Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 473, 2018 г.

Н. М. Белоусов, С. Э. Деркачев

Q-ОПЕРАТОР ДЛЯ КВАНТОВОЙ МОДЕЛИ НШ

Посвящается юбилею М. А. Семенова-Тян-Шанского

§1. Введение

В работе [1] А. А. Цветков исследовал бесконечную систему одномерных бозонов с парным взаимодействием. Гамильтониан системы имеет следующий вид

$$H = \int \partial_x \bar{\psi}(x) \partial_x \psi(x) dx + \int V(x-y) \bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y) \psi(x) \psi(y)\, dxdy$$

и поля $\bar{\psi}(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям

$$\big[\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\big] = [\psi(x), \psi(y)] = 0; \big[\psi(x), \bar{\psi}(y)\big] = \delta(x-y).$$

В работе [1] найдены условия на потенциал взаимодействия $V(x-y)$, при которых однопараметрическое семейство операторов

$$A(\lambda) = :\exp\left(\frac{1}{\lambda} \int \bar{\psi}(x) \partial_x \psi(x) dx + \frac{1}{2\lambda^2} \int V(x-y) \bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y) \psi(x) \psi(y) dxdy\right):$$

оказывается коммутативным $[A(\lambda), A(\mu)] = 0$. Символ $::$ означает нормальное упорядочение: под знаком нормального упорядочения все операторы рождения $\bar{\psi}$ стоят слева от операторов уничтожения ψ. Одним из примеров потенциала, удовлетворяющего найденным условиям, является потенциал вида $V(x-y) = c\delta(x-y)$, что соответствует квантовой модели НШ.

Ключевые слова: интегрируемые модели квантовой теории поля, квантовая модель НШ, Q-оператор Бакстера, XXX-спиновая цепочка, функциональные методы.

Мы благодарны Е. К. Склянину за постановку задачи и чрезвычайно ценные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 14-11-00598).

Е. К. Склянин высказал гипотезу, что оператор $A(\lambda)$, введенный А. А. Цветковым, должен играть роль Q-оператора в квантовой модели НШ. Данная работа посвящена доказательству этой гипотезы.

Работа состоит из двух частей. В первой части мы достаточно подробно рассматриваем XXX-спиновую цепочку спина ℓ и конструкцию локального гамильтониана и Q-оператора в этой модели. Локальное квантовое пространство в каждом узле бесконечномерно и является неприводимым представлением алгебры Ли $s\ell_2$. Хорошо известно [7, 9], что в непрерывном пределе в режиме $\ell \to \infty$ матрица монодромии и локальный гамильтониан XXX-спиновой цепочки переходят в матрицу монодромии и гамильтониан квантовой модели НШ. Мы исследуем непрерывный предел в режиме $\ell \to \infty$ Q-оператора XXX-спиновой цепочки спина ℓ, построенного в [11, 13] и показываем, что в пределе естественным образом возникает оператор А. А. Цветкова.

Во второй части мы независимо выводим все необходимые тождества, которым должен удовлетворять Q-оператор непосредственно в квантовой модели НШ. Для замкнутости изложения мы привели независимые доказательства основных утверждений в случае квантовой модели НШ, используя в большей степени, чем это обычно делается, функциональные методы квантовой теории поля, изложенные в книгах [14, 15, 16]. Кроме того, мы старались подчеркнуть в квантовой модели НШ аналоги соответствующих формул из XXX-спиновой цепочки.

§2. XXX-спиновая цепочка

2.1. Матрица монодромии и алгебраический анзатц Бете. В модели XXX-спиновой цепочки спина ℓ матрица монодромии $T(u)$ строится как произведение L-операторов [5, 3, 7, 8]

$$T(u) = L_n(u)L_{n-1}(u)\cdots L_2(u)L_1(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

$$L_k(u) = u + \vec{\sigma} \otimes \vec{S}_k = \begin{pmatrix} u + S_k & S_k^- \\ S_k^+ & u - S_k \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u + \ell + a_k^\dagger a_k & -a_k \\ a_k^\dagger \left(a_k^\dagger a_k + 2\ell\right) & u - \ell - a_k^\dagger a_k \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Все L-операторы в выражении (1) перемножаются как матрицы и как матрицы действуют в общем вспомогательном двумерном пространстве $\mathbb{C}^2$. Матричные элементы оператора $L_k(u)$ – генераторы алгебры Ли $s\ell_2$, действующие в $\mathbb{V}_k$ – локальном квантовом пространством в k-ом узле. В пространстве $\mathbb{V}_k$ реализовано неприводимое представление спина ℓ

$$S_k = a_k^\dagger a_k + \ell; \quad S_k^- = -a_k; \quad S_k^+ = a_k^\dagger \left(a_k^\dagger a_k + 2\ell\right), \tag{3}$$

где $a_k^\dagger, a_k$ – операторы рождения и уничтожения: $a_k\, a_k^\dagger - a_k^\dagger\, a_k = 1$ и $\mathbb{V}_k$ – пространство Фока, порожденное применением операторов рождения к вакууму: $a_k|0\rangle = 0$. Мы будем рассматривать ситуацию общего положения: параметр спина ℓ – произвольное комплексное число. Матричные элементы матрицы монодромии $T(u)$ – операторы $A(u), \dots, D(u)$ – действуют во всем глобальном квантовом пространстве $\mathbb{V} = \mathbb{V}_n \otimes \mathbb{V}_{n-1} \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_1$.

Удобно выбрать реализацию $a_k^\dagger = z_k, a_k = \partial_k$, так что все становится наглядным: $\mathbb{V}_k \to \mathbb{C}[z_k]$ – пространство полиномов переменной z_k, где роль вакуума играет константа: $|0\rangle = 1$. Глобальное квантовое пространство совпадает с пространством полиномов от n переменных $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, а матричные элементы матрицы монодромии – дифференциальные операторы, действующие на этом пространстве полиномов.

Для L-операторов справедливо следующее локальное соотношение

$$\begin{aligned}(u - v + \mathbb{P}_{12}) \left(u + \vec{\sigma}_1 \otimes \vec{S}_k\right) \left(v + \vec{\sigma}_2 \otimes \vec{S}_k\right) \\ = \left(v + \vec{\sigma}_2 \otimes \vec{S}_k\right) \left(u + \vec{\sigma}_1 \otimes \vec{S}_k\right) (u - v + \mathbb{P}_{12}).\end{aligned}$$

Все операторы действуют в тензорном произведении трех пространств: $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{V}_k$ – двух вспомогательных двумерных пространств $\mathbb{V}_1 = \mathbb{C}^2$ и $\mathbb{V}_2 = \mathbb{C}^2$ и локального пространства Фока. $\mathbb{P}_{12}$ – оператор перестановки: $\mathbb{P}_{12}\vec{x} \otimes \vec{y} = \vec{y} \otimes \vec{x}, \vec{x} \in \mathbb{V}_1, \vec{y} \in \mathbb{V}_2$.

Локальное соотношение очевидным образом приводит к глобальному соотношению для матриц монодромии $T_1(u) = T(u) \otimes \mathbb{1}$ и $T_2(v) =$

$\mathbb{1} \otimes T(v)$

$$\begin{aligned} &(u - v + \mathbb{P}_{12})\, T_1(u) T_2(v) = T_2(v) T_1(u)\, (u - v + \mathbb{P}_{12})\,, \\ &T_1(u) = \Big(u + \vec{\sigma}_1 \otimes \vec{S}_n\Big) \cdots \Big(u + \vec{\sigma}_1 \otimes \vec{S}_1\Big)\,; \\ &T_2(v) = \Big(v + \vec{\sigma}_2 \otimes \vec{S}_n\Big) \cdots \Big(v + \vec{\sigma}_2 \otimes \vec{S}_1\Big)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Соотношение (4) удобно записать в виде обычного матричного соотношения для четырехмерных матриц, используя стандартный базис в тензорном произведении двумерных пространств $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} &e_1 = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\,, e_2 = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle\,, e_3 = |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\,, \\ &e_4 = |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle\,; |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрицы операторов $T_1(u)$ и $T_2(v)$ в рассматриваемом базисе имеют следующий вид:

$$T_1(u) = \begin{pmatrix} A(u) & 0 & B(u) & 0 \\ 0 & A(u) & 0 & B(u) \\ C(u) & 0 & D(u) & 0 \\ 0 & C(u) & 0 & D(u) \end{pmatrix}; T_2(v) = \begin{pmatrix} A(v) & B(v) & 0 & 0 \\ C(v) & D(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(v) & B(v) \\ 0 & 0 & C(v) & D(v) \end{pmatrix}.$$

Подставив эти матрицы и явное выражение для оператора $\mathbb{P}_{12}$ в рассматриваемом базисе

$$\mathbb{P}_{12} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma} + \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

в формулу (4), получим систему квадратичных соотношений для операторов $A(u), \ldots, D(u)$ и $A(v), \ldots, D(v)$. Из соотношения (4) сразу следует, что следы матриц монодромии, трансфер-матрицы $t(u) = A(u) + D(u)$, коммутируют: $t(u)t(v) = t(v)t(u)$. Следующие соотношения играют ключевую роль в методе алгебраического анзатца Бете [5, 3, 7, 8, 17], позволяющего построить систему собственных векторов трансфер-матрицы $t(u)$

$$C(u)C(v) = C(v)C(u),$$

$$A(u)C(v) = \frac{u-v+1}{u-v}C(v)A(u) - \frac{1}{u-v}C(u)A(v), \tag{6}$$

$$D(u)C(v) = \frac{u-v-1}{u-v}C(v)D(u) + \frac{1}{u-v}C(u)D(v). \tag{7}$$

Этот метод применим при условии, что в глобальном квантовом пространстве существует вектор $|0\rangle$, являющийся собственным вектором для операторов $A(u)$ и $D(u)$ и уничтожаемый оператором $B(u)$:

$$B(u)|0\rangle = 0; A(u)|0\rangle = \Delta_+(u)|0\rangle; D(u)|0\rangle = \Delta_-(u)|0\rangle,$$

где $\Delta_\pm(u)$ – полиномы степени n по спектральному параметру. В рассматриваемом случае в каждом локальном квантовом пространстве $\mathbb{V}_k$ существует вакуумный вектор $|0\rangle_k$, который уничтожается оператором a_k и является собственным вектором для оператора $S_k = a_k^\dagger a_k + \ell$

$$L_k(u)|0\rangle_k = \begin{pmatrix} u+\ell & 0 \\ \dots & u-\ell \end{pmatrix} |0\rangle_k.$$

Глобальный вектор $|0\rangle$ строится из локальных векторов $|0\rangle = |0\rangle_n \otimes |0\rangle_{n-1} \otimes \cdots |0\rangle_1$ так что получаем явные формулы для функций $\Delta_\pm(u)$: $\Delta_\pm(u) = (u \pm \ell)^n$.

Собственные векторы трансфер-матрицы строятся следующим образом:

$$|v_1 \dots v_k\rangle = C(v_1)\cdots C(v_k)|0\rangle; \;\; t(u)|v_1 \dots v_k\rangle = \tau(u)|v_1 \dots v_k\rangle.$$

Информация о собственном векторе кодируется при помощи функции

$$q(u) = (u - v_1)\cdots(u - v_k).$$

Используя соотношения (6) и (7) можно показать [5, 3, 7, 8], что вектор $|v_1 \dots v_k\rangle$ – собственный вектор трансфер-матрицы $t(u)$ с собственным значением:

$$\tau(u) = \Delta_+(u)\frac{q(u+1)}{q(u)} + \Delta_-(u)\frac{q(u-1)}{q(u)} \tag{8}$$

при условии, что параметры v_i удовлетворяют системе уравнений Бете:

$$\Delta_+(v_i)q(v_i+1) + \Delta_-(v_i)q(v_i-1) = 0; \quad i = 1, 2 \dots k.$$

Уравнения Бете имеют простой смысл: $\tau(u)$ является полиномом, а каждое из слагаемых в правой части равенства (8) имеет полюс при $u = v_i$, поэтому вычеты во всех полюсах должны сокращаться.

2.2. Локальный гамильтониан. Для построения локального гамильтониана нужен R-оператор, переставляющий спектральные параметры в произведении L-операторов [3]

$$R_{21}(u-v)L_2(u)L_1(v) = L_2(v)\,L_1(u)R_{21}(u-v). \tag{9}$$

Мы будем использовать следующую явную формулу для R-оператора [12] ($z_{ik} \equiv z_i - z_k$)

$$R(u) = \frac{\Gamma(z_{12}\partial_1 + 2\ell)}{\Gamma(z_{12}\partial_1 - u + 2\ell)}\;\frac{\Gamma(z_{21}\partial_2 + u + 2\ell)}{\Gamma(z_{21}\partial_2 + 2\ell)}.$$

Возьмем в соотношении (9) производную по спектральному параметру u и потом положим $v = u$

$$R'_{21}(0)L_2(u)L_1(u) + R_{21}(0)L_1(u) = L_2(u)R_{21}(0) + L_2(u)L_1(u)R'_{21}(0)\ .$$

Из явного вида R-оператора получаем

$$R_{21}(0) = \mathbb{1}; \quad R'_{21}(0) = \psi(z_{12}\partial_1 + 2\ell) + \psi(z_{21}\partial_2 + 2\ell),$$

где функция $\psi(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции Эйлера $\Gamma(x)$. В итоге приходим к следующему коммутационному соотношению [3]

$$[R'_{21}(0), L_2(u)\,L_1(u)] = L_2(u) - L_1(u).$$

Из этого соотношения сразу следует, что оператор $H = R'_{1n}(0) + R'_{nn-1}(0) + \ldots + R'_{21}(0)$, действующий в глобальном квантовом пространстве, коммутирует с трансфер-матрицей $t(u)$. При этом подразумеваются периодические граничные условия $k + n \equiv k$. Удобно работать с гамильтонианом, отличающемся от только что выписанного сдвигом на константу:

$$H = \sum_{k=1}^{n} H_{k+1k};\, H_{k+1k} = \psi(z_{kk+1}\partial_k + 2\ell) + \psi(z_{k+1k}\partial_{k+1} + 2\ell) - 2\psi(2\ell),$$

где сдвиг выбран таким образом, чтобы состоянию $|0\rangle$ отвечало нулевое собственное число парного гамильтониана $H_{k+1k}|0\rangle = 0$. Рассматриваемый оператор обладает свойством локальности: каждое слагаемое в сумме относится только к двум ближайшим соседям, поэтому все определяется взаимодействием ближайших соседей.

2.3. ***Q*-оператор.** Как было отмечено, вся информация о собственном векторе $|v_1 \dots v_k\rangle$ содержится в полиноме $q(u) = (u-v_1)\cdots(u-v_k)$ и собственные числа рассмотренных операторов выражаются в терминах функции $q(u)$. Бакстер [15] предложил интерпретировать полином $q(u)$ как собственное число оператора, за которым закрепилось название Q-оператор. В общем случае

$$Q(u)|v_1 \dots v_k\rangle = q(u)c(v)|v_1 \dots v_k\rangle,$$

где константа $c(v)$ зависит от параметров $v_1, \dots, v_k$ и не зависит от спектрального параметра u. Обычно существует значение спектрального параметра u_0, при котором Q-оператор вырождается в единичный оператор $Q(u_0) = \mathbb{1}$, так что в этой ситуации $c(v) = q^{-1}(u_0)$

$$Q(u)|v_1 \dots v_k\rangle = \frac{(u-v_1)\cdots(u-v_k)}{(u_0-v_1)\cdots(u_0-v_k)}|v_1 \dots v_k\rangle.$$

По определению, Q-оператор должен обладать следующими свойствами

- это новое семейство коммутирующих операторов, коммутирующее также с трансфер матрицей
$$[Q(u), Q(v)] = 0; \;\; [Q(u), t(v)] = 0.$$
- $Q(u)$ удовлетворяет операторному соотношению – уравнению Бакстера
$$t(u)Q(u) = \Delta_+(u)Q(u+1) + \Delta_-(u)Q(u-1). \tag{10}$$

Перечисленных свойств достаточно для воспроизведения основных формул с участием полинома $q(u)$, полученных в рамках алгебраического анзатца Бете. При условии, что удастся независимым образом сконструировать Q-оператор, получаем другой способ решения модели. Мы предъявим конструкцию Q-оператора в рассматриваемом случае [11, 13]. Способ построения Q-оператора будет прагматичным и приводящим к цели кратчайшим путем.

2.3.1. *R-оператор.* В представлении (3) L-оператор может быть представлен в виде произведения треугольных матриц

$$L(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & -\partial \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix}; \;\; u_1 = u+\ell-1, \; u_2 = u-\ell \tag{11}$$

Основным строительным блоком для Q-оператора является R-оператор, удовлетворяющий следующему перестановочному соотношению

$$\begin{aligned} &R_{21}(u_1,u_2|v_2)L_2(u_1,u_2)L_1(v_1,v_2) \\ &= L_2(u_1,v_2)L_1(v_1,u_2)R_{21}(u_1,u_2|v_2), \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$u_1 = u+\ell-1, \;\; u_2 = u-\ell; \;\; v_1 = v+\ell-1, \;\; v_2 = v-\ell.$$

R-оператор действует в пространстве полиномов, зависящих от переменных z_1 и z_2 и для него может быть получено представление в виде функции от операторного аргумента [12]

$$R_{21}(u_1,u_2|v_2) = \frac{\Gamma(z_{21}\partial_2+u_1-v_2+1)}{\Gamma(z_{21}\partial_2+u_1-u_2+1)}$$

или в форме интегрального оператора

$$\begin{aligned} R_{21}(u_1,u_2|v_2)\Phi(z_2,z_1) = &\frac{1}{\Gamma(v_2-u_2)} \\ &\times \int_0^1 \mathrm{d}\alpha\; \alpha^{u_1-v_2}(1-\alpha)^{v_2-u_2-1}\Phi\left(\alpha z_{21}+z_1,z_1\right). \end{aligned}$$

Одно представление получается из другого при помощи интегрального представления для бета-функции Эйлера

$$B(z_{21}\partial_2+a,b-a) = \int_0^1 \mathrm{d}\alpha\; \alpha^{a-1+z_{21}\partial_2}(1-\alpha)^{b-a-1}$$

и явной формулы для действия на функции оператора

$$\begin{aligned} &\alpha^{z_{21}\partial_2} = \mathrm{e}^{-z_1\partial_2}\alpha^{z_2\partial_2}\mathrm{e}^{z_1\partial_2}: \\ &\quad \mathrm{e}^{-z_1\partial_2}\alpha^{z_2\partial_2}\mathrm{e}^{z_1\partial_2}\Phi(z_2,z_1) = \mathrm{e}^{-z_1\partial_2}\alpha^{z_2\partial_2}\Phi(z_2+z_1,z_1) \\ &\qquad\qquad = \mathrm{e}^{-z_1\partial_2}\Phi(\alpha z_2+z_1,z_1) = \Phi\left(\alpha z_{21}+z_1,z_1\right). \end{aligned}$$

В случае R-оператора $a = u_1-v_2+1$, $b = u_1-u_2+1$.

2.3.2. *Уравнение Бакстера.* В левой части уравнения Бакстера (10) стоит произведение трансфер матрицы $t(u)$ и Q-оператора. Трансфер матрица строится из L-операторов и мы собираемся построить Q-оператор, используя в качестве строительных блоков R-операторы. Общий принцип состоит в том, что соотношения между глобальными операторами – трансфер матрицами и Q-операторами, определяются локальными соотношениями между строительными блоками, из которых они строятся. Определяющее уравнение для оператора R (12) как раз и является нужным соотношением. Используя формулу (11) для матриц $L_2(u_1,u_2)$ и $L_1(v_1,v_2)$ и коммутативность $[R,z_1]=0$, перепишем определяющее соотношение (12), перегруппировав матрицы следующим образом

$$Z_2^{-1}R_{21}(u-v_2)L_2(u_1,u_2)Z_1$$
$$=\begin{pmatrix} u_1 & -\partial_2 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} Z_2^{-1}Z_1 \begin{pmatrix} v_1 & -\partial_1 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} R_{21}(u-v_2) \begin{pmatrix} v_1 & -\partial_1 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

В этой формуле в обозначении для R-оператора явным образом показано, что зависимость от параметра v_2 сводится к простому сдвигу спектрального параметра и $Z_k \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_k & 1 \end{pmatrix}$. Вычислив произведение матриц в правой части рассматриваемого соотношения, получаем

$$Z_2^{-1}R_{21}(u-v_2)L_2(u_1,u_2)Z_1$$
$$=\begin{pmatrix} R_{21}(u+1-v_2)+v_2R_{21}(u-v_2) & -R_{21}(u-v_2)\partial_2 \\ -v_2z_{21}R_{21}(u-v_2) & (u_1-v_2)(u_2-v_2)R_{21}(u-1-v_2)+v_2R_{21}(u-v_2) \end{pmatrix}.$$

Важное свойство полученной матрицы состоит в том, что при $v_2=0$ она становится верхне-треугольной. Положим $v_2=0$ и выпишем ключевое соотношение, изменив интерпретацию пространств: второе пространство теперь будет локальным квантовым пространством в k-ом узле, а первое – в $(k-1)$-ом узле

$$Z_k^{-1}R_{kk-1}(u)L_k(u_1,u_2)Z_{k-1}=\begin{pmatrix} R_{kk-1}(u+1) & -R_{kk-1}(u)\partial_{k-1} \\ 0 & u_1u_2R_{kk-1}(u-1) \end{pmatrix}.$$

Именно это локальное соотношение приводит к уравнению Бакстера – соотношению между глобальными объектами. Переходим к глобальным объектам: добавив один дополнительный узел z_0, вычисляем произведение по всем узлам:

$$Z_n^{-1}R_{nn-1}(u)\cdots R_{21}(u)R_{10}(u)L_n(u)\cdots L_1(u)Z_0$$
$$=\begin{pmatrix} R_{nn-1}(u+1) & -R_{nn-1}(u)\partial_n \\ 0 & u_1u_2R_{nn-1}(u-1) \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} R_{10}(u+1) & -R_{10}(u)\partial_1 \\ 0 & u_1u_2R_{10}(u-1) \end{pmatrix}.$$

Все устроено таким образом, что матрицы Z_k и Z_k^{-1} $(k=1,2,\ldots,n-1)$ сокращаются в произведении ближайших соседей. Теперь вычисляем матричный след, используя перестановочность всех R и L_k с z_0 для того, что бы перенести матрицу Z_0 в крайне правое положение, пользуясь цикличностью следа, и на самом последнем шаге устремляя $z_0\to z_n$.

Таким образом, путь от локального соотношения к глобальному оказывается довольно коротким и прямым. В итоге получается уравнение Бакстера

$$t(u)Q(u) = Q(u+1) + (u_1u_2)^n Q(u-1)$$

для оператора

$$Q(u) = R_{nn-1}(u)\cdots R_{21}(u)R_{10}(u)\big|_{z_0\to z_n} \ .$$

Можно проверить коммутативность полученного семейства $Q(u)$ [11, 13]. Опишем получившийся оператор более наглядным образом и для этой цели выведем формулу, показывающую, как оператор $Q(u)$ действует на полиномы [13].

2.3.3. *Формула для действия на полиномы.* Мы выведем очень простую формулу для действия $Q(u)$ на глобальную производящую функцию $(1-x_nz_n)^{-2\ell}\cdots(1-x_1z_1)^{-2\ell}$. В этой формуле вся информация о действии оператора на полиномы зашифрована компактным и наглядным образом. Глобальная проблема сразу сводится к локальной:

$$\begin{aligned}&R_{nn-1}(u)\cdots R_{10}(u)(1-x_nz_n)^{-2\ell}\cdots(1-x_1z_1)^{-2\ell}\\ &\quad= R_{nn-1}(u)(1-x_nz_n)^{-2\ell}\cdots R_{21}(u)(1-x_2z_2)^{-2\ell}R_{10}(u)(1-x_1z_1)^{-2\ell}.\end{aligned}$$

Явное выражение для действия R-оператора на локальную производящую функцию

$$R_{kk-1}(u)(1-x_kz_k)^{-2\ell} = \frac{\Gamma(\ell+u)}{\Gamma(2\ell)}(1-x_kz_k)^{-\ell-u}(1-x_kz_{k-1})^{-\ell+u}$$

получается при помощи формулы Фейнмана

$$\int_0^1 \mathrm{d}\alpha\alpha^{a-1}(1-\alpha)^{b-1}\frac{1}{\big[\alpha A+(1-\alpha)B\big]^{a+b}} \ = \ \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\frac{1}{A^aB^b},$$

так что окончательный ответ такой

$$\begin{aligned}&R_{nn-1}(u)\cdots R_{10}(u)(1-x_nz_n)^{-2\ell}\cdots(1-x_1z_1)^{-2\ell}\\ &\qquad= \frac{\Gamma^n(\ell+u)}{\Gamma^n(2\ell)}(1-x_nz_n)^{-\ell-u}(1-x_nz_{n-1})^{-\ell+u}\\ &\qquad\cdots(1-x_1z_1)^{-\ell-u}(1-x_1z_0)^{-\ell+u}.\end{aligned}$$

Осталось $z_0 \to z_n$ и изменить нормировку Q-оператора

$$Q(u) \to \frac{\Gamma^n(2\ell)}{\Gamma^n(\ell+u)} Q(u) \ .$$

Формула для ренормированного оператора получается совсем простой

$$\begin{aligned} Q(u) : &(1-x_n z_n)^{-2\ell} \cdots (1-x_1 z_1)^{-2\ell} \\ &\mapsto (1-x_n z_n)^{-\ell-u}(1-x_n z_{n-1})^{-\ell+u} \\ &\cdots (1-x_1 z_1)^{-\ell-u}(1-x_1 z_n)^{-\ell+u}. \end{aligned} \tag{13}$$

Оператор $Q(u)$ отображает мономы $z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ в полиномы по переменным $z_1, \dots, z_n$ и спектральному параметру u, так что

$$Q(u) : \ \mathbb{C}[z_1 \dots z_n] \mapsto \mathbb{C}[u, z_1 \dots z_n] \ .$$

Это свойство гарантирует, что собственные числа оператора $Q(u)$ являются *полиномами* от спектрального параметра u. Формула (13) очень наглядно демонстрирует выполнение соотношения $Q(\ell) = \mathbb{1}$, так что мы можем интерпретировать полином $\frac{q(u)}{q(\ell)} = \frac{(u-v_1)\cdots(u-v_k)}{(\ell-v_1)\cdots(\ell-v_k)}$ как собственное число построенного оператора $Q(u)$. Уравнение Бакстера для перенормированного оператора принимает свой канонический вид

$$t(u)Q(u) = (u+\ell)^n Q(u+1) + (u-\ell)^n Q(u-1).$$

Построение Q-оператора, приведенное в этом разделе, целиком основано на локальных перестановочных соотношениях.

§3. Переход к непрерывному пределу

3.1. Переход к непрерывному пределу в матрице монодромии. В непрерывной модели матрица монодромии удовлетворяет дифференциальному уравнению (18). Выведем конечно-разностный аналог этого дифференциального уравнения для того, чтобы сформулировать естественный рецепт перехода [7, 17, 18] к непрерывному пределу в режиме, когда $\ell \to \infty$. Во-первых, выделим из L-оператора (2) матрицу $\ell\sigma_3$

$$L_k(u) = (\mathbb{1} + \ell_k(u))\, \ell\sigma_3; \ell_k(u) = \begin{pmatrix} \frac{u}{\ell} + \frac{1}{\ell} a_k^\dagger a_k & \frac{1}{\ell} a_k \\ 2a_k^\dagger + \frac{1}{\ell} a_k^{\dagger 2} a_k & -\frac{u}{\ell} + \frac{1}{\ell} a_k^\dagger a_k \end{pmatrix}$$

и рассмотрим разность

$$T_n(u) - \ell\sigma_3 T_{n-1}(u) = (L_n(u) - \ell\sigma_3)\, T_{n-1}(u) = \ell_n(u)\ell\sigma_3 T_{n-1}(u).$$

Если ввести оператор

$$\mathbb{T}_n(u) = (\ell\sigma_3)^{-n}\, T_n(u),$$

то для него получается конечно-разностное уравнение следующего вида

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_n(u) - \mathbb{T}_{n-1}(u) &= (\ell\sigma_3)^{-n}\, \ell_n(u)\, (\ell\sigma_3)^{n}\, \mathbb{T}_{n-1}(u) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{u}{\ell} + \frac{1}{\ell} a_n^\dagger a_n & \frac{(-1)^n}{\ell} a_n \\ 2(-1)^n a_n^\dagger + \frac{(-1)^n}{\ell} a_n^{\dagger 2} a_n & -\frac{u}{\ell} + \frac{1}{\ell} a_n^\dagger a_n \end{pmatrix} \mathbb{T}_{n-1}(u).\end{aligned} \tag{14}$$

Теперь определим перенормированные операторы рождения и уничтожения

$$\begin{aligned}\psi_n &= (-1)^n \frac{b}{2} a_n; \bar{\psi}_n = \ell(-1)^n a a_n^\dagger \\ \left[\psi_n, \bar{\psi}_m\right] &= \ell \frac{ab}{2} \left[a_n, a_m^\dagger\right] = \ell \frac{ab}{2} \delta_{nm},\end{aligned} \tag{15}$$

таким образом, чтобы коммутационные соотношения (15) можно было интерпретировать как дискретный аналог канонических коммутационных соотношений для полей: если Δ – шаг решетки, то $x = n\Delta, y = m\Delta$ превращаются в непрерывные переменные в пределе $\Delta \to 0$ и

$$\psi_n \to \psi(x);\ \bar{\psi}_n \to \bar{\psi}(x); \left[\psi_n, \bar{\psi}_m\right] = \frac{1}{\Delta}\delta_{nm} \to \left[\bar{\psi}(x), \psi(y)\right] = \delta(x-y).$$

Таким образом, шаг решетки $\Delta = \frac{2}{ab}\frac{1}{\ell}$ диктуется (15). В левой части соотношения (14) разность превращается в производную $\mathbb{T}_n(u) - \mathbb{T}_{n-1}(u) \to \Delta\partial_x \mathbb{T}(x,u)$, так что

$$\Delta\partial_x \mathbb{T}(x,u) = \begin{pmatrix} \frac{u}{\ell} + \frac{\Delta}{\ell}\bar{\psi}(x)\psi(x) & \frac{2}{b}\frac{1}{\ell}\psi(x) \\ \frac{2}{a}\frac{1}{\ell}\bar{\psi}(x) + a\frac{\Delta}{\ell}\bar{\psi}^2(x)\psi(x) & -\frac{u}{\ell} - \frac{\Delta}{\ell}\bar{\psi}(x)\psi(x) \end{pmatrix} \mathbb{T}(x,u)$$

и в пределе $\ell \to \infty$ получаем

$$\partial_x \mathbb{T}(x,u) = \begin{pmatrix} \frac{ab}{2}u & a\psi(x) \\ b\bar{\psi}(x) & -\frac{ab}{2}u \end{pmatrix} \mathbb{T}(x,u).$$

Это определяющее уравнение для матрицы монодромии совпадает с (18) после перенормировки спектрального параметра $u = \frac{1}{ab}\lambda$.

3.2. Переход к непрерывному пределу в локальном гамильтониане. Для того, чтобы установить естественную интерпретацию возникшего параметра ab, найдем непрерывный предел локального гамильтониана $H = \sum_{k=1}^{n} H_{k+1k}$ в режиме $\ell \to \infty$ [6]

$$\begin{aligned} H_{k+1k} &= \psi\left(a_k^\dagger a_k - a_{k+1}^\dagger a_k + 2\ell\right) + \psi\left(a_{k+1}^\dagger a_{k+1} - a_k^\dagger a_{k+1} + 2\ell\right) \\ &\quad - 2\psi(2\ell) = \psi\left(\Delta\bar{\psi}_k\psi_k + \Delta\bar{\psi}_{k+1}\psi_k + 2\ell\right) \\ &\quad + \psi\left(\Delta\bar{\psi}_{k+1}\psi_{k+1} + \Delta\bar{\psi}_k\psi_{k+1} + 2\ell\right) - 2\psi(2\ell). \end{aligned}$$

Во-первых, $x = k\Delta$ превращается в непрерывную переменную в пределе $\Delta \to 0$, во вторых $\psi_{k+1} \to \psi(x) + \Delta\partial\psi(x) + \frac{\Delta^2}{2}\partial^2\psi(x) + \ldots$ и аналогично для $\bar{\psi}_{k+1}$. Используя эти формулы, первые члены асимптотического разложения логарифмической производной гамма-функции

$$\psi(z) \to \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \ldots$$

и переход от суммы к интегралу $\Delta\sum_k \to \int dx$, получаем следующее разложение [6]

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k=1}^{n} H_{k+1k} \\ &\to \left(\frac{2}{\ell} + \frac{1}{2\ell^2} + \frac{1}{12\ell^3}\right)\int dx\bar{\psi}(x)\psi(x) \\ &\quad - \Delta^2\frac{1}{2\ell}\int dx\left(\partial\bar{\psi}(x)\partial\psi(x) + ab\bar{\psi}^2(x)\psi^2(x)\right) + \ldots, \end{aligned}$$

где мы ограничились старшей степенью $\frac{1}{\ell^4}$ и опустили все вклады, содержащие полные производные вида $\partial\left(\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)$ и т.п., так как они приведут к вкладам, которые сократятся в силу периодических граничных условий. Если вместо исходного локального гамильтониана рассмотреть оператор ($\Delta = \frac{2}{ab}\frac{1}{\ell}$)

$$H' = \sum_{k=1}^{n}\left(H_{k+1k} - \Delta\left(\frac{2}{\ell} + \frac{1}{2\ell^2} + \frac{1}{12\ell^3}\right)\bar{\psi}_k\psi_k\right),$$

который по-прежнему коммутирует с транфер-матрицей и содержит взаимодействие ближайших соседей, то для него получим разложение

$$H' \to -\Delta^2\frac{1}{2\ell}\int dx\left(\partial\bar{\psi}(x)\partial\psi(x) + ab\bar{\psi}^2(x)\psi^2(x)\right) + \ldots.$$

Таким образом, в непрерывном пределе получаем стандартный гамильтониан непрерывной модели [2, 9, 17]

$$H = \int dx \left(\partial\bar{\psi}(x)\partial\psi(x) + ab\bar{\psi}^2(x)\psi^2(x)\right)$$

и $ab = c$ – константа взаимодействия.

3.3. Переход к непрерывному пределу в Q-операторе. Сформулировав связь между дискретной и непрерывной моделями, пришло время сделать предельный переход в Q-операторе

$$Q(u) = \frac{\Gamma^n(2\ell)}{\Gamma^n(\ell+u)} R_{nn-1}(u) \cdots R_{10}(u)\big|_{z_0 \to z_n}, \tag{16}$$

выраженном через дискретные поля ψ_k, $\bar{\psi}_k$. Но прежде чем это делать, вспомним, что спектр Q-оператора спиновой цепочки зависит от спина ℓ

$$Q(u)|v_1 \dots v_l\rangle = \frac{u - v_1}{\ell - v_1} \cdots \frac{u - v_l}{\ell - v_l} |v_1 \dots v_l\rangle.$$

Поэтому еще до перехода к непрерывному пределу, Q-оператор необходимо подходящим образом отнормировать. Например,

$$(\ell/u)^{\sum z_k \partial_k} Q(u)|v_1 \dots v_l\rangle = \prod \frac{\ell}{u} \frac{u - v_k}{\ell - v_k} |v_1 \dots v_l\rangle.$$

Здесь и далее подразумевается, что суммирование идет по всем n узлам решетки. Оператор $\sum z_k \partial_k$ выдает число частиц, а параметр u в знаменателе взят исходя из удобства конечного результата, что будет видно позднее.

Теперь можно делать предельный переход. Воспользуемся интегральным представлением R-операторов:

$$R_{kk-1}(u) = \frac{1}{\Gamma(\ell - u)} \int_0^1 d\alpha_k \alpha_k^{u+\ell-1} (1 - \alpha_k)^{\ell-u-1} \alpha_k^{z_{k,k-1}\partial_k}.$$

Последний множитель под интегралом действует нетривиально только по переменной z_k

$$\alpha_k^{z_{k,k-1}\partial_k} \Phi(z_k) = \Phi(\alpha_k z_k + (1 - \alpha_k) z_{k-1}).$$

Вместе с нормировочной частью произведение таких операторов из (16) будет действовать как

$$(\ell/u)^{\sum z_k\partial_k}\left(\prod\alpha_k^{z_{k,k-1}\partial_k}\right)\Big|_{z_0\to z_n}\Phi(\ldots,z_k,\ldots)$$
$$=\Phi(\ldots,(\ell/u)\alpha_k z_k+(\ell/u)(1-\alpha_k)z_{k-1},\ldots).$$

Но такая их запись неудобна, поскольку соседние R-операторы не коммутируют. Запишем их в нормально упорядоченном виде.

Рассмотрим следующий оператор

$$:e^{(c_1z_k+c_2z_{k-1})\partial_k}:=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}(c_1z_k+c_2z_{k-1})^p\partial_k^p.$$

Под знаком нормального упорядочения $::$ операторы z_k и ∂_k коммутируют. Подействовав на степень z_k

$$:e^{(c_1z_k+c_2z_{k-1})\partial_k}:z_k^p=z_k^p+p(c_1z_k+c_2z_{k-1})z_k^{p-1}+\ldots+(c_1z_k+c_2z_{k-1})^p$$
$$=((c_1+1)z_k+c_2z_{k-1})^p,$$

для произвольной функции получаем:

$$:e^{(c_1z_k+c_2z_{k-1})\partial_k}:\Phi(z_k)=\Phi((c_1+1)z_k+c_2z_{k-1}).$$

Причем для соседних операторов

$$:e^{(c_1z_{k+1}+c_2z_k)\partial_{k+1}}::e^{(c_3z_k+c_4z_{k-1})\partial_k}:=:e^{(c_1z_{k+1}+c_2z_k)\partial_{k+1}}e^{(c_3z_k+c_4z_{k-1})\partial_k}:$$

так как z_k и z_{k-1} коммутируют с ∂_{k+1}. Взяв подходящие коэффициенты c_i, находим нормально упорядоченный вид для произведения исходных операторов

$$(\ell/u)^{\sum z_k\partial_k}\left(\prod\alpha_k^{z_{k,k-1}\partial_k}\right)\Big|_{z_0\to z_n}=:\prod e^{(\ell/u-1)z_k\partial_k+(\ell/u)(1-\alpha_k)z_{k-1,k}\partial_k}:$$

Итак, перенормированный Q-оператор можно записать в следующем виде:

$$(\ell/u)^{\sum z_k\partial_k}Q(u)=:G(u):$$

где

$$G(u)=\left[\frac{\Gamma(2\ell)}{\Gamma(\ell+u)\,\Gamma(\ell-u)}\right]^n\prod_{k=1}^{n}\int_0^1 d\alpha_k\,\alpha_k^{u+\ell-1}(1-\alpha_k)^{\ell-u-1}$$
$$\times e^{(\ell/u-1)a_k^\dagger a_k+(\ell/u)(1-\alpha_k)\left(a_{k-1}^\dagger-a_k^\dagger\right)a_k}.$$

Под знаком нормального произведения операторы $a_k^\dagger = z_k$ и $a_k = \partial_k$ коммутируют, так что дальше все поля воспринимаются, как классические, т.е. коммутирующие. За y и x обозначим начало и конец интервала, на котором меняется пространственная переменная в непрерывной модели, то есть $(x-y) = n\Delta$. Поскольку в непрерывном пределе длина интервала остается постоянной, количество узлов решетки $n \sim \ell$, и число интегралов также стремится к бесконечности. Покажем, что в пределе этот n-кратный интеграл сводится к некоторому функциональному интегралу.

В каждом интеграле сделаем замену переменной

$$\alpha_k = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta_k}{\ell}\right), \qquad 1 - \alpha_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta_k}{\ell}\right)$$

и от $a_k^\dagger$ и a_k перейдем к перенормированным операторам $\bar\psi_k$ и ψ_k

$$a_k^\dagger a_k = \Delta \bar\psi_k \psi_k,$$
$$\left(a_{k-1}^\dagger - a_k^\dagger\right) a_k = \Delta\left(\bar\psi_k - \bar\psi_{k-1}\right)\psi_k - 2\Delta\bar\psi_k\psi_k.$$

Тогда результат записывается в виде

$$G(u) = \mathcal{N}\int_{-\ell}^{\ell} d\beta_1 \ldots \int_{-\ell}^{\ell} d\beta_n \exp\Bigg[(\ell-1)\sum \ln\left(1 - \frac{\beta_k^2}{\ell^2}\right) + u\sum \ln\frac{1 + {}^{\beta_k}/_{\ell}}{1 - {}^{\beta_k}/_{\ell}} + \Delta\sum\left(\frac{\beta_k}{u} - 1\right)\bar\psi_k\psi_k + \frac{\ell}{2u}\Delta\sum\left(1 - \frac{\beta_k}{\ell}\right)\left(\bar\psi_k - \bar\psi_{k-1}\right)\psi_k\Bigg],$$

где внеинтегральный множитель равен

$$\mathcal{N} = \left[\frac{2}{4^\ell \ell \mathrm{B}(\ell+u, \ell-u)}\right]^n.$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга для бета-функции, легко получить его асимптотику

$$\mathcal{N} \sim \left[\frac{1}{\sqrt{\pi\ell}}\right]^n \exp\left[-\frac{u^2(x-y)c}{2}\right].$$

Показатель экспоненты можно рассматривать как некоторый дискретизованный функционал исходных полей $\psi(t)$ и $\bar{\psi}(t)$ и вспомогательного поля $\beta(t)$. В пределе каждая сумма переходит в соответствующий интеграл. Например, для первой суммы имеем

$$(\ell-1)\sum \ln\left(1-\frac{\beta_k^2}{\ell^2}\right) = -(\ell-1)\sum \frac{\beta_k^2}{\ell^2}+\cdots \longrightarrow -\frac{c}{2}\int\limits_y^x dt\beta^2(t),$$

где мы воспользовались тем, что $\frac{1}{\ell}=\frac{c\Delta}{2}$. Точно так же для остальных сумм. Собирая все это вместе,

$$\begin{aligned} G(u) = \int \mathcal{D}\beta \exp\Bigg[&-\frac{u^2(x-y)c}{2} - \frac{c}{2}\int\limits_y^x dt\beta^2(t) + cu\int\limits_y^x dt\beta(t) \\ &+\int\limits_y^x dt\left(\frac{1}{u}\beta(t)-1\right)\bar{\psi}(t)\psi(t) + \frac{1}{cu}\int\limits_y^x dt\partial_t\bar{\psi}(t)\psi(t)\Bigg]. \end{aligned}$$

Здесь мы ввели обозначение для «меры» интегрирования

$$\mathcal{D}\beta = \lim_{\ell\to\infty}\frac{d\beta_1}{\sqrt{\pi\ell}}\cdots\frac{d\beta_n}{\sqrt{\pi\ell}}.$$

Убедится, что нормировка получилось правильной, можно на примере более простого интеграла:

$$\int \mathcal{D}\beta \exp\left[-\frac{c}{2}\int\limits_y^x dt\beta^2(t)\right] = \lim_{\ell\to\infty}\prod_k \int \frac{d\beta_k}{\sqrt{\pi\ell}}\exp\left[-\frac{1}{\ell}\beta_k^2\right] = 1.$$

Заметим, что полученный результат можно упростить, сделав замену переменной,

$$G(u) = \int \mathcal{D}\beta \exp\Bigg[-\frac{c}{2}\int_y^x dt(\beta(t)-u)^2 + \frac{1}{u}\int_y^x dt\,(\beta(t)-u)\,\bar{\psi}(t)\psi(t) + \frac{1}{cu}\int_y^x dt\partial_t\bar{\psi}(t)\psi(t)\Bigg]$$

$$= \int \mathcal{D}\varphi \exp\Bigg[-\frac{c}{2}\int_y^x dt\varphi^2(t) + \frac{1}{u}\int_y^x dt\bar{\psi}(t)\psi(t)\varphi(t) + \frac{1}{cu}\int_y^x dt\partial_t\bar{\psi}(t)\psi(t)\Bigg].$$

Этот функциональный интеграл гауссов, так что его можно вычислить

$$G(u) = \exp\left[-\frac{1}{cu}\int_y^x dt\bar{\psi}(t)\partial_t\psi(t) + \frac{1}{2cu^2}\int_y^x dt(\bar{\psi}(t)\psi(t))^2\right].$$

Внеинтегральные члены, появляющиеся после перекидывания производной в первом слагаемом, сокращаются из-за периодичности полей.

В непрерывном пределе XXX-спиновой цепочки было получено определяющее уравнение для матрицы монодромии

$$\partial_x \mathbb{T}(x,u) = \begin{pmatrix} \frac{ab}{2}u & a\psi(x) \\ b\bar{\psi}(x) & -\frac{ab}{2}u \end{pmatrix} \mathbb{T}(x,u),$$

которое совпадает с (18) после перенормировки спектрального параметра $u = \frac{\lambda}{ab} = \frac{\lambda}{c}$. После этой перенормировки получаем следующее выражение для Q-оператора

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_y^x(\lambda) &= \lim_{\ell\to\infty} (c\ell/\lambda)^{\sum z_k\partial_k} Q(\lambda/c) \\ &= :\exp\left[-\frac{1}{\lambda}\int_y^x dt\bar{\psi}(t)\partial_t\psi(t) + \frac{c}{2\lambda^2}\int_y^x dt(\bar{\psi}(t)\psi(t))^2\right]: \end{aligned} \tag{17}$$

§4. Непрерывная модель

4.1. Матрица монодромии. Классическая матрица монодромии $T_y^x(\lambda)$ есть фундаментальное решение дифференциального уравнения

[2, 9]

$$\begin{aligned} &\partial_x T_y^x(\lambda) = L(x,\lambda) T_y^x(\lambda), T_x^x(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &L(x,\lambda) = \frac{\lambda}{2}\sigma_3 + a\psi(x)\sigma_+ + b\bar{\psi}(x)\sigma_- = \begin{pmatrix} \lambda/2 & a\psi(x) \\ b\bar{\psi}(x) & -\lambda/2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{18}$$

которое может быть представлено при помощи упорядоченной экспоненты

$$\begin{aligned} T_y^x(\lambda) &= \overset{\frown}{\exp} \int\limits_y^x L(t,\lambda) dt \\ &= \mathbb{1} + \int\limits_y^x dt L(t,\lambda) + \int\limits_y^x dt_1 L(t_1,\lambda) \int\limits_y^{t_1} dt_2 L(t_2,\lambda) + \ldots \end{aligned} \tag{19}$$

Матричные элементы матрицы монодромии

$$T_y^x(\lambda) = \begin{pmatrix} A_y^x(\lambda) & B_y^x(\lambda) \\ C_y^x(\lambda) & D_y^x(\lambda) \end{pmatrix}$$

являются функционалами от полей $\psi, \bar{\psi}$, так что развернутое обозначение для матрицы монодромии должно иметь следующий вид $T_y^x(\psi, \bar{\psi}, \lambda)$. Чтобы не загромождать формулы, мы будем использовать упрощенную запись $T_y^x(\psi, \bar{\psi}, \lambda) \to T_y^x(\lambda)$ в формулах, где не используются вариационные производные по полям, и $T_y^x(\psi, \bar{\psi}, \lambda) \to T(\psi, \bar{\psi}, \lambda)$ в формулах с вариационными производными.

В квантовой модели НШ [2, 7, 9, 17, 18] поля $\bar{\psi}(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям

$$\left[\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\right] = [\psi(x), \psi(y)] = 0; \left[\psi(x), \bar{\psi}(y)\right] = \delta(x-y).$$

Глобальным квантовым пространством является пространство Фока $\mathbb{F}$, вакуум определяется стандартным образом

$$\psi(x)|0\rangle = 0.$$

Гамильтониан непрерывной модели НШ задается следующей формулой

$$H = \int dx \left(\partial\bar{\psi}(x)\partial\psi(x) + c\bar{\psi}^2(x)\psi^2(x)\right),$$

где $c = ab$ – константа взаимодействия.

Квантовая матрица монодромии $\mathbb{T}_y^x(\lambda)$ определяется как оператор, нормальный символ которого совпадает с классической матрицей монодромии [2, 7, 17]

$$\mathbb{T}_y^x(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_y^x(\lambda) & \mathbb{B}_y^x(\lambda) \\ \mathbb{C}_y^x(\lambda) & \mathbb{D}_y^x(\lambda) \end{pmatrix} = :T_y^x(\lambda): = \begin{pmatrix} :A_y^x(\lambda): & :B_y^x(\lambda): \\ :C_y^x(\lambda): & :D_y^x(\lambda): \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Квантовая матрица монодромии $\mathbb{T}_y^x(\lambda)$ – оператор, действующий в тензорном произведении двух пространств: двумерного вспомогательного пространства $\mathbb{C}^2$ и пространства Фока $\mathbb{F}$

$$\mathbb{T}_y^x(\lambda) : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{F} \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{F}.$$

Матричные элементы квантовой матрицы монодромии $\mathbb{T}_y^x(\lambda)$ – операторы, действующие в пространстве Фока $\mathbb{F}$ и сама она как нетривиальная двумерная матрица действует во вспомогательном пространстве $\mathbb{C}^2$.

Перестановочные соотношения между матричными элементами квантовых матриц монодромии $\mathbb{T}_y^x(\lambda)$ и $\mathbb{T}_y^x(\mu)$ компактно записываются следующим образом [2, 7]

$$\mathbb{R}_{12}(\lambda - \mu)\mathbb{T}_1(\lambda)\mathbb{T}_2(\mu) = \mathbb{T}_2(\mu)\mathbb{T}_1(\lambda)\mathbb{R}_{12}(\lambda - \mu). \quad (21)$$

Все операторы в этом соотношении действуют в тензорном произведении трех пространств: $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \mathbb{F}$ – двух вспомогательных двумерных пространств $\mathbb{V}_1 = \mathbb{C}^2$ и $\mathbb{V}_2 = \mathbb{C}^2$ и пространства Фока. Оператор $\mathbb{T}_1(\lambda) = \mathbb{T}_y^x(\lambda) \otimes \mathbb{1}$ действует как нетривиальная двумерная матрица в первом пространстве $\mathbb{V}_1$. Матричные элементы этой матрицы – операторы в пространстве Фока. Во втором вспомогательном пространстве $\mathbb{V}_2$ оператор $\mathbb{T}_1(\lambda)$ действует как единичная матрица. Со вторым оператором $\mathbb{T}_1(\mu) = \mathbb{1} \otimes \mathbb{T}_y^x(\mu)$ все аналогично: как нетривиальная матрица он действует во втором пространстве $\mathbb{V}_2$, а его матричные элементы – операторы в пространстве Фока. R-матрица дается выражением

$$\mathbb{R}_{12}(\lambda - \mu) = (\lambda - \mu)\mathbb{1} - c\mathbb{P}_{12}, \quad (22)$$

где $\mathbb{P}_{12}$ – оператор перестановки (5). Доказательство коммутационных соотношений (21) приведено в Дополнении C.

4.2. Q-оператор.

4.2.1. *Коммутационные соотношения с матрицей монодромии.* Рассмотрим оператор (17)

$$\mathbb{Q}_y^x(\lambda) = :e^{S(\bar{\psi},\psi,\lambda)}: = :e^{-\frac{1}{\lambda}\bar{\psi}\partial\psi + \frac{ab}{2\lambda^2}\left(\bar{\psi}\psi\right)^2}: \tag{23}$$

$$S(\bar{\psi},\psi,\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_y^x \bar{\psi}(t)\partial_t\psi(t)dt + \frac{ab}{2\lambda^2}\int\limits_y^x \left(\bar{\psi}(t)\psi(t)\right)^2 dt$$

и докажем, что он обладает всеми необходимыми свойствами Q-оператора.

Чтобы не загромождать формулы, удобно в дальнейшем использовать универсальные обозначения [14] и опускать очевидный символ интегрирования с указанием агрументов у полей и т.п. Пример использования универсальных обозначений приведен в формуле (23), где в показателе экспоненты в универсальных обозначениях $S(\bar{\psi},\psi,\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\bar{\psi}\partial\psi + \frac{ab}{2\lambda^2}\left(\bar{\psi}\psi\right)^2$ и ниже приводится детальная расшифровка.

Начнем с доказательства коммутативности с трансфер-матрицей. Приведем к нормальному виду произведение Q-оператора и матрицы монодромии. Для этого представим квантовую матрицу монодромии (20) в виде

$$\mathbb{T}_y^x(\mu) = :T_y^x(\psi,\bar{\psi},\mu): = T_y^x\left(\frac{\delta}{\delta\bar{A}},\frac{\delta}{\delta A},\mu\right):e^{A\bar{\psi}}e^{\bar{A}\psi}:\Big|_{A=\bar{A}=0}$$

и воспользуемся тождеством (A.29)

$$\mathbb{Q}_y^x(\lambda)e^{A\bar{\psi}}e^{\bar{A}\psi} = :\exp\left(S(\bar{\psi},\psi+A,\lambda) + A\bar{\psi} + \bar{A}\psi\right):$$

так что получим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}_y^x(\lambda)\mathbb{T}_y^x(\mu)\\
&= T_y^x\left(\frac{\delta}{\delta\bar{A}},\frac{\delta}{\delta A},\mu\right):e^{S(\bar{\psi},\psi,\lambda)+A\left(\bar{\psi}+\frac{1}{\lambda}\partial\bar{\psi}+\frac{ab}{\lambda^2}\bar{\psi}^2\psi\right)+\bar{A}\psi+\underline{\frac{ab}{\lambda^2}\left(\bar{\psi}A\right)^2}}:\Big|_{A=\bar{A}=0}\\
&= T_y^x\left(\frac{\delta}{\delta\bar{A}},\frac{\delta}{\delta A},\mu\right):e^{S(\bar{\psi},\psi,\lambda)+A\left(\bar{\psi}+\frac{1}{\lambda}\partial\bar{\psi}+\frac{ab}{\lambda^2}\bar{\psi}^2\psi\right)+\bar{A}\psi}:\Big|_{A=\bar{A}=0}.
\end{aligned}$$

В этих формулах опять используются универсальные обозначения. Приведем для примера расшифровку

$$\bar{A}\psi = \int\limits_y^x \bar{A}(t)\psi(t)dt,\ \left(\bar{\psi}A\right)^2 = \int\limits_y^x A^2(t)\bar{\psi}^2(t)dt$$

и надеемся, что дальше расшифровка всегда будет очевидна. Отметим важное обстоятельство – подчеркнутый вклад $\frac{ab}{\lambda^2}\left(\bar{\psi}A\right)^2$ в показателе экспоненты приводит к появлению дополнительных локальных слагаемых в вариационных производных высших порядков, например,

$$\frac{\delta^2}{\delta A(t_1)\delta A(t_2)} \to \ldots + \frac{2ab}{\lambda^2}\bar{\psi}^2(t_1)\delta(t_1 - t_2).$$

В выражении (19) для матрицы монодромии требуется строгое упорядочение типа $t_1 > t_2$ и т.д., так что локальные слагаемые не дают вклада в окончательное выражение.

После вычисления вариационных производных

$$\frac{\delta}{\delta A(t)} \to \bar{\psi}(t) + \frac{1}{\lambda}\partial_t\bar{\psi}(t) + \frac{ab}{\lambda^2}\bar{\psi}^2(t)\psi(t); \frac{\delta}{\delta \bar{A}(t)} \to \psi(t)$$

получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_y^x(\lambda)\mathbb{T}_y^x(\mu) &= :e^{S(\bar{\psi},\psi,\lambda)}T_y^x\left(\psi, \bar{\psi} + \frac{1}{\lambda}\partial\bar{\psi} + \frac{ab}{\lambda^2}\bar{\psi}^2\psi, x, y, \mu\right): \\ &= :e^{S(\bar{\psi},\psi,\lambda)}T_y^x\,(\lambda,\mu):,\end{aligned}$$

где матрица монодромии под знаком нормального произведения определяется как решение дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}\partial_x T_y^x(\lambda,\mu) &= L(x,\lambda,\mu)T_y^x(\lambda,\mu), T_x^x(\lambda,\mu) = \mathbb{1} \\ L(x,\lambda,\mu) &= \frac{\mu}{2}\sigma_3 + a\psi(x)\sigma_+ \\ &\quad + b\left(\bar{\psi}(x) + \frac{1}{\lambda}\partial\bar{\psi}(x) + \frac{ab}{\lambda^2}\bar{\psi}^2(x)\psi(x)\right)\sigma_-.\end{aligned} \tag{24}$$

Нетрудно проверить, что матрица $L(x,\lambda,\mu)$ (24) связана калибровочным преобразованием с более простой матрицей $U(x,\lambda,\mu)$

$$\begin{aligned}L(x,\lambda,\mu) &= S^{-1}(x,\lambda)U(x,\lambda,\mu)S(x,\lambda) - S^{-1}(x,\lambda)\partial_x S(x,\lambda) \\ U(x,\lambda,\mu) &= \left(\frac{\mu}{2} + \frac{ab}{\lambda}\bar{\psi}\psi\right)\sigma_3 + b\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)\bar{\psi}\sigma_- + a\psi\sigma_+; \\ S(x,\lambda) &= \mathbb{1} - \frac{b}{\lambda}\bar{\psi}(x)\sigma_-.\end{aligned}$$

Таким образом

$$T_y^x(\lambda,\mu) = S^{-1}(x,\lambda)F_y^x(\lambda,\mu)S(y,\lambda), \tag{25}$$

где $F_y^x(\lambda,\mu)$ – решение следующей задачи

$$\partial_x F_y^x(\lambda,\mu) = U(x,\lambda,\mu)F_y^x(\lambda,\mu), F_x^x(\lambda,\mu) = \mathbb{1}$$
$$U(x,\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} \mu/2 + ab/\lambda\bar\psi(x)\psi(x) & a\psi(x) \\ b\,(1-\mu/\lambda)\,\bar\psi(x) & -\mu/2 - ab/\lambda\bar\psi(x)\psi(x) \end{pmatrix}.$$

В случае периодических граничных условий: $\psi(x) = \psi(y), \bar\psi(x) = \bar\psi(y)$ матрицы $S^{-1}(x,\lambda)$ и $S(y,\lambda)$ в формуле (25) сокращаются при вычислении следа и для произведения Q-оператора и трансфер-матрицы получаем следующее представление

$$\mathbb{Q}_y^x(\lambda)\mathrm{tr}\mathbb{T}_y^x(\mu) = :e^{S(\bar\psi,\psi,\lambda)}\mathrm{tr}F_y^x\,(\lambda,\mu):.$$

Теперь рассмотрим произведение Q-оператора и матрицы монодромии в обратном порядке. Опять воспользуемся тождеством (A.29) и на этот раз получим сдвиг поля $\bar\psi \to \bar\psi + \bar A$

$$e^{A\bar\psi}e^{\bar A\psi}\mathbb{Q}_y^x(\lambda) = :\exp\left(S(\bar\psi+\bar A,\psi,\lambda) + A\bar\psi + \bar A\psi\right):$$
$$= :\exp\left(S(\bar\psi,\psi,\lambda) + \bar A\left(\psi - \frac{1}{\lambda}\partial\psi + \frac{ab}{\lambda^2}\psi^2\bar\psi\right) + \bar A\psi + \frac{ab}{\lambda^2}\left(\psi\bar A\right)^2\right):$$

Вариационные производные по источникам даются формулами

$$\frac{\delta}{\delta\bar A(t)} \to \psi(t) - \frac{1}{\lambda}\partial_t\psi(t) + \frac{ab}{\lambda^2}\psi^2(t)\bar\psi(t) \quad ; \quad \frac{\delta}{\delta A(t)} \to \bar\psi(t),$$

так что

$$\mathbb{T}_y^x(\mu)\mathbb{Q}_y^x(\lambda) = :e^{S(\bar\psi,\psi,\lambda)}T'^x_y\,(\mu,\lambda):,$$

где матрица $T'^x_y\,(\mu,\lambda)$ – решение дифференциального уравнения

$$\partial_x T'^x_y\,(\mu,\lambda) = L'(x,\mu,\lambda)T'^x_y\,(\mu,\lambda)\,, T'^x_x\,(\mu,\lambda) = \mathbb{1}$$
$$L'(x,\mu,\lambda) = \frac{\mu}{2}\sigma_3 + a\left(\psi(x) - \frac{1}{\lambda}\partial\psi(x) + \frac{ab}{\lambda^2}\psi^2(x)\bar\psi(x)\right)\sigma_+ \qquad (26)$$
$$+ b\bar\psi(x)\sigma_-.$$

Матрица $L'(x,\mu,\lambda)$ (26) связана калибровочным преобразованием с матрицей $U'(x,\mu,\lambda)$

$$L'(x,\mu,\lambda) = S'^{-1}(x,\lambda)U'(x,\mu,\lambda)S'(x,\lambda) - S'^{-1}(x,\lambda)\partial_x S'(x,\lambda)$$
$$U'(x,\mu,\lambda) = \left(\frac{\mu}{2} + \frac{ab}{\lambda}\bar\psi\psi\right)\sigma_3 + b\bar\psi\sigma_- + a\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)\psi\sigma_+;$$
$$S'(x,\lambda) = \mathbb{1} + \frac{a}{\lambda}\psi(x)\sigma_+,$$

поэтому

$$T'^{x}_{y}(\mu,\lambda) = S'^{-1}(x,\lambda) G^{x}_{y}(\mu,\lambda)\, S'(y,\lambda), \tag{27}$$

где $G^x_y(\mu,\lambda)$ – решение следующей задачи

$$\begin{aligned}
&\partial_x G^x_y(\mu,\lambda) = U'(x,\mu,\lambda) G^x_y(\mu,\lambda), G^x_x(\mu,\lambda) = \mathbb{1} \\
&U'(x,\mu,\lambda) = \begin{pmatrix} \mu/2 + ab/\lambda \bar\psi(x)\psi(x) & a\,(1-\mu/\lambda)\,\psi(x) \\ b\bar\psi(x) & -\mu/2 - ab/\lambda\bar\psi(x)\psi(x). \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Опять в случае периодических граничных условий матрицы $S'^{-1}(x,\lambda)$ и $S'(y,\lambda)$ в формуле (27) сокращаются при вычислении следа и для произведения трансфер-матрицы и Q-оператора в обратном порядке получаем

$$\mathrm{tr}\mathbb{T}^x_y(\mu)\mathbb{Q}^x_y(\lambda) = :e^{S(\bar\psi,\psi,\lambda)}\mathrm{tr}G^x_y(\mu,\lambda):.$$

Матрицы $U'(x,\mu,\lambda)$ и $U(x,\lambda,\mu)$ связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\mu/\lambda \end{pmatrix} U'(x,\mu,\lambda) = U(x,\lambda,\mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\mu/\lambda \end{pmatrix},$$

что сразу приводит к аналогичному соотношению для матриц $G^x_y(\mu,\lambda)$ и $F^x_y(\lambda,\mu)$ и, следовательно, равенству $\mathrm{tr}G^x_y(\mu,\lambda) = \mathrm{tr}F^x_y(\lambda,\mu)$. В итоге получаем нужное коммутационное соотношение

$$\mathrm{tr}\mathbb{T}^x_y(\mu)\mathbb{Q}^x_y(\lambda) = \mathbb{Q}^x_y(\lambda)\mathrm{tr}\mathbb{T}^x_y(\mu).$$

Перейдем к выводу уравнения Бакстера. По сути все необходимые формулы уже выведены и осталось рассмотреть произведение Q-оператора и трансфер-матрицы при совпадающих значениях спектральных параметров

$$\mathbb{Q}^x_y(\lambda)\mathrm{tr}\mathbb{T}^x_y(\lambda) = :e^{S(\bar\psi,\psi,\lambda)}\mathrm{tr}F^x_y(\lambda):,$$

где $F^x_y(\lambda)$ – решение задачи

$$\begin{aligned}
&\partial_x F^x_y(\lambda) = U(x,\lambda)F(x,y,\lambda), F^x_x(\lambda) = \mathbb{1} \\
&U(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda/2 + ab/\lambda\bar\psi(x)\psi(x) & a\psi(x) \\ 0 & -\lambda/2 - ab/\lambda\bar\psi(x)\psi(x) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Для вычисления следа нужна только диагональная часть матрицы $F^x_y(\lambda)$, которая легко находится

$$F^x_y(\lambda)=\begin{pmatrix} \exp\left(\frac{(x-y)\lambda}{2}+\frac{ab}{\lambda}\int\limits_y^x\bar\psi(t)\psi(t)dt\right) & \dots \\ 0 & \exp\left(-\frac{(x-y)\lambda}{2}-\frac{ab}{\lambda}\int\limits_y^x\bar\psi(t)\psi(t)dt\right)\end{pmatrix}$$

и в итоге получаем соотношение Бакстера

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^x_y(\lambda)\mathrm{tr}\mathbb{T}^x_y(\lambda) &= e^{\frac{(x-y)\lambda}{2}} {:}e^{S(\bar\psi,\psi,\lambda)+\frac{ab}{\lambda}\bar\psi\psi}{:} + e^{-\frac{(x-y)\lambda}{2}} {:}e^{S(\bar\psi,\psi,\lambda)-\frac{ab}{\lambda}\bar\psi\psi}{:} \\ &= e^{\frac{(x-y)\lambda}{2}}\left(1+\frac{c}{\lambda}\right)^{\bar\psi\psi}\mathbb{Q}^x_y(\lambda+c)+e^{-\frac{(x-y)\lambda}{2}}\left(1-\frac{c}{\lambda}\right)^{\bar\psi\psi}\mathbb{Q}^x_y(\lambda-c).\end{aligned}$$

При последнем преобразовании учтено, что $ab = c$ и использована формула (A.33).

Осталось доказать коммутационное соотношение [1]

$$\mathbb{Q}^x_y(\lambda)\mathbb{Q}^x_y(\mu)=\mathbb{Q}^x_y(\mu)\mathbb{Q}^x_y(\lambda).$$

Для этого легче всего воспользоваться следующим эквивалентным представлением для Q-оператора

$$\mathbb{Q}^x_y(\lambda) = {:}\int\mathcal{D}\varphi e^{S(\varphi,\bar\psi,\psi,\lambda)}{:} = {:}\int\mathcal{D}\varphi e^{-\frac{c}{2}\varphi^2-\frac{1}{\lambda}\bar\psi(\partial-c\varphi)\psi}{:}$$

$$S(\varphi,\bar\psi,\psi,\lambda) = -\frac{c}{2}\int\limits_y^x\varphi^2(t)dt-\frac{1}{\lambda}\int\limits_y^x\bar\psi(t)\left(\partial_t-c\varphi(t)\right)\psi(t)dt$$

и формулой (A.31). Произведение Q-операторов приводится к нормальной форме

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^x_y(\lambda)\mathbb{Q}^x_y(\mu) &= \int\mathcal{D}\varphi_1\int\mathcal{D}\varphi_2 e^{-\frac{c}{2}\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)} \\ &{:}e^{\bar\psi\left(\frac{1}{\lambda\mu}(\partial-c\varphi_1)(\partial-c\varphi_2)-\frac{1}{\lambda}(\partial-c\varphi_1)-\frac{1}{\mu}(\partial-c\varphi_2)\right)\psi}{:},\end{aligned}$$

которая явным образом симметрична относительно перестановки $\lambda\rightleftarrows\mu$.

В итоге мы продемонстрировали двумя способами: стартуя с известного Q-оператора XXX-спиновой цепочки и рассматривая непрерывный предел в режиме $\ell\to\infty$ и непосредственно в рамках квантовой непрерывной модели НШ, что Q-оператор в этой модели дается формулой (23). К исследованию связи Q-оператора с преобразованием Бэклунда [4] мы надеемся вернуться в дальнейшем.

Дополнения

Приложение §А. Нормальные символы операторов

Все формулы в этом Дополнении записаны в универсальных компактных обозначениях. Общую формулу для преобразования произведения операторов к нормальной форме можно записать двумя эквивалентными способами: при помощи операции приведения

$$:F_1(\bar\psi,\psi)::F_2(\bar\psi,\psi):=\,:e^{\frac{\delta^2}{\delta\varphi\delta\bar\varphi}}F_1(\bar\psi,\varphi)F_2(\bar\varphi,\psi):\Big|_{\substack{\varphi=\psi\\ \bar\varphi=\bar\psi}}$$

или при помощи функционального интеграла

$$:F_1(\bar\psi,\psi)::F_2(\bar\psi,\psi):=:\int\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\bar\varphi F_1(\bar\psi,\varphi)F_2(\bar\varphi,\psi)e^{-(\varphi-\psi)(\bar\varphi-\bar\psi)}: \quad (A.28)$$

Используя тот или иной вариант основной формулы легко доказать следующие соотношения

$$e^{a\bar\psi}e^{\bar a\psi}:F(\bar\psi,\psi):=:e^{a\bar\psi+\bar a\psi}F(\bar\psi+\bar a,\psi): \quad (A.29)$$

$$:F(\bar\psi,\psi):e^{a\bar\psi}e^{\bar a\psi}=:e^{a\bar\psi+\bar a\psi}F(\bar\psi,\psi+a): \quad (A.30)$$

Общие соотношения

$$:e^{\bar\psi D_1\psi}::e^{\bar\psi D_2\psi}:=:e^{\bar\psi(D_1D_2+D_1+D_2)\psi}: \quad (A.31)$$

$$:e^{\alpha\bar\psi\partial\psi+\beta\left(\bar\psi\psi\right)^2+\gamma\bar\psi\psi}:=:e^{\gamma\bar\psi\psi}::e^{\frac{\alpha}{\gamma+1}\bar\psi\partial\psi+\frac{\beta}{(\gamma+1)^2}\left(\bar\psi\psi\right)^2}: \quad (A.32)$$

$$(1+\lambda)^{\bar\psi\psi}=:e^{\lambda\bar\psi\psi}:$$

выводятся при помощи формулы (A.28). В первой формуле D_1, D_2 – любые линейные операторы, действующие на поля $\psi(x)$ и $\bar\psi(x)$.

Выбирая в (A.32) параметры $\alpha=-\frac{1}{\lambda}, \beta=\frac{ab}{2\lambda^2}$ и $\gamma=\pm\frac{ab}{\lambda}$ получаем формулы для Q-оператора

$$\begin{aligned}:e^{-\frac{1}{\lambda}\bar\psi\partial\psi+\frac{ab}{2\lambda^2}\left(\bar\psi\psi\right)^2\pm\frac{ab}{\lambda}\bar\psi\psi}:&=:e^{\pm\frac{ab}{\lambda}\bar\psi\psi}::e^{-\frac{1}{\lambda\pm ab}\bar\psi\partial\psi+\frac{ab}{2(\lambda\pm ab)^2}\left(\bar\psi\psi\right)^2}:\\ &=\left(1\pm\frac{ab}{\lambda}\right)^{\bar\psi\psi}:e^{-\frac{1}{\lambda\pm ab}\bar\psi\partial\psi+\frac{ab}{2(\lambda\pm ab)^2}\left(\bar\psi\psi\right)^2}:\end{aligned} \quad (A.33)$$

Приложение §B. Упорядоченные экспоненты

Фундаментальное решение дифференциального уравнения

$$\partial_x F(x,y) = U(x)F(x,y),\ F(x,y)|_{x=y} = \mathbb{1} \tag{B.34}$$

может быть представлено при помощи упорядоченной экспоненты

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \overset{\frown}{\exp}\int\limits_y^x U(t)dt \\ &= \mathbb{1} + \int\limits_y^x dtU(t) + \int\limits_y^x dt_1 \int\limits_y^{t_1} dt_2 U(t_1)U(t_2) + \ldots \end{aligned} \tag{B.35}$$

Перечислим основные формулы

$$F(x,y)F(y,z) = F(x,z); F(y,x) = F^{-1}(x,y) \tag{B.36}$$

$$F_V(x,y) = F(x,y) + \int\limits_y^x dzF(x,z)V(z)F(z,y) \tag{B.37}$$

$$+ \int\limits_y^x dz_1 \int\limits_y^{z_1} dz_2 F(x,z_1)V(z_1)F(z_1,z_2)V(z_2)F(z_2,y) + \ldots$$

Последняя формула определяет ряд теории возмущений для решения уравнения (B.34) с измененной матрицей $U(x) \to U(x)+V(x)$; $F(x,y)$ в этой формуле – решение исходного уравнения (B.34) с матрицей $U(x)$. Для вывода рассмотрим уравнение для функции $F_V(x,y)$

$$\partial_x F_V(x,y) = (U(x) + V(x))\, F_V(x,y),\ F_V(x,y)|_{x=y} = \mathbb{1}$$

и будем искать решение в виде $F_V(x,y) = F(x,y)f(x,y)$. Для $f(x,y)$ получаем

$$\partial_x f(x,y) = F^{-1}(x,y)V(x)F(x,y)f(x,y),\ f(x,y)|_{x=y} = \mathbb{1},$$

то есть решение представляется в виде (B.35) с заменой

$$U(x) \to F^{-1}(x,y)V(x)F(x,y),$$

что после простых преобразований при помощи формулы (B.36) дает

$$f(x,y) = \mathbb{1} + \int\limits_y^x dt F(y,t)V(t)F(t,y)$$

$$+ \int\limits_y^x dt_1 \int\limits_y^{t_1} dt_2 F(y,t_1)V(t_1)F(t_1,t_2)V(t_2)F(t_2,y) + \dots$$

После умножения левой и правой части на $F(x,y)$, получаем формулу (B.37). Отметим отдельно, что та же самая формула (B.37) может быть использована для вычисления вариации $\delta F(x,y) = F_{\delta U}(x,y) - F(x,y)$ при замене $U \to U + \delta U$

$$\begin{gathered} \delta F(x,y) = \int\limits_y^x dz F(x,z)\delta U(z)F(z,y) + \\ + \int\limits_y^x dz_1 \int\limits_y^{z_1} dz_2 F(x,z_1)\delta U(z_1)F(z_1,z_2)\delta U(z_2)F(z_2,y) + \dots \end{gathered} \tag{B.38}$$

Нас будут интересовать вариации вида $\delta U = \varphi(x)A$, где $\varphi(x)$ – скалярная функция и матрица A уже не зависит от x. Общая формула (B.38) в этом случае сразу приводит к следующим явным выражениям для вариационных производных

$$\frac{\delta F(x,y)}{\delta\varphi(z)} = F(x,z)AF(z,y), \quad y < z < x \tag{B.39}$$

$$\frac{\delta^2 F(x,y)}{\delta\varphi(z_1)\delta\varphi(z_2)} = F(x,z_1)AF(z_1,z_2)AF(z_2,y), \;\; y < z_2 < z_1 < x, \tag{B.40}$$

и так далее.

B.1. Калибровочные преобразования. Допустим, что мы хотим представить решение дифференциального уравнения

$$\partial_x F(x,y) = U(x)F(x,y), \quad F(x,y)|_{x=y} = \mathbb{1}$$

в следующем виде $F(x,y) = S(x)G(x,y)S^{-1}(y)$, где $S(x)$ – заданная матрица. Нетрудно вывести соответствующее уравнение для $G(x,y)$

$$\partial_x G(x,y) = \left(S^{-1}(x)U(x)S(x) - S^{-1}(x)\partial_x S(x)\right)G(x,y), \;\; G(x,y)|_{x=y} = \mathbb{1}$$

Все то же самое можно переписать при помощи упорядоченной экспоненты следующим образом

$$\overleftarrow{\exp}\int\limits_y^x \big(S^{-1}(t)U(t)S(t) - S^{-1}(t)\partial_t S(t)\big)\,dt$$

$$= S(x)\left(\overleftarrow{\exp}\int\limits_y^x U(t)dt\right)S^{-1}(y)$$

Приложение §C. Коммутационное соотношение для матриц монодромии в непрерывной модели

В этом Дополнении приводится доказательство формулы (21). Отметим, что рассматриваемая формула доказана в работе Е. К. Склянина [2] двумя способами. По существу наше доказательство повторяет основные шаги доказательства Е. К. Склянина, только с бо́льшим упором на использование функциональной техники и, конечно, имеет чисто методический интерес.

Доказательство основано на использовании явных формул приведения произведения операторов к нормальной форме. Приведем к нормальной форме произведение матриц монодромии в левой части соотношения (21)

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_1(\lambda)\mathbb{T}_2(\mu) &= {:}T_1(\lambda){::}T_2(\mu){:} = {:}e^{\frac{\delta^2}{\delta\varphi\delta\bar{\varphi}}}T_1(\bar{\psi},\varphi)T_2(\bar{\varphi},\psi){:}\Big|_{\substack{\varphi=\psi\\ \bar{\varphi}=\bar{\psi}}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\prod_{k=1}^{n}dz_k : \frac{\delta^n T_1(\bar{\psi},\varphi)}{\delta\varphi(z_1)\ldots\delta\varphi(z_n)}\frac{\delta^n T_2(\bar{\varphi},\psi)}{\delta\bar{\varphi}(z_1)\ldots\delta\bar{\varphi}(z_n)}:\Big|_{\substack{\varphi=\psi\\ \bar{\varphi}=\bar{\psi}}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{Z_n}\prod_{k=1}^{n}dz_k : \frac{\delta^n T_1(\bar{\psi},\varphi)}{\delta\varphi(z_1)\ldots\delta\varphi(z_n)}\frac{\delta^n T_2(\bar{\varphi},\psi)}{\delta\bar{\varphi}(z_1)\ldots\delta\bar{\varphi}(z_n)}:\Big|_{\substack{\varphi=\psi\\ \bar{\varphi}=\bar{\psi}}}.
\end{aligned} \tag{C.41}$$

В формуле (C.41) используется симметрия вариационных производных относительно перестановок переменных z_k, что позволяет убрать множитель $\frac{1}{n!}$ и свести интегрирование в каждом n-кратном интеграле к интегрированию по фундаментальной области $Z_n : y < z_n < \ldots < z_1 < x$.

Для вычисления вариационных производных воспользуемся аналогами формул (B.39), (B.40), получающихся из (B.38) после очевидной замены $\delta U(x) = \varphi(x)a\sigma_+ + \bar{\varphi}(x)b\sigma_-$, что дает

$$\left.\frac{\delta T_1(\bar{\psi},\varphi)}{\delta\varphi(z)}\right|_{\varphi=\psi} = T_z^x(\lambda)a\sigma_+T_y^z(\lambda)\otimes\mathbb{1},$$
$$\left.\frac{\delta T_2(\bar{\varphi},\psi)}{\delta\bar{\varphi}(z)}\right|_{\bar{\varphi}=\bar{\psi}} = \mathbb{1}\otimes T_z^x(\mu)b\sigma_-T_y^z(\mu).$$

Произведение этих двух выражений можно переписать в следующем виде

$$\left.\frac{\delta T_1(\bar{\psi},\varphi)}{\delta\varphi(z)}\frac{\delta T_2(\bar{\varphi},\psi)}{\delta\bar{\varphi}(z)}\right|_{\substack{\varphi=\psi\\ \bar{\varphi}=\bar{\psi}}} = T_z^x(\lambda,\mu)\,(a\sigma_+\otimes b\sigma_-)\,T_y^z(\lambda,\mu),$$

где $T_z^x(\lambda,\mu) = T_z^x(\lambda)\otimes T_z^x(\mu)$ и совершенно аналогично вычисляются произведения производных более высокого порядка, например,

$$\left.\frac{\delta^2 T_1(\bar{\psi},\varphi)}{\delta\varphi(z_1)\delta\varphi(z_2)}\frac{\delta^2 T_2(\bar{\varphi},\psi)}{\delta\bar{\varphi}(z_1)\delta\bar{\varphi}(z_2)}\right|_{\substack{\varphi=\psi\\ \bar{\varphi}=\bar{\psi}}}$$
$$= T_{z_1}^x(\lambda,\mu)\,(a\sigma_+\otimes b\sigma_-)\,T_{z_2}^{z_1}(\lambda,\mu)\,(a\sigma_+\otimes b\sigma_-)\,T_y^{z_2}(\lambda,\mu).$$

Весь ряд в формуле (C.41) имеет ровно такой же вид, как и ряд теории возмущений (B.37) с заменой $F(x,y)\to T_y^x(\lambda,\mu)$ и $V(x)\to a\sigma_+\otimes b\sigma_-$. Произведение $T_y^x(\lambda,\mu) = T_y^x(\lambda)\otimes T_y^x(\mu)$ является решением уравнения

$$\partial_x T_y^x(\lambda,\mu) = (L(x,\lambda)\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes L(x,\mu))\,T_y^x(\lambda,\mu)$$

с начальным условием $T_x^x(\lambda,\mu) = \mathbb{1}$, однако после применения операции приведения к нормальной форме получается ряд теории возмущений (B.37) для $T_y'^x(\lambda,\mu)$ – решения уравнения

$$\partial_x T_y'^x(\lambda,\mu) = (L(x,\lambda)\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes L(x,\mu) + ab\sigma_-\otimes\sigma_+)\,T_y'^x(\lambda,\mu),$$

с начальным условием $T_x'^x(\lambda,\mu) = \mathbb{1}$. Таким образом

$$\mathbb{T}_1(\lambda)\mathbb{T}_2(\mu) = \left.:e^{\frac{\delta^2}{\delta\varphi\delta\bar{\varphi}}}T_1(\bar{\psi},\varphi)T_2(\bar{\varphi},\psi):\right|_{\substack{\varphi=\psi\\ \bar{\varphi}=\bar{\psi}}} = :T_y'^x(\lambda,\mu):$$

Совершенно аналогично выводится формула

$$\mathbb{T}_2(\mu)\mathbb{T}_1(\lambda) = \left.:e^{\frac{\delta^2}{\delta\varphi\delta\bar{\varphi}}}T_2(\bar{\psi},\varphi)T_1(\bar{\varphi},\psi):\right|_{\substack{\varphi=\psi\\ \bar{\varphi}=\bar{\psi}}} = :T_y''^x(\mu,\lambda):\,,$$

где $T''^{x}_{y}(\mu,\lambda)$ – решение уравнения

$$\partial_x T''^{x}_{y}(\mu,\lambda) = \left(L(x,\lambda)\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes L(x,\mu) + ab\sigma_+\otimes\sigma_-\right) T''^{x}_{y}(\mu,\lambda),$$

с начальным условием $T''^{x}_{x}(\mu,\lambda) = \mathbb{1}$. В итоге доказательство соотношения (21) сводится к доказательству легко проверяемого тождества

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}_{12}(\lambda-\mu)\left(L(x,\lambda)\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes L(x,\mu) + ab\sigma_-\otimes\sigma_+\right) \\ &= \left(L(x,\lambda)\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes L(x,\mu) + ab\sigma_+\otimes\sigma_-\right)\mathbb{R}_{12}(\lambda-\mu). \end{aligned}$$

Отметим, что явный вид R-матрицы (22) позволяет все свести к проверке более простого соотношения

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}_{12}(\lambda-\mu)\left({}^{\lambda}\!/\!_{2}\sigma_3\otimes \mathbb{1} + {}^{\mu}\!/\!_{2}\mathbb{1}\otimes\sigma_3 + ab\sigma_-\otimes\sigma_+\right) \\ &= \left({}^{\lambda}\!/\!_{2}\sigma_3\otimes \mathbb{1} + {}^{\mu}\!/\!_{2}\mathbb{1}\otimes\sigma_3 + ab\sigma_+\otimes\sigma_-\right)\mathbb{R}_{12}(\lambda-\mu). \end{aligned}$$

Список литературы

1. А. А. Цветков, *Об одном семействе коммутирующих виковских символов*, — ТМФ **47**, No. 1 (1981), 38–49.
2. Е. К. Склянин, *Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния*, — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **95** (1980), 55–128.
3. E. K. Sklyanin, *Quantum Inverse Scattering Method.Selected Topics.* In: Quantum Group and Quantum Integrable Systems, (Nankai Lectures in Mathematical Physics), ed. Mo-Lin Ge, Singapore, World Scientific (1992), pp. 63–97.
4. E. K. Sklyanin, *Backlund transformations and Baxter's Q-operator.* — Integrable systems:from classical to quantum (Montreal,QC) (1999), 227–250, CRM Proc. Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, RI, **26** 2000.
5. Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи.* I. — ТМФ, **40**, No. 2 (1979), 194–220. Theor. Math. Phys., **40**, No. 2 (1979), 688–706.
6. В. О. Тарасов, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Локальные гамильтонианы для интегрируемых квантовых моделей на решетке.* — ТМФ, **57**, No. 2 (1983), 163–181. Theor. Math. Phys., **57**, No. 2 (1983), 1059–1073
7. Л. Д. Фаддеев, *Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля*, — Препринт ЛОМИ, 1979, Р-2-79
   L. D. Faddeev,*Quantum completely integrable models in field theory.* — Sov. Sci. Rev., Sect. C, **1** (1980), 107–155.
8. L. D. Faddeev, *How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model.* — In: Quantum Symmetries/Symetries Qantiques, Proc.Les-Houches summer school, LXIV. Eds. A. Connes, K. Kawedzki, J. Zinn-Justin. North-Holland (1998), pp. 149–211.
9. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов.* Наука, М. (1986).
10. R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics.* Academic Press, London (1982).

11. S. E. Derkachov, *Baxter's Q-operator for the homogeneous XXX spin chain.* — J. Phys. A **32** (1999), 5299. `arXiv:solv-int/9902015`.
12. S. E. Derkachov *Factorization of the R -matrix.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **335** (2006), 134–163.
13. D. Chicherin, S. Derkachov, D. Karakhanyan, R. Kirschner, *Baxter operators for arbitrary spin.* — Nucl.Phys. **854** (2012), 393–432. `arXiv:1106.4991` [hep-th].
14. А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике.* Л., Издательство Ленинградского университета (1976).
15. Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования.* — 2-е изд., доп. М., Наука (1986). (1-ое изд. М., Наука, 1965.)
16. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей.* М., Наука (1978).
17. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions.* Cambridge University Press (1993).
18. Н. А. Славнов, *Алгебраический анзац Бете.* — Лекц. курсы НОЦ, **27**, МИАН (2017), 3–189.

Belousov N. M., Derkachov S. E. Q-operator for the quantum NLS model.

In this paper we show that an operator introduced by A. A. Tsvetkov enjoys all the needed properties of Q-operator. It is shown that the Q-operator of the XXX spin chain with spin ℓ turns into Tsvetkov's operator in the continuous limit when $\ell \to \infty$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: `belousovnikita.m@gmail.com`
E-mail: `derkach@pdmi.ras.ru`

Поступило 15 ноября 2018 г.