Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 473, 2018 г.

Т. А. Болохов

СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В СОЛЕНОИДАЛЬНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ

К 70-летию М. А. Семенова-Тян-Шанского

Введение

В работе [2] производится вычисление скалярных произведений регулярных аналитических векторов симметрического оператора Лапласа, заданного на множестве соленоидальных функций, исчезающих в выделенной точке трехмерного пространства. Показывается, что такой оператор имеет индексы дефекта (3,3) и, таким образом, для него в каждой точке регулярности существует 3 независимых регулярных аналитических вектора. Самосопряженные расширения этого оператора с физической точки зрения описывают взаимодействие соленоидального поля с точечным источником. Описание взаимодействия соленоидального поля с двумя или несколькими источниками является более сложной задачей, для которой, тем не менее, в ряде случаев можно построить резольвенту оператора энергии. Для реализации этой цели в данной работе исследуются свойства матрицы скалярных произведений регулярных аналитических векторов симметрического оператора Лапласа, заданного на множестве функций, исчезающих в нескольких выделенных точках пространства $\mathbb{R}^3$. Показывается, что для соленоидального поля, в отличие от скалярного случая, скалярные произведения убывают не экспоненциально, а как обратная третья степень расстояния между источниками.

Напомним основные формулы, необходимые для работы с оператором Лапласа в соленоидальном подпространстве. В статье [3] показано, что трехмерные соленоидальные векторные функции трех переменных

Ключевые слова: оператор Лапласа, соленоидальные векторные функции, самосопряженные расширения операторов, формула Крейна для ядра резольвенты.

Работа написана при поддержке гранта РФФИ 17-01-00283.

в сферической системе отсчета могут быть представлены (параметризованы) с помощью двух наборов радиальных функций $\{u_{lm}(r)\}$, $\{\phi_{lm}(r)\}$, $1 \leqslant l$, $|m| \leqslant l$ в следующем виде:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\leqslant l, |m|\leqslant l} \Big(\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\boldsymbol{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\boldsymbol{\Psi}_{lm}\Big) + \sum_{1\leqslant l, |m|\leqslant l} \frac{\phi_{lm}}{r}\boldsymbol{\Phi}_{lm}, \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\Big(r, \frac{\boldsymbol{x}}{r}\Big), \quad r = |\boldsymbol{x}|, \quad \hat{l} = \sqrt{l(l+1)},$$

а $\boldsymbol{\Upsilon}$ и $\boldsymbol{\Psi}$ – это векторные сферические гармоники [8]

$$\boldsymbol{\Upsilon}_{lm}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{r}\Big) = \frac{\boldsymbol{x}}{r}Y_{lm}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{r}\Big), \quad 0 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{lm}(\frac{\boldsymbol{x}}{r}) = (l(l+1))^{-1/2} r\boldsymbol{\partial} Y_{lm}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{r}\Big), \quad 1 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{lm}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{r}\Big) = (l(l+1))^{-1/2}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\partial})Y_{lm}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{r}\Big), \quad 1 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l. \tag{4}$$

Выполнение условия соленоидальности

$$\sum_k \partial_k f^k(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$$

следует из представления

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\leqslant l, |m|\leqslant l} \Big(\boldsymbol{\partial}\times\frac{u_{lm}}{r}\boldsymbol{\Phi}_{lm} + \frac{\phi_{lm}}{r}\boldsymbol{\Phi}_{lm}\Big)$$

и равенства нулю дивергенции каждого слагаемого

$$\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial}\times\frac{u_{lm}}{r}\boldsymbol{\Phi}_{lm} = 0,$$

$$\boldsymbol{\partial}\cdot\frac{\phi_{lm}}{r}\boldsymbol{\Phi}_{lm} = \Big(\Big(\frac{\phi_{lm}}{r}\Big)'\boldsymbol{x} + \frac{\phi_{lm}}{r}\boldsymbol{\partial}\Big)\cdot\hat{l}^{-1}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\partial})Y_{lm}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{r}\Big) = 0.$$

Действие оператора Лапласа (дифференциальной операции)

$$\Delta = -\sum_k \partial_k^2$$

на функции вида (1) сводится к действию на параметры u_{lm}, ϕ_{lm} радиальных операторов

$$T_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2},$$

так что

$$\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l} \Big(\hat{l}\frac{T_l u_{lm}}{r^2}\boldsymbol{\Upsilon}_{lm} + \frac{T_l u'_{lm}}{r}\boldsymbol{\Psi}_{lm}\Big) + \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l} \frac{T_l\phi_{lm}}{r}\boldsymbol{\Phi}_{lm}.$$

В работе [4] показывается, что операторы T_l, действуя на множестве гладких функций, быстро убывающих в окрестности начала координат

$$\mathring{\mathcal{W}}_l = \{u(r):\ u \in \mathcal{H}_l,\ T_l u \in \mathcal{H}_l,\ u''(0) = 0\}, \quad l \geqslant 1, \tag{5}$$

в индуцированном из пространства $\mathbb{R}^3$ скалярном произведении $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_l$ для параметров u_{lm} при $l = 1$ являются симметрическими операторами с индексами дефекта $(1,1)$. При этом дефектные векторы (то есть решения уравнений $(T_1^* \mp i\chi^2)c_\pm = 0$) имеют следующий вид

$$c_\pm(r) = r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\exp\{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\chi r\} + r^{-1} = r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\big(\exp\{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\chi r\} - 1\big). \tag{6}$$

Перенос этого выражения в произвольную точку трехмерного пространства позволяет построить набор регулярных аналитических векторов с особенностями в выделенных точках и вычислить их скалярные произведения.

В работе используются стандартные обозначения для векторного и скалярного произведений векторов

$$[\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}]_j = \varepsilon_{nkj}[\boldsymbol{f}]_n[\boldsymbol{g}]_k, \quad \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g} = [\boldsymbol{f}]_j[\boldsymbol{g}]_j,$$

при этом по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

§1. Аналитические векторы

Дефектные векторы (6), заданные на полуоси, позволяют построить три (соответственно количеству возможных значений проекции $m = -1, 0, 1$ орбитального момента на третью координатную ось для полного момента $l = 1$) вектора в соленоидальном подпространстве $P^\perp$, привязанных к точке $\boldsymbol{x}_n$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_\pm^{m,n}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{\partial}\times\frac{c_\pm(r_n)}{\sqrt{2}r_n\chi^2}((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n)\times\boldsymbol{\partial})Y_{1m}^{\boldsymbol{x}^n}\\ &= \boldsymbol{\partial}\times((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n)\times\boldsymbol{\partial})\frac{c_\pm(r_n)}{\sqrt{2}r_n\chi^2}Y_{1m}^{\boldsymbol{x}^n}\\ &= \sqrt{2}\frac{c_\pm(r_n)}{r_n^2\chi^2}\boldsymbol{\Upsilon}_{1m}^{\boldsymbol{x}^n} + \frac{c'_\pm(r_n)}{r_n\chi^2}\boldsymbol{\Psi}_{1m}^{\boldsymbol{x}^n}, \quad \boldsymbol{B}_\pm^{m,n}\in P^\perp.\end{aligned}$$

Здесь $r_n = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^n|$, а $Y_{1m}^{\boldsymbol{x}^n}$, $\boldsymbol{\Upsilon}_{1m}^{\boldsymbol{x}^n}$, $\boldsymbol{\Psi}_{1m}^{\boldsymbol{x}^n}$ – это, соответственно, скалярная и две первых векторных сферических гармоники, привязанных к точке $\boldsymbol{x}^n$ трехмерного пространства.

Пусть $\mathcal{H}_{\{\boldsymbol{x}^n\}}^{\perp}$ – это линейное пространство гладких соленоидальных функций, исчезающих в точках $\{\boldsymbol{x}^n\}$, $n = 1 \ldots N$ вместе с производными. Определим оператор $\Delta_{\{\boldsymbol{x}^n\}}^{\perp}$ как сужение дифференциальной операции Δ на $\mathcal{H}_{\{\boldsymbol{x}^n\}}^{\perp}$. Такой оператор является замыкаемым симметрическим оператором с нетривиальными индексами дефекта $(3N, 3N)$. Действительно, из симметричности оператора T_l на $\mathring{\mathcal{W}}_l$ следует, что оператор $\Delta_{\{\boldsymbol{x}^n\}}^{\perp}$ симметричнен, а из принадлежности функций $c_{\pm}(r)$ дефектным подпространствам T_1, следует, что векторы $\boldsymbol{B}_{\pm}^{m,n}$ лежат в дефектных подпространствах оператора $\Delta_{\{\boldsymbol{x}^n\}}^{\perp}$ то есть удовлетворяют уравнениям

$$(\boldsymbol{B}_{\pm}^{m,n}, (\Delta \pm i\chi^2)\boldsymbol{h}^{\perp}) = 0, \quad \boldsymbol{h}^{\perp} \in \mathcal{H}_{\{\boldsymbol{x}^n\}}^{\perp}. \tag{7}$$

Самосопряженные расширения симметрического оператора $\Delta_{\{\boldsymbol{x}^n\}}^{\perp}$ общего вида определяются с помощью преобразования Кэли [1, с. 186] посредством некоторой унитарной матрицы, переводящей элементы $\boldsymbol{B}_{-}^{m,n}$ одного дефектного подпространства в линейные комбинации элементов $\boldsymbol{B}_{+}^{m,n}$ другого. Теория Крейна [5, 6] позволяет построить выражение для ядра резольвенты произвольного самосопряженного расширения через ядро резольвенты в фиксированной точке области регулярности. С помощью преобразования Фурье можно вычислить выражение для ядра резольвенты $\mathring{R}_{\lambda}$ самосопряженного оператора Лапласа $\Delta_I^{\perp}$, заданного на множестве два раза дифференцируемых функций [7, с. 73]

$$\mathring{R}_{\lambda}^{jj'}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\delta_j^{j'}, \ \left[(\Delta_0 - \lambda)\mathring{R}_{\lambda}\right]^{jj'}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_j^{j'}, \tag{8}$$

здесь разрез у корня из спектрального параметра λ выбирается вдоль положительной полуоси

$$\sqrt{\bar{\lambda}} = -\overline{\sqrt{\lambda}}, \quad 0 < \arg\lambda < 2\pi. \tag{9}$$

Резольвента (8) определена на пространстве векторных функций произвольного вида, однако, можно показать, что она, также как и оператор $\Delta_{\{\boldsymbol{x}^n\}}^{\perp}$, оставляет подпространства $P^{\parallel}$ и $P^{\perp}$ инвариантными. Тем самым, выражение (8) может быть использовано и для построения резольвент операторов, действующих, в том числе и на подпространствах $P^{\|}$ и $P^{\perp}$.

Теория Крейна опирается на понятие регулярного аналитического вектора. То есть вектора $\boldsymbol{B}_{\lambda}^{m,n}$, который в регулярных точках рассматриваемых самосопряженных расширений аналитически зависит от спектрального параметра λ и удовлетворяет уравнению

$$\boldsymbol{B}_{\mu}^{m,n} = \boldsymbol{B}_{\lambda}^{m,n} + (\mu - \lambda)\mathring{R}_{\mu}\boldsymbol{B}_{\lambda}^{m,n}. \tag{10}$$

Здесь под понятием *вектор* подразумевается элемент линейного пространства – области определения оператора $(\Delta_{\boldsymbol{x}^n}^{\perp})^*$, сопряженного к симметрическому оператору $\Delta_{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}}^{\perp}$, заданному на множестве гладких функций, исчезающих в точке $\boldsymbol{x}^n$ вместе с производными. Необходимым условием построения резольвенты с помощью аналитических векторов $\boldsymbol{B}_{\lambda}^{m,n}$ является принадлежность этих векторов, взятых в точках $\pm i\chi^2$, дефектным подпространствам симметрического оператора $\Delta_{\{\boldsymbol{x}^n\}}^{\perp}$

$$(\Delta_{\{\boldsymbol{x}^n\}}^{\perp} \pm i\chi^2)^* \boldsymbol{B}_{\pm i\chi^2}^{m,n} = 0.$$

Для построения аналитических векторов рассмотрим функцию

$$c_{\lambda}(r) = r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\big(e^{i\sqrt{\lambda}r} - 1\big)$$

с разрезом по спектральному параметру λ, определенному формулой (9), и перенесем ее с помощью разложения (1) в трехмерное пространство. Определим соленоидальный вектор $\boldsymbol{B}_{\lambda}^{m,n}$ следующим образом

$$\boldsymbol{B}_{\lambda}^{m,n}(\boldsymbol{x}(r_n, \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^n}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^n|})) = \sqrt{2}\frac{c_{\lambda}(r_n)}{\lambda r_n^2}\boldsymbol{\Upsilon}_{1m}^{\boldsymbol{x}^n} + \frac{c'_{\lambda}(r_n)}{\lambda r_n}\boldsymbol{\Psi}_{1m}^{\boldsymbol{x}^n}. \tag{11}$$

Непосредственные вычисления с подстановкой выражений для векторных сферических гармоник [8] дают для этого вектора следующее выражение

$$\begin{aligned}[B_{\lambda}^{m,n}(\boldsymbol{x})]_j = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\Big(&\frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}})_m(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}})_j}{r_n}\frac{d}{dr_n}\frac{1}{r_n}\frac{d}{dr_n}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}r_n} - 1}{\lambda r_n} \\ &- \frac{\delta_j^m}{r_n}\frac{d}{dr_n}r_n\frac{d}{dr_n}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}r_n} - 1}{\lambda r_n}\Big)_{r_n = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^n|}.\end{aligned} \tag{12}$$

Вычисление, аналогичное вычислению в [4] для дефектных векторов $c_{\pm}(r)$, показывает, что для любого элемента $u \in \mathring{\mathcal{W}}_1$ выполнено равенство

$$\langle c_{\lambda}, (T_1 - \lambda)u\rangle_1 = 0,$$

а значит функция $c_\lambda(r)$ удовлетворяет уравнению

$$(T_1-\lambda)^* c_\lambda(r) = (T_1-\lambda)^* r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\bigl(e^{i\sqrt{\lambda}r}-1\bigr) = 0.$$

Как следствие, вектор $\boldsymbol{B}^m_\lambda$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta^\perp_{\{\boldsymbol{x}^n\}}-\lambda)^*\boldsymbol{B}^{m,n}_\lambda = 0,$$

из которого, совместно с аналитичностью и поведением на бесконечности $\boldsymbol{B}^{m,n}_\lambda$ по параметру λ, следует, что функция $\boldsymbol{B}^{m,n}_\lambda$ является решением уравнения (10).

§2. Скалярные произведения регулярных аналитических векторов

Скалярные произведения векторов $\boldsymbol{B}^{m',n}_\mu$ и $\boldsymbol{B}^{m,n}_\lambda$, соответствующих одной выделенной точке $\boldsymbol{x}^n$ пространства $\mathbb{R}^3$, были приведены в работе [2]

$$\bigl(\boldsymbol{B}^{m',n}_\mu, \boldsymbol{B}^{m,n}_\lambda\bigr)_{\mathbb{R}^3} = \int_{\mathbb{R}^3}\overline{\boldsymbol{B}^{m',n}_\mu(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{B}^{m,n}_\lambda(\boldsymbol{x})\,d^3x = \delta^m_{m'}\frac{i}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\lambda}}. \tag{13}$$

Для вычисления скалярного произведения векторов $\boldsymbol{B}^{m',n'}_\mu$ и $\boldsymbol{B}^{m,n}_\lambda$ при $n\neq n'$ воспользуемся представлением Дебая [9]

$$\boldsymbol{B}^{m,n}_\mu(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\partial}\times\frac{c_\mu(r_n)}{\mu r_n}\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^n}_{1m} = \boldsymbol{\partial}\times\frac{c_\mu(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n|)}{\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n|}\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^n}_{1m}, \tag{14}$$

где

$$\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^n}_{1m} = \boldsymbol{\Phi}_{1m}\Bigl(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n|}\Bigr) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n)\times\boldsymbol{\partial}\,Y_{1m}\Bigl(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^n|}\Bigr)$$

– это третья векторная сферическая гармоника, перенесенная в точку $\boldsymbol{x}^n$. Подставим разложение (14) в выражение для скалярного произведения, воспользуемся определением векторного произведения и проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned}\Bigl(\boldsymbol{B}^{m',1}_\mu,\,\boldsymbol{B}^{m,2}_\lambda\Bigr)_{\mathbb{R}^3} &= \int\limits_{\mathbb{R}^3}\overline{\boldsymbol{B}^{m',1}_\mu(\boldsymbol{x})}\,\boldsymbol{B}^{m,2}_\lambda(\boldsymbol{x})\,d^3x\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^3}\overline{\Bigl[\boldsymbol{\partial}\times\frac{c_\mu(r_1)}{\mu r_1}\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^1}_{1m'}\Bigr]_j}\Bigl[\boldsymbol{\partial}\times\frac{c_\lambda(r_2)}{\lambda r_2}\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^2}_{1m}\Bigr]_j\,d^3x\end{aligned}$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\Big[\frac{c_\mu(r_1)}{\mu r_1}\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^1}_{1m'}\Big]}_j (\delta^k_j \partial^2 - \partial_j \partial_k)\Big[\frac{c_\lambda(r_2)}{\lambda r_2}\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^2}_{1m}\Big]_k d^3x.$$

Здесь и далее, не умаляя общности, будем считать, что $n = 1$, $n' = 2$. Воспользуемся соленоидальностью векторной сферической гармоники $\boldsymbol{\Phi}_{1m}$ с радиальным коэффициентом

$$\partial_k\Big[\frac{c(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{1,2}|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{1,2}|}\boldsymbol{\Phi}_{1m}\Big(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{1,2}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{1,2}|}\Big)\Big]_k = 0$$

и выражением для действия Лапласиана $-\partial^2$ (см., например [3])

$$\begin{aligned}\Big(\boldsymbol{B}^{m',1}_\mu, \boldsymbol{B}^{m,2}_\lambda\Big)_{\mathbb{R}^3}& \\ &= -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\Big[\frac{c_\mu(r_1)}{\mu r_1}\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^1}_{1m'}\Big]}_j \partial^2 \Big[\frac{c_\lambda(r_2)}{\lambda r_2}\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^2}_{1m}\Big]_j d^3x \\ &= -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\Big[\frac{c_\mu(r_1)}{\mu r_1}\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^1}_{1m'}\Big]}_j \Big[\frac{T_1 c_\lambda(r_2)}{\lambda r_2}\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^2}_{1m}\Big]_j d^3x.\end{aligned}$$

Далее подставим в интеграл выражения для $\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^{1,2}}_{1m}$ и $c_\mu(r)$

$$\begin{aligned}\big[\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^{1,2}}_{1m}\big]_j &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\varepsilon_{jmk}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{1,2})_k}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{1,2}|}, \\ \frac{c_\mu(r)}{r} &= \frac{d}{dr}\frac{e^{i\sqrt{\mu}r}-1}{r}, \\ \frac{T_1 c_\lambda(r)}{\lambda r} &= \frac{d}{dr}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}r}}{r}\end{aligned}$$

и, учитывая, что

$$\begin{aligned}\big[\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^1}_{1m}\big]_j\big[\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{x}^2}_{1m'}\big]_j &= \frac{3}{4\pi}\varepsilon_{jmk}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^1)_k}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^1|}\varepsilon_{jm'k'}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2)_{k'}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2|} \\ &= \frac{3}{4\pi}\Big(\delta^m_{m'}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^1)_k}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^1|}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2)_k}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2|} - \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^1)_{m'}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^1|}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2)_m}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2|}\Big),\end{aligned}$$

а также, что

$$\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{1,2})_k}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{1,2}|}\frac{d}{dr_{1,2}}\frac{e^{i\sqrt{\mu}r_{1,2}}}{r_{1,2}}\Big|_{r_{1,2}=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{1,2}|} = -\frac{\partial}{\partial x^{1,2}_k}\frac{e^{i\sqrt{\mu}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{1,2}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{1,2}|},$$

получим

$$
\begin{aligned}
&\big(\boldsymbol{B}_\mu^{m',1}, \boldsymbol{B}_\lambda^{m,2}\big)_{\mathbb{R}^3} \\
&\qquad = \bar\mu^{-1}\frac{3}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d}{dr_1}\frac{e^{i\sqrt{\bar\mu}r_1}-1}{r_1}\frac{d}{dr_2}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}r_2}}{r_2}\Big(\delta^m_{m'}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^1)_k}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^1|}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2)_k}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2|} \\
&\qquad - \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^1)_m}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^1|}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2)_{m'}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2|}\Big)\, d^3x \\
&\qquad = \bar\mu^{-1}\frac{3}{4\pi}\Big(\delta^m_{m'}\frac{\partial}{\partial x^1_k}\frac{\partial}{\partial x^2_k} - \frac{\partial}{\partial x^1_m}\frac{\partial}{\partial x^2_{m'}}\Big)\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{i\sqrt{\bar\mu}r_1}-1}{r_1}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}r_2}}{r_2}\, d^3x.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Интеграл по трехмерному пространству вычисляется с помощью преобразования Фурье, действительно

$$
\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{i\sqrt{\bar\mu}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^1|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^1|}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2|}\, d^3x = 4\pi\frac{e^{i\sqrt{\bar\mu}|\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^2|}-e^{i\sqrt{\lambda}|\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^2|}}{(\bar\mu-\lambda)|\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^2|},
$$

из чего следует, что

$$
\bar\mu^{-1}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{i\sqrt{\bar\mu}r_1}-1}{r_1}\frac{e^{i\sqrt{\lambda}r_2}}{r_2}\, d^3x = \frac{4\pi}{\bar\mu\lambda}\Big(\frac{1}{r} - \frac{\bar\mu e^{i\sqrt{\lambda}r}-\lambda e^{i\sqrt{\bar\mu}r}}{(\bar\mu-\lambda)r}\Big),
$$

где $r = |\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1|$. Данная функция является гармонической на пространстве $\mathbb{R}^3$ по аргументам $\boldsymbol{x}^1$ и $\boldsymbol{x}^2$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^1_k}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^1|} - \frac{\bar\mu e^{i\sqrt{\lambda}|\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^1|}-\lambda e^{i\sqrt{\bar\mu}|\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^1|}}{(\bar\mu-\lambda)|\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^1|}\Big) = \\
&\qquad = \frac{\partial^2}{\partial x^2_k}\Big(\frac{1}{|\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^1|} - \frac{\bar\mu e^{i\sqrt{\lambda}|\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^1|}-\lambda e^{i\sqrt{\bar\mu}|\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^1|}}{(\bar\mu-\lambda)|\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^1|}\Big) = 0,
\end{aligned}
$$

откуда следует, что действие первого слагаемого с производными в (15) исчезает. Для вычисления действия второго слагаемого в (15) на функцию, обладающую свойством

$$
f(r): \quad \Delta f(r) = -f''(r) - \frac{2}{r}f'(r) = 0,
$$

воспользуемся формулой

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_j} f(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})_j}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} f'(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\\
&= -\delta_k^j \frac{f'(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} + \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})_k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})_j}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3} f'(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\\
&- \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})_k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})_j}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2} f''(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\\
&= \Big(3\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})_k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})_j}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2} - \delta_k^j\Big)\frac{f'(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}
\end{aligned}$$

В результате получаем следующее выражение для скалярного произведения регулярных аналитических векторов

$$\begin{aligned}
&\big(\boldsymbol{B}_\mu^{m',1}, \boldsymbol{B}_\lambda^{m,2}\big)_{\mathbb{R}^3}\\
&\quad= \frac{3}{\bar\mu\lambda}\Big(3\frac{(\boldsymbol{x}^n-\boldsymbol{x}^{n'})_k(\boldsymbol{x}^n-\boldsymbol{x}^{n'})_j}{|\boldsymbol{x}^n-\boldsymbol{x}^{n'}|^2} - \delta_k^j\Big)\Big(\frac{1}{r^3} - \frac{\bar\mu e^{i\sqrt{\lambda}r} - \lambda e^{i\sqrt{\bar\mu}r}}{(\bar\mu-\lambda)r^3} \qquad (16)\\
&\quad - i\sqrt{\lambda\bar\mu}\frac{\sqrt{\bar\mu}e^{i\sqrt{\lambda}r} - \sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\bar\mu}r}}{(\bar\mu-\lambda)r^2}\Big), \quad r = |\boldsymbol{x}^n - \boldsymbol{x}^{n'}|. \qquad (17)
\end{aligned}$$

§3. Диагонализация матрицы скалярных произведений

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
&a = a(\mu,\lambda) = \frac{i}{\sqrt{\bar\mu}+\sqrt{\lambda}},\\
&b = b(r;\mu,\lambda) = 3\Big(\frac{1}{\bar\mu\lambda r^3} - \frac{\bar\mu e^{i\sqrt{\lambda}r} - \lambda e^{i\sqrt{\bar\mu}r}}{\bar\mu\lambda(\bar\mu-\lambda)r^3} - i\frac{\sqrt{\bar\mu}e^{i\sqrt{\lambda}r} - \sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\bar\mu}r}}{\sqrt{\lambda\bar\mu}(\bar\mu-\lambda)r^2}\Big),\\
&b_{nn'} = b_{nn'}(\mu,\lambda), = b(|\boldsymbol{x}^n - \boldsymbol{x}^{n'}|;\mu,\lambda),
\end{aligned}$$

так, что

$$b_{n'n}(\lambda,\mu) = \overline{b_{nn'}(\mu,\lambda)}.$$

В соответствие с результатами предыдущей части, $3N\times 3N$ матрицу $\Omega_{mn}^{m'n'}$, $n,n' = 1\dots N$, $m,m' = 1,2,3$, задающую скалярные произведения регулярных аналитических векторов $\boldsymbol{B}_\mu^{m,n}$

$$\big(\boldsymbol{B}_\mu^{m,n}, \boldsymbol{B}_\lambda^{m',n'}\big)_{\mathbb{R}^3} = \Omega_{mn}^{m'n'}$$

можно представить в следующем блочном виде

$$\Omega_N = \begin{pmatrix} aI & (3P_{12}-I)b_{12} & \cdot & (3P_{1N}-I)b_{1N} \\ (3P_{12}-I)b_{12} & aI & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (3P_{1N}-I)b_{1N} & (3P_{2N}-I)b_{2N} & \cdot & aI \end{pmatrix},$$

где

$$I = \delta^m_{m'}, \quad [P_{nn'}]_{mm'} = \frac{(\boldsymbol{x}^n - \boldsymbol{x}^{n'})_m (\boldsymbol{x}^n - \boldsymbol{x}^{n'})_m}{|\boldsymbol{x}^n - \boldsymbol{x}^{n'}|^2}.$$

Задача о диагонализации матрицы Ω_N не имеет решения в общем виде, однако, при $N = 2$ для нее могут быть проведены некоторые явные вычисления. Представим матрицу $\Omega = \Omega_2$

$$\Omega = \begin{pmatrix} aI & b(3P-I) \\ b(3P-I) & aI \end{pmatrix}, \quad P = P_{12}, \quad b = b_{12}$$

в следующем виде

$$\Omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \widetilde{\Omega} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\Omega}$ — это блочно-диагональная матрица

$$\widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} (a+b)I - 3bP & 0 \\ 0 & (a-b)I + 3bP \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим ортонормированный базис $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ в трехмерном пространстве, такой, что вектор $\boldsymbol{r}$ направлен от точки x^1 к точке x^2, а $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ выбраны произвольным образом в плоскости, ортогональной $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1}{|\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^1|}, \quad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} = 0, \quad \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r} = 0, \quad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = 0.$$

Для такого базиса верны следующие соотношения

$$P\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}, \quad P\boldsymbol{p} = 0, \quad P\boldsymbol{q} = 0.$$

Очевидно, что 6 векторов

$$\widetilde{v}^{11} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{v}^{21} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{v}^{31} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\widetilde{v}^{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{v}^{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{v}^{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$$

являются собственными для матрицы $\widetilde{\Omega}$

$$\widetilde{\Omega}\widetilde{v}^{mn} = \omega^{mn}\widetilde{v}^{mn},$$

где

$$\omega^{11} = (a - 2b), \quad \omega^{21} = (a + b), \quad \omega^{31} = (a + b), \tag{18}$$

$$\omega^{11} = (a + 2b), \quad \omega^{21} = (a - b), \quad \omega^{31} = (a - b), \tag{19}$$

а векторы

$$v^{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{r}\end{pmatrix}, \quad v^{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix}, \quad v^{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{q}\end{pmatrix},$$

$$v^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}\\ -\boldsymbol{r}\end{pmatrix}, \quad v^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ -\boldsymbol{p}\end{pmatrix}, \quad v^{32} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}\\ -\boldsymbol{q}\end{pmatrix}$$

являются собственными для матрицы Ω

$$\Omega v^{11} = (a - 2b)v^{11}, \quad \Omega v^{21} = (a + b)v^{21}, \quad \Omega v^{31} = (a + b)v^{31},$$

$$\Omega v^{12} = (a + 2b)v^{12}, \quad \Omega v^{22} = (a - b)v^{22}, \quad \Omega v^{32} = (a - b)v^{32}.$$

Теперь рассмотрим замену базиса в наборе регулярных аналитических векторов

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_{\mu}^{m,n} = [v^{mn}]_{m',n'}\boldsymbol{B}_{\mu}^{m',n'}. \tag{20}$$

Векторы $\widetilde{\boldsymbol{B}}_{\mu}^{m,n}$, являясь линейными комбинациями векторов $\boldsymbol{B}_{\mu}^{m,n}$ с коэффициентами, не зависящими от спектрального параметра, также удовлетворяют уравнению (10). Но при этом их скалярные произведения имеют диагональный вид

$$\big(\widetilde{\boldsymbol{B}}_{\mu}^{m,n}, \widetilde{\boldsymbol{B}}_{\lambda}^{m',n'}\big)_{\mathbb{R}^3} = \delta_{m'n'}^{mn}\omega^{mn}(\mu, \lambda). \tag{21}$$

где $\omega^{mn}(\mu, \lambda)$ — это собственные значения (18), (19).

§4. Построение резольвенты

Теория Бирмана–Вишика–Крейна [10, 11] утверждает, что самосопряженное расширение общего вида $\Delta_{\beta}^{\perp}$ симметрического оператора $\Delta^{\perp}$ однозначно определяется с помощью самосопряженного оператора β_{ε}, действующего в дефектном подпространстве оператора $\Delta^{\perp}$

$$\mathcal{D}(\beta_{\varepsilon}) = \{v : (\Delta^{\perp} - \varepsilon)^{*}v = 0\}.$$

При этом оператор β_{ε} вводится в теорию как оператор, связывающий резольвенту R_{ε}^{β} рассматриваемого расширения с резольвентой $\mathring{R}_{\varepsilon}$ максимального (жесткого) расширения

$$\beta_{\varepsilon} = R_{\varepsilon}^{\beta} - \mathring{R}_{\varepsilon}$$

и в общем случае может на некотором подпространстве иметь бесконечное собственное значение. Далее теория утверждает, что если $\beta^{mn}_{m'n'}(\varepsilon)$ — это матрица, соответствующая оператору β_ε в базисе аналитических векторов $\widetilde{\boldsymbol{B}}^{m,n}_\varepsilon$

$$R_\varepsilon - \mathring{R}_\varepsilon = \beta^{mn}_{m'n'}(\varepsilon)\tilde{\boldsymbol{B}}^{m,n}_\varepsilon\big(\tilde{\boldsymbol{B}}^{m',n'}_\varepsilon, \cdot\big)_{\mathbb{R}^3},$$

то искомая разность резольвент, взятая в произвольной точке μ, имеет следующий вид

$$R_\mu - \mathring{R}_\mu = \beta^{mn}_{m'n'}(\mu)\tilde{\boldsymbol{B}}^{m,n}_\mu\big(\tilde{\boldsymbol{B}}^{m',n'}_{\bar\mu}, \cdot\big)_{\mathbb{R}^3}, \tag{22}$$

где $\beta^{mn}_{m'n'}(\mu)$ определяется уравнением

$$\begin{aligned}[\beta^{-1}(\mu)]^{mn}_{m'n'} = [\beta^{-1}(\varepsilon)]^{mn}_{m'n'} - (\mu-\varepsilon)\big(\widetilde{\boldsymbol{B}}^{m,n}_{\bar\mu}, \widetilde{\boldsymbol{B}}^{m',n'}_\varepsilon\big)_{\mathbb{R}^3}\\ = [\beta^{-1}(\varepsilon)]^{mn}_{m'n'} - (\mu-\varepsilon)\omega_{mn}(\bar\mu,\varepsilon)\delta^{mn}_{m'n'}.\end{aligned} \tag{23}$$

Отсюда видно, что бесконечные собственные значения оператора β_ε, соответствующие нулям матрицы $\beta^{-1}(\varepsilon)$, определяют нули функции $\beta^{-1}(\mu)$ в точке ε, то есть полюса функции $\beta^{-1}(\mu)$ и всей резольвенты R_μ в точке $\mu = \varepsilon$.

Таким образом, задача о построении резольвенты самосопряженного расширения, задаваемого с помощью матрицы $\beta^{mn}_{m'n'}(\varepsilon)$ сводится к задаче об обращении матрицы, стоящей в правой части (23). Эта задача может быть решена при вещественном отрицательном μ методом одновременной диагонализации двух самосопряженных матриц, а затем решение может быть аналитически продолжено в комплексную плоскость. В результате для ядра разности резольвент получается выражение

$$R^{jj'}_\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \mathring{R}^{jj'}_\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \beta^{mn}_{m'n'}(\mu)[\widetilde{B}^{m,n}_\mu(\boldsymbol{x})]^j[\widetilde{B}^{m',n'}_\mu(\boldsymbol{y})]^{j'}, \tag{24}$$

где явный вид векторов $[\widetilde{B}^{m,n}_\mu(\boldsymbol{x})]^j$ приведен в (12), (20). Такое ядро является аналитической функцией спектрального параметра μ в области $0 < \arg\mu < 2\pi$, за исключением некоторого количества полюсов, определяемых нулями собственных чисел матричной функции (23). Эти нули определяют собственные значения дискретного спектра оператора $\Delta^\perp_\beta$, а соответствующие вычеты резольвенты — проекторы на собственные подпространства.

§5. Заключение

Мы построили выражение (21) для скалярных произведений регулярных аналитических векторов симметрического соленоидального оператора Лапласа, отвечающего взаимодействию с двумя точечными источниками. В отличие от случая скалярного поля, данные произведения убывают как обратная третья степень (16), (17), а не как экспонента расстояния между взаимодействующими источниками.

Список литературы

1. Р. Д. Рихтмайер, *Принципы современной математической физики.* т. 1, М.: Мир, 1982, 486 с.
2. Т. А. Болохов, ‘ *Резольвенты самосопряженных расширений оператора Лапласа на соленоидальном подпространстве.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **467** (2018), 21.
3. Т. А. Болохов, *Расширения квадратичной формы векторного поперечного оператора Лапласа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **433** (2015), 78.
4. Т. А. Болохов, *Свойства радиальной части оператора Лапласа при l=1 в специальном скалярном произведении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **434** (2015), 32.
5. М. Г. Крейн, *Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения* I *и* II. — Мат. сб., **20(63)** (1947), 431–495; Мат. сб., **21(64)** (1947), 365–404;
6. В. Хатсон, Дж. С. Пим, *Приложения функционального анализа и теория операторов.* Пер. с англ. М.: Мир, 1983, 432 с.
7. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* 2. *Гармонический анализ и самосопряженность.* М., Мир, (1978), 395 с.
8. R. G. Barrera, G. A. Estevez, J. Giraldo, *Vector spherical harmonics and their application to magnetostatics.* — European J. Physics, **6**, No. 4, (1985), 287–294.
9. P. Debye, *Der Lichtdruck auf Kugeln von bieliebigem Material.* — Ann. Phys. (Leipz.), **30** (1909), 57–136.
10. М. И. Вишик, *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений.* — Тр. ММО, **1**, ГИТТЛ, М.Л., 1952, 187–246.
11. М. Ш. Бирман, *К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов.* — Матем. сб., **38(80)**, No. 4 (1956), 431–450.

Bolochov T. A. Scalar products for the regular analytic vectors of the Laplace operator in the solenoidal subspace.

The Laplace operator on the subspace of solenoidal vector functions of three variables vanishing with the first derivatives in the selected points $\boldsymbol{x_n}$, $n = 1, \dots, N$ is a symmetric operator with deficiency indices (3N,3N). The calculation of the scalar products of its regular analytic vectors is

the central point in the construction of the resolvents of its selfadjoint extensions by means of the Kreins formula.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: timur@pdmi.ras.ru

Поступило 16 октября 2018 г.