает полиномы Эрмита, второй – полиномы Лагерра. Если рассматриваемое уравнение не обладает симметрией, допускающей разделение переменных, то при его решении могут возникать ортогональные полиномы от нескольких переменных. Поэтому представляют интерес дифференциальные операторы, собственными функциями которых являются ортогональные полиномы от нескольких переменных.

В последние десятилетия интенсивно изучалось обобщение классических полиномов Чебышева на случай нескольких переменных (см.,

Ключевые слова: ортогональные многочлены; Многочлены Чебышева двух переменных.

например [1–6] и монографию [10]). Полиномы Чебышева (первого рода) от нескольких переменных в рамках этого обобщения определяются через инвариантные средние по группам Вейля $W(L)$ соответствующих простых алгебр Ли L

$$T_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in \mathrm{W}} e^{(w\,\mathbf{n}, \boldsymbol{\phi})}, \quad T_{\tilde{w}\,\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = T_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}), \quad \forall \tilde{w} \in W, \tag{1}$$

где $|W|$ – порядок группы Вейля, $\mathbf{n}$ выражается в базисе фундаментальных весов $\{\lambda_i\}$, а угловые переменные $\boldsymbol{\phi}$ в дуальном ему базисе кокорней $\{\alpha_i^\vee\}$

$$\mathbf{n} = \sum_{i=1}^{d} n_i \lambda_i \quad n_i \in Z, \quad \boldsymbol{\phi} = \sum_{i=1}^{d} \phi_i \alpha_i^\vee \quad \phi_i \in [0, 2\pi), \quad (\lambda_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}.$$

Напомним, что любой кокорень $\alpha_i^\vee$ определяется корнем α соотношением

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}.$$

Новые переменные x_i (обобщенные косинусы) определяются формулами

$$x_i \; = T_{\mathbf{e}_i}(\boldsymbol{\phi}), \quad \mathbf{e}_i = (\overbrace{0, .., 0}^{i-1}, 1, \overbrace{0, .., 0}^{d-i}). \tag{2}$$

В цитированных выше работах показано, что переход к новым переменным возможен для любых простых алгебр Ли.

2. Классические полиномы Чебышева первого рода [8, 9] связаны с группой Вейля $W(A_1)$ алгебры A_1, состоящей из единичного элемента w_0 и отражения единственного положительного корня $w_1\lambda = -\lambda$

$$T_n(\phi) = \frac{1}{2}(e^{in\phi} + e^{-in\phi}) = \cos n\phi, \quad x = \cos\phi.$$

Переход в $T_n(\phi)$ от переменной ϕ к переменной x воспроизводит классические полиномы Чебышева первого рода.

Для построения оператора, собственными функциями которого являются классические полиномы Чебышева первого рода $T_n(x)$, воспользуемся тем, что $T_n(\phi) = \cos n\phi$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mathrm{d}^2 T_n(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2} = -n^2 T_n(\phi).$$

Заменяя в этом уравнении переменную $\phi \to x$, немедленно приходим к хорошо известному оператору

$$L^{A_1}(x) = (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

Этим простым рецептом мы воспользуемся для вывода операторов, собственными функциями которого являются полиномы Чебышева нескольких переменных.

Как было отмечено выше, операторы, собственными функциями которых являются полиномы, ассоциированные с алгеброй Ли A_2, были получены в работе [1]. Тем не менее, в данном разделе мы подробно разберем этот случай, потому, что наш рецепт отличается от рецепта [1].

Группа Вейля $W(A_2)$ алгебры Ли A_2 порождается двумя генераторами w_1, w_2 и содержит еще четыре элемента

$$w_3 = w_1 w_2, \quad w_4 = w_2 w_1, \quad w_5 = w_1 w_2 w_1, \quad w_0 = e. \tag{3}$$

Действие генераторов на фундаментальные веса

$$w_1\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad w_1\lambda_2 = \lambda_2, \quad w_2\lambda_1 = \lambda_1, \quad w_2\lambda_2 = \lambda_1 - \lambda_2,$$

вместе с формулами (3), позволяют, в соответсвии с определением (1), получить $W(A_2)$-инвариантную функцию двух переменных $T_{m,n}(\phi,\psi)$

$$\begin{aligned} T_{m,n}(\phi,\psi) = {} & e^{im\phi}e^{in\psi} + e^{im(\psi-\phi)}e^{in\psi} + e^{im\phi}e^{in(\phi-\psi)} \\ & + e^{im(\psi-\phi)}e^{-in\phi} + e^{-im\psi}e^{in(\phi-\psi)} + e^{-im\psi}e^{-in\phi}. \end{aligned} \tag{4}$$

В выражении (4) опущен нормировочный множитель, так как для наших целей он не существенен. Легко видеть, что функция $T_{m,n}(\phi,\psi)$ вещественна. Поэтому будем искать такие дифференциальные операторы L_N в частных производных по угловым переменным (ϕ,ψ), с вещественными постоянными коэффициентами a_k, $k = 0,\ldots,N$

$$L_N = \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\partial^N}{\partial\phi^{(N-k)}\partial\psi^k}, \tag{5}$$

для которых имеют место соотношения

$$L_N(T_{m,n}) = E_{m,n}T_{m,n}. \tag{6}$$

Здесь $E_{m,n}$ – некоторые числа, зависящие только от целых неотрицательных m, n. В формуле (5) мы учли, что из-за произвольности целых чисел m, n в оператор L_N достаточно включить только дифференцирования с одинаковым показателем мультистепени N.

Для выполнения соотношения (6) необходимо, чтобы при действии оператора L_N на функцию $T_{m,n}$ (4), у каждого члена суммы появлялся один и тот же множитель $E_{m,n}$. С учетом вида оператора L_N, это требование приводит к необходимости выполнения цепочки равенств

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} a_k m^{N-k} n^k &= \sum_{k=0}^{N} a_k (-m)^{N-k} (m+n)^k = \sum_{k=0}^{N} a_k (m+n)^{N-k} (-n)^k \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k (-m-n)^{N-k} (m)^k = \sum_{k=0}^{N} a_k n^{N-k} (-m-n)^k \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k (-n)^{N-k} (-m)^k.\end{aligned}$$

Некоторые заключения о свойствах коэффициентов a_k можно сделать непосредственно из вида этих сумм. Например, меняя индекс суммирования $k \to N-k$ в последнем члене цепочки и сравнивая его с первым, получаем

$$\sum_{k=0}^{N} a_k m^{N-k} n^k = (-1)^N \sum_{k=0}^{N} a_{N-k} m^{N-k} n^k.$$

Поскольку числа m и n являются произвольными целыми неотрицательными, то отсюда следуют равенства $a_k = a_{N-k}$ для четных N, и $a_k = -a_{N-k}$ для нечетных N.

Для того, чтобы точно определить a_k, необходимо решать системы уравнений, получающихся приравниванием коэффициентов при одинаковых мономах $m^p n^q$ в суммах цепочки. Задачу решения полученной системы удобно переформулировать как задачу отыскания общих собственных векторов

$$V_{N+1} = (a_0, a_1, ..., a_N)$$

с единичным собственным значением матриц, возникающих из приведенной выше цепочки. Для примера рассмотрим равенство между первой и второй суммами цепочки. Стандартные комбинаторные формулы позволяют написать

$$\mathtt{M}_1 V_{N+1} = E_{N+1} V_{N+1} = V_{N+1},$$

где E_{N+1} – единичная матрица порядка $N+1$, $\mathtt{M}_1$ – нижнетреугольная матрица того же порядка с матричными элементами

$$(\mathtt{M}_1)_{ij} = (-1)^{j+1}\binom{N+1-j}{N+1-i}, \quad i,j = 1,..N+1, \tag{7}$$

где $\binom{j}{i}$ – биномиальный коэффициент. Из равенства между первой и третьей суммой находим

$$\mathtt{M}_2 V_{N+1} = V_{N+1},$$

где верхнетреугольная матрица M_2 имеет матричные элементы

$$(\mathtt{M}_2)_{ij} = (-1)^{j+1}\binom{j-1}{i-1}, \quad i,j = 1,\ldots,N+1. \tag{8}$$

Аналогично можно получить и матрицы $M_i,\ i = 3,4,5$, возникающие из равенства первой и, соотвественно, $i-$ой сумм. Легко проверяется, что так вычисленные матрицы совпадают с матрицами, определяемыми формулами

$$\mathtt{M}_3 = \mathtt{M}_1\mathtt{M}_2, \quad \mathtt{M}_4 = \mathtt{M}_2\mathtt{M}_1, \quad \mathtt{M}_5 = \mathtt{M}_1\mathtt{M}_2\mathtt{M}_1, \quad \mathtt{M}_0 = E_{N+1}.$$

Кроме этого, при соответствии $\mathtt{M}_i \sim w_i$ мы вопроизведем таблицу умножения группы Вейля $W(A_2)$ вместе с равенствами

$$\mathtt{M}_1^2 = \mathtt{M}_2^2 = \mathtt{M}_5^2 = \mathtt{M}_3^3 = \mathtt{M}_4^3 = E_{N+1}, \qquad \mathtt{M}_3^2 = \mathtt{M}_4, \quad \mathtt{M}_4^2 = \mathtt{M}_3.$$

Из сказанного вытекает, что множество матриц $\mathtt{M}_i$, $i = 0,\ldots,5$ реализуют $N+1$-мерное представление группы Вейля $W(A_2)$. Следовательно, координаты любого общего собственного вектора матриц $\mathtt{M}_1$ и $\mathtt{M}_2$, соответствующих порождающим элементам, дают нам кэффициенты a_k искомого оператора L_N из формулы (5), а собственные числа этих векторов вычисляются по формуле

$$E_N = \sum_{k=0}^{N} a_k m^{(N-k)} n^k. \tag{9}$$

Используя явные выражения для матриц (7), (8) для случаев $N = 2,3$, получаем

$$N = 2, \quad V_3^{A_2} = (1,1,1), \quad N = 3, \quad V_4^{A_2} = (2,3,-3,-2).$$

Соответствующие независимые операторы в угловых переменных и их спектры имеют вид

$$L_3^{A_2} = \partial^2_{\phi^2} + \partial^2_{\phi\psi} + \partial^2_{\psi^2}, \quad E_3^{A_2}(m,n) = m^2 + mn + n^2,$$

$L_4^{A_2} = 2\partial^3_{\phi^3} + 3\partial^3_{\phi^2\psi} - 3\partial^3_{\phi\psi^2} - 2\partial^3_{\psi^3}$, $E_4^{A_2}(m,n) = 2m^3 + 3m^2n - 3mn^2 - 2n^2$.

Операторы более высоких порядков можно найти по формуле

$$L = P(L_3^{A_2}, L_4^{A_2}),$$

где P является произвольным полиномом от двух переменных с вещественными коэффициентами.

Как последний этап построения искомых операторов, необходимо перейти от угловых переменных (ϕ, ψ) к переменным (x, y), определяемым формулами (2)

$$x = \frac{1}{2}T_{1,0} = e^{i\phi} + e^{i(\psi-\phi)} + e^{-i\psi},$$

$$y = \frac{1}{2}T_{0,1} = e^{i\psi} + e^{i(\phi-\psi)} + e^{-i\phi}.$$

Этот переход приводит в случае $N = 2$ к оператору

$$L_{(1)}^{A_2} = (x^2 - 3y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (xy - 9)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (y^2 - 3x)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}. \quad (10)$$

Этому оператору удовлетворяют полиномы Чебышева двух переменных первого рода, ассоциированные с алгеброй Ли A_2. Оператор (10) совпадает с полученным ранее Коорнвиндером в работе [1], где можно найти и оператор третьего порядка.

3. В этом и следующем разделах мы будем действовать так же, как и в случае полиномов, ассоциированных с алгеброй Ли A_2.

Корневая система алгебры Ли C_2 имеет два фундаментальных корня α_1, α_2 и включает положительные корни $\alpha_1 + \alpha_2$, $2\alpha_1 + \alpha_2$ и их отражения. Действие порождающих элементов w_1, w_2 группы Вейля $W(C_2)$ на фундаментальные веса дается формулами

$$w_1\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad w_1\lambda_2 = \lambda_2, \quad w_2\lambda_1 = \lambda_1, \quad w_2\lambda_2 = 2\lambda_1 - \lambda_2. \quad (11)$$

Действие остальных элементов группы определяется их представлением через порождающие элементы

$$\begin{aligned} &w_3 = w_1w_2, \quad w_4 = w_2w_1, \quad w_5 = w_1w_2w_1, \\ &w_6 = w_2w_1w_2, \quad w_7 = (w_1w_2)^2, \quad e = w_0. \end{aligned} \quad (12)$$

С помощью формул (11), (12) и определения (1) находится $W(C_2)$-инвариантная функция

$$\begin{aligned}T^{C_2}_{m,n}(\phi,\psi) = e^{2\pi\mathrm{i}(m\phi+n\psi)} &+ e^{2\pi\mathrm{i}(m(\psi-\phi)+n\psi))} + e^{2\pi\mathrm{i}(m\phi+n(2\phi-\psi))}\\ &+ e^{2\pi\mathrm{i}(m(\psi-\phi)+n(-2\phi+\psi))} + e^{2\pi\mathrm{i}(m(\phi-\psi)+n(2\phi-\psi))}\\ &+ e^{2\pi\mathrm{i}(-m\phi+n(-2\phi+\psi))} + e^{2\pi\mathrm{i}(m(\phi-\psi)-n\psi)}\\ &+ e^{2\pi\mathrm{i}(-m\phi-n\psi)}.\end{aligned} \tag{13}$$

Действие на эту функцию оператора (5) приводит к появлению у каждого слагаемого суммы (13) коэффициента, зависящего от m и n. Требование равенства этих коэффициетов приводит к условиям (выписываются только независимые)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} a_k m^{N-k} n^k = \sum_{k=0}^{N} a_k (m)^{N-k}(-m-n)^k = \sum_{k=0}^{N} a_k (m+2n)^{N-k}(-n)^k\\ = \sum_{k=0}^{N} a_k (m+2n)^{N-k}(-m-n)^k = \sum_{k=0}^{N} a_k (-m)^{N-k}(-n)^k.\end{aligned}$$

Из равенства первой и последней суммы немедленно вытекает, что отличными от нуля могут быть только коэффициенты a_k для четных N. В этом случае матричные элементы матриц $\mathtt{M}_i,\ i=1,2$, возникающих, также как и в предыдущем разделе, имеют следующий вид

$$(\mathtt{M}_1)_{ij} = (-1)^{j+1}\binom{N+1-j}{N+1-i},\quad (\mathtt{M}_2)_{ij} = (-1)^{j+1}2^{j-i}\binom{j-1}{i-1},\quad i,j=1,\dots,N+1.$$

Полученные матрицы коммутируют и удовлетворяют равенствам

$$[\mathtt{M}_1,\mathtt{M}_2]=0,\quad \mathtt{M}_1^2=\mathtt{M}_2^2=E_{N+1}.$$

Кроме матриц $\mathtt{M}_i,\ i=1,2$ существует только одна независимая матрица M_3

$$\mathtt{M}_3=\mathtt{M}_1\mathtt{M}_2.$$

Координаты a_k общих собственных векторов с единичным собственным значением матриц $\mathtt{M}_i,\ i=1,2$ дают нам коэффициенты оператора $L_N^{(C_2)}$ (5). Для порядков $N=2,4$ приходим к следующим результатам

$$\begin{aligned}&N=2,\quad V_3^{C_2}=(1,2,2),\quad N=4,\\ &V_{5a}^{C_2}=(1,4,1,0,0),\quad V_{5b}^{C_2}=(0,0,1,2,1).\end{aligned}$$

Соответствующие независимые операторы в угловых переменных и их спектры имеют вид

$$L_3^{C_2} = \partial^2_{\phi^2} + 2\partial^2_{\phi\psi} + 2\partial^2_{\psi^2}, \quad E_3^{C_2}(m,n) = m^2 + 2mn + 2n^2,$$
$$L_{5a}^{C_2} = \partial^4_{\phi^4} + 4\partial^4_{\phi^3\psi} + \partial^4_{\phi^2\psi^2}, \quad E_{5a}^{C_2}(m,n) = m^2(m^2 + 4mn + n^2).$$
$$L_{5b}^{C_2} = \partial^4_{\phi^2\psi^2} + 2\partial^4_{\phi\psi^3} + \partial^4_{\psi^4}, \quad E_{5b}^{C_2}(m,n) = n^2(m+n)^2.$$

Переход к операторам $L_N^{(C_2)}$ в координатах (x,y) осуществляется с помощью замены (2)

$$x = \frac{1}{2}T_{1,0} = e^{2\pi \mathrm{i}\phi} + e^{-2\pi \mathrm{i}\phi} + e^{2\pi \mathrm{i}(\phi-\psi)} + e^{-2\pi \mathrm{i}(\phi-\psi)}, \tag{14}$$

$$y = \frac{1}{2}T_{0,1} = e^{2\pi \mathrm{i}\psi} + e^{-2\pi \mathrm{i}\psi} + e^{2\pi \mathrm{i}(2\phi-\psi)} + e^{-2\pi \mathrm{i}(2\phi-\psi)}. \tag{15}$$

Для оператора второго порядка (случай $N = 2$)

$$L^{C_2}(\phi,\psi) = \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\psi\partial\psi} + 2\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}$$

получаем

$$L^{C_2}(x,y) = (x^2 - 2y - 8)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2x(y-4)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + 2(y^2 + 4y - 2x^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

4. Рассмотрим теперь полиномы, ассоциированные с простой алгеброй G_2. Корневая система этой алгебры кроме двух фундаментальных корней α_1, α_2, включает положительные корни $\alpha_1 + \alpha_2$, $2\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + 2\alpha_2$ и их отражения. Действие порождающих элементов w_1, w_2 группы Вейля $W(G_2)$ на фундаменитальные веса даются формулами

$$w_1\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad w_1\lambda_2 = \lambda_2, \quad w_2\lambda_1 = \lambda_1, \quad w_2\lambda_2 = 2\lambda_1 - \lambda_2.$$

Действие других элементов группы определяется их представлением через порождающие элементы

$$w_3 = w_1w_2,\ w_4 = w_2w_1,\ w_5 = w_2w_1w_2,\ w_6 = w_1w_2w_1,\ w_7 = (w_1w_2)^2,$$
$$w_8 = (w_2w_1)^2,\ w_9 = w_2(w_1w_2)^2,\ w_{10} = w_1(w_2w_1)^2,\ w_{11} = (w_1w_2)^3,\ w_0 = e.$$

Используя выписанные формулы и определение (1), приходим к следующей $W(G_2)$-инвариантной функции

$$\begin{aligned} T^{G_2}_{m,n} &= e^{2\pi \mathrm{i}(m\phi+n\psi)} + e^{2\pi \mathrm{i}(m(-\phi+\psi)+n(-3\phi+2\psi))} \\ &+ e^{2\pi \mathrm{i}(m(2\phi-\psi)+n(3\phi-\psi))} + e^{2\pi \mathrm{i}(-(m\phi+n\psi))} \\ &+ e^{2\pi \mathrm{i}(-(m(-\phi+\psi)+n(-3\phi+2\psi)))} \\ &+ e^{2\pi \mathrm{i}(-(m(2\phi-\psi)+n(3\phi-\psi)))} + e^{2\pi \mathrm{i}(m\phi+n(3\phi-\psi))} \\ &+ e^{2\pi \mathrm{i}(m(-\phi+\psi)+n\psi)} + e^{2\pi \mathrm{i}(m(2\phi-\psi)+n(3\phi-2\psi))} \\ &+ e^{2\pi \mathrm{i}(-(m\phi+n(3\phi-\psi)))} + e^{2\pi \mathrm{i}(-(m(-\phi+\psi)+n\psi))} \\ &+ e^{2\pi \mathrm{i}(-(m(2\phi-\psi)+n(3\phi-2\psi)))}. \end{aligned} \tag{16}$$

Действуя на функцию $T^{G_2}_{m,n}(\phi,\psi)$ оператором (5), получаем перед каждым слагаемым (16) коэффициенты, которые должны быть равными. Условие их равенства дает нам следующие соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} a_k m^{N-k} n^k &= \sum_{k=0}^{N} a_k (m)^{N-k}(-m-n)^k = \sum_{k=0}^{N} a_k (m+3n)^{N-k}(-n)^k \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k (2m+3n)^{N-k}(-m-n)^k \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k (m+3n)^{N-k}(-m-2n)^k \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k (2m+3n)^{N-k}(-m-2n)^k. \end{aligned}$$

Равенство первой и второй сумм и первой и третьей дают нам, соответственно, матрицу $\mathtt{M}_1$ (которая совпадает с матрицами $\mathtt{M}_1$ в случаях алгебр A_2 и C_2) и матрицу $\mathtt{M}_2$

$$(\mathtt{M}_1)_{ij} = (-1)^{j+1}\binom{N+1-j}{N+1-i}, \quad (\mathtt{M}_2)_{ij} = (-1)^{j+1}3^{j-i}\binom{j-1}{i-1}, \quad i,j = 1,\dots,N+1.$$

Остающиеся матрицы определяются как

$$\mathtt{M}_3 = \mathtt{M}_1\mathtt{M}_2, \quad \mathtt{M}_4 = \mathtt{M}_2\mathtt{M}_1, \quad \mathtt{M}_5 = \mathtt{M}_1\mathtt{M}_2\mathtt{M}_1 = \mathtt{M}_2\mathtt{M}_1\mathtt{M}_2.$$

Координаты a_k общих собственных векторов с единичным собственным значением матриц $\mathtt{M}_i$, $i = 1, 2$ дают нам коэффициенты оператора

$L_N^{(C_2)}$ (5). Для случая $N=2$ мы получаем следующий результат (решений для нечетных N не существует)

$$N=2, \quad V_3^{G_2}=(1,3,3).$$

Соответствующий оператор в угловых переменных равен

$$L_3^{G_2}=\partial^2_{\phi^2}+3\partial^2_{\phi\psi}+3\partial^2_{\psi^2}, \quad E_3^{G_2}(m,n)=m^2+3mn+3n^2. \tag{17}$$

Вычисление в случаях $N=4,6$ дает только

$$L_5^{G_2}=\left(L_3^{G_2}\right)^2, \quad L_7^{G_2}=\left(L_3^{G_2}\right)^3.$$

Переход от угловых координат к координатам (x,y) проводим используя формулы (2)

$$x=\frac{1}{2}T_{1,0}^{G_2}=e^{2\pi \mathrm{i}(\phi)}+e^{2\pi \mathrm{i}(-\phi+\psi)}+e^{2\pi \mathrm{i}(2\phi-\psi)}+e^{2\pi \mathrm{i}(-\phi)} + e^{2\pi \mathrm{i}(-(-\phi+\psi))}+e^{2\pi \mathrm{i}(-(2\phi-\psi))},$$

$$y=\frac{1}{2}T_{0,1}^{G_2}=e^{2\pi \mathrm{i}(\psi)}+e^{2\pi \mathrm{i}(-3\phi+2\psi)}+e^{2\pi \mathrm{i}(3\phi-\psi)}+e^{2\pi \mathrm{i}(-\psi)} + e^{2\pi \mathrm{i}(\phi-2\psi)}+e^{2\pi \mathrm{i}(-3\phi+\psi)}.$$

Для оператора второго порядка (17) получаем

$$L^{G_2}(x,y)=(x^2-3x-y-12)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(3xy-6x^2+12y+36)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (3y^2+9y-3x^3+9xy+27x)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+x\frac{\partial}{\partial x}+3y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Список литературы

1. T. H. Koornwinder, *Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators* I-IV. — Indagationes Mathematicae. **77** (1974), 48–66, 357–81.
2. T. H. Koornwinder, *Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials*, in: Theory and application of special functions, R. A. Askey (ed.), Academic Press (1975), pp. 435–495.
3. G. J. Heckman, *Root systems and hypergeometric functions*: II, — Comp. Math. **64** (1987), 353–373.
4. M. E. Hoffman, W. D. Withers, *Generalized Chebyshev polynomials associated with affine Weyl groups*. — Trans. Am. Math. Soc. **308** (1988), 91–104.
5. R. J. Beerends, *Chebyshev polynomials in several variables and the radial part Laplace - Beltrami operator*. — Trans. Am. Math. Soc. **328** (1991), 770–814.
6. A. Klimyk, J. Patera, *Orbit functions*. — SIGMA. **2** (2006).

7. Ken B. Dunn, Rudolf Lidl, *Generalizations of the classical Chebyshev polynomials to polynomials in two variables.* — Cz. Math. J., **32** (1982), 516–528.
8. T. Rivlin, *The Chebyshev Polynomials*, Wiley-Interscience publication, New York, 1974.
9. Н. Н. Лебедев, *Специальные функции и их приложения.* ФМЛ (1963).
10. П. К. Суетин, *Ортогональные многочлены по двум переменным*, ФМ (1988).

Damaskinskiy E. V., Sokolov M. A. On differential operators for Chebyshev polynomials of several variables.

We obtain the differential operators for bivariate Chebyshev polynomials of the first kind, associated with root systems of the simple Lie algebras C_2 and G_2.

Военный институт (инженерно технический)
Захарьевская 22,
191123 С.-Петербург, Россия
E-mail: evd@pdmi.ras.ru

Поступило 17 сентября 2018 г.

Военная академия связи им. С. М. Буденного
Тихорецкий пр., 3,
194064 С.-Петербург, Россия
E-mail: masokolov@gmail.com