Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 473, 2018 г.

Ю. Ю. Багдерина

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ТОЧЕЧНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА ШЕСТОМУ УРАВНЕНИЮ ПЕНЛЕВЕ

К 70-летию М. А. Семенова-Тян-Шанского

§1. Введение

Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = S(x,y)\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^3 + 3R(x,y)\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 + 3Q(x,y)\frac{dy}{dx} + P(x,y), \qquad (1.1)$$

где P, Q, R, S – произвольные аналитические функции, привлекала внимание еще Лиувилля, Ли, Тресса, Картана [1–3]. Ли установил [4], что семейство уравнений (1.1) замкнуто относительно точечных преобразований (с аналитическими функциями ξ, η)

$$z = \xi(x,y), \qquad w = \eta(x,y), \qquad \det\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0. \qquad (1.2)$$

То есть под действием произвольной замены переменных (1.2) ОДУ (1.1) превращается в уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \widetilde{S}(z,w)\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^3 + 3\widetilde{R}(z,w)\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 + 3\widetilde{Q}(z,w)\frac{dw}{dz} + \widetilde{P}(z,w)$$

с той же формой зависимости правой части от первой производной, но с некоторыми новыми коэффициентами $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$, $\widetilde{R}$, $\widetilde{S}$.

Семейству (1.1) принадлежат все ОДУ второго порядка, обладающие свойством Пенлеве, т.е. не имеющие подвижных особенностей, кроме полюсов. Они проклассифицированы Пенлеве и Гамбье и приведены, например, в [5], при этом у всех 50-ти уравнений коэффициент $S(x,y) = 0$. В настоящее время уравнения Пенлеве изучены достаточно подробно, так что их решения рассматриваются как специальные функции. Важно установить как можно более широкий класс уравнений, которые могут быть проинтегрированы с помощью уравнений

Ключевые слова: уравнение Пенлеве, эквивалентность, инвариант.

Пенлеве. В наиболее простом случае такими уравнениями являются скалярные ОДУ второго порядка, связанные с уравнениями Пенлеве PI–PVI точечными преобразованиями.

Проблема эквивалентности относительно точечных преобразований была решена для первых четырех уравнений Пенлеве [6–15]. Для частных случаев пятого и шестого уравнений Пенлеве с одним или двумя ненулевыми параметрами в [15] были найдены только отдельные необходимые условия эквивалентности. Условия эквивалентности формулируются в терминах инвариантов семейства (1.1), поскольку эквивалентные уравнения имеют совпадающие множества инвариантов. Как обычно, под инвариантами семейства уравнений подразумеваются инварианты группы E преобразований эквивалентности этого семейства. Для семейства (1.1) группа E порождается преобразованиями (1.2). Ее алгебраические инварианты (некоторые функции x, y), построенные ранее в [11] и применяемые в случае PVI, описываются здесь в §2.

Настоящая работа посвящена проблеме эквивалентности шестому уравнению Пенлеве

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\Big)\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 - \Big(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\Big)\frac{dw}{dz}$$
$$+\frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\Big(\alpha - \beta\frac{z}{w^2} + \gamma\frac{z-1}{(w-1)^2} + \Big(\frac{1}{2} - \delta\Big)\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\Big). \tag{1.3}$$

Оно было открыто Фуксом [16] и Гамбье [17]. Позднее PVI возникло в статистической механике и квантовой теории поля [18], теории случайных матриц [19], теории рациональных поверхностей [20], как редукция резонансной системы трех волн [21, 22], в исследовании самодуальных уравнений Янга–Миллса [23]. ОДУ (1.3) рассматривается как мастер-уравнение, уравнения PI–PV получаются вырождениями PVI с помощью некоторых предельных переходов [24].

Третье и шестое уравнения Пенлеве, также как и их инварианты, имеют сходную структуру. Оба ОДУ содержат четыре постоянных параметра α, β, γ, δ. Растяжением z, w два параметра PIII

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{w}\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{\alpha w^2 + \beta}{z} + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}$$

могут быть нормализованы. Следовательно, PIII имеет два существенных параметра. В PVI все параметры существенные. Как показано в [14, §V], чтобы получить критерии эквивалентности PIII, достаточно использовать семь инвариантов I_1, I_2, $\mathcal{D}_2 I_1$, J_1, J_2, J_3, J_4 (определенных ниже в §2). PVI имеет на два существенных параметра больше, чем PIII. Поэтому в §3 мы используем для PVI то же самое множество инвариантов плюс два инварианта J_5 и J_6. Это позволяет предположить, что необходимые условия эквивалентности PVI будут также и достаточными, даже если доказательство этого не проводится.

В [14] необходимые условия эквивалентности PIII, сформулированные в терминах вышеупомянутых инвариантов, накладываются на ОДУ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y). \tag{1.4}$$

Получающееся в результате уравнение совпадает со специальной формой PIII, приведенной в [25],

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha \mathrm{e}^{x+y} + \beta \mathrm{e}^{x-y} + \gamma \mathrm{e}^{2(x+y)} + \delta \mathrm{e}^{2(x-y)}$$

(с точностью до преобразований, сохраняющих вид уравнений (1.4)), что говорит о том, что эти условия являются также и достаточными. Тот же подход был применен в [15] к четвертому уравнению Пенлеве. Специальная форма шестого уравнения Пенлеве, задаваемая уравнением вида (1.4), тоже существует [25, 26]. Здесь мы не применяем к (1.3) метод, изложенный выше, потому что теоретически необходимые условия эквивалентности можно получить в терминах одних только инвариантов, но они будут бесполезны из-за своих огромных размеров. На практике в дальнейшем мы предпочитаем оставить зависимость от z, w и вспомогательной переменной H в Теореме 2 из §3. В §4 показано как последовательно исключить H, z и w из условий эквивалентности, определяемых Теоремой 2. Эта процедура приводит либо к преобразованию (1.2), связывающему ОДУ (1.1) и (1.3), если они эквивалентны, либо к противоречию, что свидетельствует о том, что исследуемое уравнение (1.1) неэквивалентно PVI.

§2. Инварианты уравнений (1.1) четвертого типа

В [11] получен базис инвариантов для основного ($J_0 \neq 0$) и пяти вырожденных типов уравнений (1.1). К седьмому типу относятся уравнения, эквивалентные ОДУ $y'' = cy^{-3}$, а к последнему — линеаризуемые ОДУ. Между ними в классификации [11] находился промежуточный тип, как оказалось, не содержащий уравнений, и впоследствии из нее удаленный [27]. Шесть уравнений Пенлеве относятся к вырожденным типам уравнений (1.1), они имеют нулевой относительный инвариант J_0, приведенный ниже. В частности, уравнения PII–PVI принадлежат четвертому типу. Абсолютные инварианты таких уравнений выражаются в терминах величин

$$\begin{aligned}
&J_0 = \beta_2^2\gamma_{10} - \beta_1\beta_2(\gamma_{20} + \gamma_{11}) + \beta_1^2\gamma_{21},\\
&j_0 = \frac{3}{\beta_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\delta_{10} - \delta_{11}\right) + \frac{6\gamma_{10}}{\beta_1^2}\left(\gamma_{11} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\gamma_{10}\right),\\
&j_1 = \frac{5}{6}\left(2\beta_2\delta_{20} - \beta_1\delta_{30} - \frac{\beta_2^2}{\beta_1}\delta_{10}\right) + \left(\gamma_{20} + \gamma_{11} - 2\frac{\beta_2}{\beta_1}\gamma_{10}\right)\\
&\quad\times\left(\gamma_{20} - \frac{2}{3}\gamma_{11} - \frac{\beta_2}{3\beta_1}\gamma_{10}\right), \qquad j_3 = \frac{3}{5}\left(\frac{\delta_{10}}{\beta_1^3} - \frac{6\gamma_{10}^2}{5\beta_1^4}\right),\\
&j_2 = \frac{1}{\beta_1}\left(\delta_{20} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\delta_{10}\right) + \frac{\gamma_{10}}{5\beta_1^2}\left(7\frac{\beta_2}{\beta_1}\gamma_{10} - 6\gamma_{20} - \gamma_{11}\right).
\end{aligned}$$

Последние, в свою очередь, вычисляются с использованием

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = Q_x - P_y + 2PR - 2Q^2, && \beta_1 = \alpha_{1x} - \alpha_{0y} + R\alpha_0 - 2Q\alpha_1 + P\alpha_2,\\
&\alpha_1 = R_x - Q_y + PS - QR, && \beta_2 = \alpha_{2x} - \alpha_{1y} + S\alpha_0 - 2R\alpha_1 + Q\alpha_2,\\
&\alpha_2 = S_x - R_y + 2QS - 2R^2, && \Gamma_0 = 3\beta_2\gamma_{10} + \beta_1(\gamma_{20} - 4\gamma_{11}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma_{10} = \beta_{1x} - Q\beta_1 + P\beta_2, && \delta_{10} = \gamma_{10x} - 2Q\gamma_{10} + P(\gamma_{20} + \gamma_{11}) - 5\alpha_0\beta_1,\\
&\gamma_{20} = \beta_{1y} - R\beta_1 + Q\beta_2, && \delta_{20} = \gamma_{20x} - R\gamma_{10} + P\gamma_{21} - 4\alpha_1\beta_1 - \alpha_0\beta_2,\\
&\gamma_{11} = \beta_{2x} - R\beta_1 + Q\beta_2, && \delta_{11} = \gamma_{11x} - R\gamma_{10} + P\gamma_{21} - \alpha_1\beta_1 - 4\alpha_0\beta_2,\\
&\gamma_{21} = \beta_{2y} - S\beta_1 + R\beta_2, && \delta_{30} = \gamma_{20y} - S\gamma_{10} + Q\gamma_{21} - 4\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2.
\end{aligned}$$

Следующее утверждение описывает уравнения (1.1) четвертого типа.

Теорема 1. *ОДУ* (1.1) *четвертого типа удовлетворяют условиям*

$$\beta_1 \neq 0, \qquad J_0 = 0, \qquad j_0 = 0, \qquad j_1 \neq 0 \tag{2.1}$$

и имеют два алгебраических базисных инварианта

$$I_1 = \frac{\Gamma_0}{\beta_1\sqrt{j_1}}, \qquad I_2 = \frac{5(2j_1j_3 + j_2^2)}{\sqrt{j_1}}. \tag{2.2}$$

Произвольный инвариант уравнения (1.1) *может быть получен применением к* (2.2) *функционально-алгебраических операций и операторов инвариантного дифференцирования*

$$\mathcal{D}_1 = \frac{1}{\sqrt{j_1}}(\beta_2\partial_x - \beta_1\partial_y), \qquad \mathcal{D}_2 = j_1^{1/4}\Big(\frac{5j_2}{2j_1}(\beta_2\partial_x - \beta_1\partial_y) - \frac{3}{\beta_1}\partial_x\Big).$$

Замечание. Преобразование годографа $z = y$, $w = x$ превращает ОДУ (1.1) в уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -S(w,z) - 3R(w,z)\frac{dw}{dz} - 3Q(w,z)\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 - P(w,z)\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^3. \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что величины β_1, β_2, вычисленные для уравнения (2.3), после подстановки $z = y$, $w = x$ совпадают с величинами $-\beta_2$, $-\beta_1$, вычисленными для уравнения (1.1). Таким образом, преобразованием годографа уравнение (1.1) с $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$ приводится к уравнению с $\beta_1 \neq 0$. Поэтому уравнения (1.1), для которых $\beta_1 = 0$, отдельно не рассматриваются.

Условия эквивалентности уравнения (1.1) шестому уравнению Пенлеве могут быть сформулированы в терминах базисных инвариантов (2.2) и инвариантных производных I_1, а именно, $\mathcal{D}_2 I_1$ и $\mathcal{D}_1^m I_1$. Вместо этой последней серии инвариантов удобнее использовать универсальные абсолютные инварианты, введенные в [15] (только для уравнений четвертого типа)

$$J_1 = \frac{6}{5}\Big(\frac{1}{I_1^2} - 1\Big), \quad J_{m+1} = (m + (m+1)J_1)J_m + \frac{1}{I_1}\mathcal{D}_1 J_m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

§3. Эквивалентность шестому уравнению Пенлеве

Здесь мы найдем необходимые условия эквивалентности ОДУ второго порядка шестому уравнению Пенлеве.

Теорема 2. *Если ОДУ* (1.1) *четвертого типа эквивалентно шестому уравнению Пенлеве, то его инварианты* (2.2) *удовлетворяют условиям*

$$\det \frac{\partial(I_1, I_2)}{\partial(x,y)} \neq 0, \qquad I_{21} \equiv \mathcal{D}_2 I_1 \neq 0 \qquad (3.1)$$

и существует такое решение

$$z = \xi(x,y), \qquad w = \eta(x,y), \qquad H = \zeta(x,y) \qquad (3.2)$$

системы

$$\begin{aligned} 3\nu_0 J_3 H^4 + 450\nu_2\nu_5 J_2 H^3 - 15(256\nu_1\nu_2\nu_3^2 + 504\nu_1^2\nu_3\nu_4 + 45\nu_2\nu_4^2)J_1 H^2 \\ + 45(1512\nu_1^2\nu_3 + 125\nu_2\nu_4)\nu_5 H + 128(625\nu_2^2 - 3969\nu_1^3)\nu_3^3 \\ - 5(3600\nu_1\nu_2\nu_3^2 - 1512\nu_1^2\nu_3\nu_4 - 125\nu_2\nu_4^2)\nu_4 = 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
\nu_0 J_4 H^5 - 5(96\nu_1\nu_2\nu_3^2 + 504\nu_1^2\nu_3\nu_4 + 55\nu_2\nu_4^2)J_2H^3 + 75(504\nu_1^2\nu_3 \\
+ 61\nu_2\nu_4)\nu_5 J_1 H^2 + 2(1008\nu_1^2\nu_3 + 125\nu_2\nu_4)(144\nu_1\nu_3^2 - 5\nu_4^2)H \\
+ 30(1200\nu_1\nu_2\nu_3^2 - 1008\nu_1^2\nu_3\nu_4 - 125\nu_2\nu_4^2)\nu_5 = 0, \\
9J_5H^6 - 105\nu_4 J_3 H^4 + 2205\nu_5 J_2 H^3 + 21(976\nu_1\nu_3^2 - 45\nu_4^2)J_1H^2 \\
+ 6300\nu_4\nu_5 H - 20(1280\nu_2\nu_3^3 + 1008\nu_1\nu_3^2\nu_4 - 35\nu_3^3) = 0, \\
3J_6H^7 - 35\nu_4J_4H^5 + 945\nu_5J_3H^4 + 112(96\nu_1\nu_3^2 - 5\nu_4^2)J_2H^3 \\
+ 5880\nu_4\nu_5J_1H^2 + 40(960\nu_2\nu_3^3 + 1008\nu_1\nu_3^2\nu_4 - 35\nu_3^3)H \\
+ 840(48\nu_1\nu_3^2 - 5\nu_4^2)\nu_5 = 0, \quad (3.3)
\end{gathered}
$$

что его подстановка в соотношение

$$
I_1I_2 - \frac{HN_1}{768\nu_0\nu_1\nu_3^3} + \frac{1728I_{21}^2H^2\nu_1^2N_2}{25I_1^9N_0^2} = 0 \qquad (3.4)
$$

превращает (3.4) *в тождество. А подстановка* (3.2) *в*

$$
\begin{aligned}
&\frac{25I_1^9N_0^2}{2^{15}3^6I_{21}^2\nu_0^2\nu_1^2\nu_3^2H^3} + \alpha\nu_3^3(z+1-3w) \\
&\quad + \beta z(w-1)^3(w-z)^3(3z-(z+1)w) \\
&\quad + \gamma(z-1)w^3(w-z)^3((z-2)w+2z-1) \\
&\quad + \delta z(z-1)w^3(w-1)^3((2z-1)w+z(z-2)) = 0, \\
&\frac{25I_1^9N_0^2(w^2-z-H)}{2^{16}3^6I_{21}^2\nu_0^2\nu_1^2\nu_3^2H^3} + \alpha w^3(w-1)^4(w-z)^4(6w-z-1) \\
&\quad + \beta z(w-1)^4(w-z)^4(6z-(z+1)w) \\
&\quad + \gamma(z-1)w^3(w-z)^4((z-2)w^2+6(z-1)w+2z-1) \\
&\quad + \delta z(z-1)w^3(w-1)^4((2z-1)w^2+6z(z-1)w+z^2(z-2)) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{25I_1^9N_0^2(J_1H^2-4(z+1)\nu_3)}{2^{16}3^7I_{21}^2\nu_0^2\nu_1^2\nu_3^2H^3} + \alpha\nu_3^4(15w^2-8(z+1)w+3z) \\
&\quad - \beta z^2(w-1)^4(w-z)^4(3w^2-8(z+1)w+15z) \\
&\quad + \gamma(z-1)w^4(w-z)^4((7-5z)w^2+4(2z-1)(z-2)w \\
&\quad + z(7z-5)) + \delta z^2(z-1)w^4(w-1)^4((5-7z)w^2 \\
&\quad + 4(2z-1)(2-z)w + z(5z-7)) = 0,
\end{aligned} \qquad (3.5)
$$

$$\begin{aligned}
&\frac{25I_1^9N_0^2}{2^{18}3^7I_{21}^2\nu_0^2\nu_1^2\nu_3^2H^3}[J_2H^3+(w^2-z)(J_1H^2+4(z+1)\nu_3)\\
&\quad+2(w-1)(w-z)(3(w^2+z)-2(z+1)w)(z-w^2-H)]\\
&\quad+\alpha\nu_3^5(7(z+1)-18w)+\beta z^2(w-1)^5(w-z)^5(7(z+1)w-18z)\\
&\quad+3\gamma(z-1)^2w^5(w-z)^5((3z-7)w+7z-3)\\
&\quad+3\delta z^2(z-1)^2w^5(w-1)^5((3-7z)w+z(7-3z))=0
\end{aligned}$$

приводит к алгебраическим соотношениям, из которых могут быть найдены постоянные параметры PVI. Функции $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ *в* (3.2) *определяют замену переменных* (1.2), *связывающую уравнения* (1.1) *и* (1.3).

В (3.3)–(3.5) используются обозначения

$$\begin{aligned}
&\nu_0=216\nu_1^2\nu_3+25\nu_2\nu_4,\quad \nu_1=z^2-z+1,\quad \nu_2=(z+1)(2z-1)(z-2),\\
&\nu_3=w(w-1)(w-z),\quad \nu_5=(w^2-z)(w^2-2w+z)(w^2-2zw+z),\\
&\nu_4=3(w^2+z)^2-4(z+1)w(w^2+z)+4(z^2-z+1)w^2,\\
&\nu_6=27\nu_1\nu_5J_2H^3-6(168\nu_1^2\nu_3^2+15\nu_2\nu_3\nu_4-2\nu_1\nu_4^2)J_1H^2-135\nu_1\nu_4\nu_5H\\
&\quad+4800\nu_1\nu_2\nu_3^3+2232\nu_1^2\nu_3^2\nu_4-25\nu_2\nu_3\nu_4^2-15\nu_1\nu_4^3,\\
&\nu_7=(288\nu_1^2\nu_3^2+30\nu_2\nu_3\nu_4-\nu_1\nu_4^2)J_2H^3-12\nu_1\nu_4\nu_5J_1H^2-(576\nu_1^2\nu_3^2\\
&\quad+50\nu_2\nu_3\nu_4-5\nu_1\nu_4^2)\nu_4H-3(1584\nu_1^2\nu_3^2+100\nu_2\nu_3\nu_4-5\nu_1\nu_4^2)\nu_5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_0&=(6J_2-7J_1^2)\nu_1\nu_6H^2-3(5J_2+7J_1)\nu_1\nu_7H-20(5J_1+6)\nu_2\nu_3\nu_6\\
&\quad+(5J_1+6)\nu_0\nu_3[(31\nu_1\nu_4-72\nu_2\nu_3)J_1H^2-270\nu_1\nu_5H\\
&\qquad+2784\nu_1^2\nu_3^2-20\nu_2\nu_3\nu_4-30\nu_1\nu_4^2],\\
N_1&=5(\nu_6H+15\nu_7)+\nu_0\nu_3[18(J_1-5J_2)H^3+155\nu_4H+900\nu_5],\\
N_2&=(15\nu_7^2-12\nu_6\nu_7H-2\nu_6^2J_1H^2)I_1^2+12\nu_0\nu_3^2H^2[540\nu_2\nu_5J_2H^3\\
&\quad-6(768\nu_1\nu_2\nu_3^2+648\nu_1^2\nu_3\nu_4+35\nu_2\nu_4^2)J_1H^2+23328\nu_1^2\nu_3\nu_5H\\
&\quad+5(768(25\nu_2^2-108\nu_1^3)\nu_3^3+192\nu_1\nu_2\nu_3^2\nu_4+216\nu_1^2\nu_3\nu_4^2-35\nu_2\nu_4^3)].
\end{aligned}$$

Доказательство. Найдем соотношения на инварианты PVI. Те же соотношения будут выполняться для инвариантов уравнения (1.1), эквивалентного PVI. Инварианты (2.2), (2.4) и I_{21} уравнения (1.3) равны

$$\begin{aligned} &J_1 = -\frac{2K_0K_2}{K_1^2}, \qquad J_2 = \frac{2K_0^2K_3}{K_1^3}, \qquad J_3 = -\frac{16K_0^3K_4}{K_1^4}, \\ &J_4 = \frac{16K_0^4K_5}{K_1^5}, \qquad J_5 = -\frac{32K_0^5K_6}{K_1^6}, \qquad J_6 = \frac{32K_0^6K_7}{K_1^7}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\frac{I_{21}^2}{I_1^9} = -\frac{25\widetilde{N}_0^2}{2^{13}3^6\nu_0^2\nu_1^2\nu_3^2K_1^7}, \tag{3.7}$$

$$I_1I_2 = \frac{K_1\widetilde{N}_1}{768\nu_0\nu_1\nu_3^3K_0^3} + \frac{K_1\widetilde{N}_2}{4608\nu_0\nu_3^2K_0^3}, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_0 &= 2(3K_1K_3 - 7K_2^2)\nu_1K_8 + 3(7K_1K_2 - 5K_0K_3)\nu_1K_9 \\ &\quad - 20(3K_1^2 - 5K_0K_2)\nu_2\nu_3K_8 + 2(3K_1^2 - 5K_0K_2)\nu_0\nu_3[-135\nu_1\nu_5K_1 \\ &\quad + (72\nu_2\nu_3 - 31\nu_1\nu_4)K_2 + (1392\nu_1^2\nu_3^2 - 10\nu_2\nu_3\nu_4 - 15\nu_1\nu_4^2)K_0], \\ \widetilde{N}_1 &= 5K_1K_8 + 75K_0K_9 \\ &\quad + \nu_0\nu_3(900\nu_5K_0^2 + 155\nu_4K_0K_1 - 36(K_1K_2 + 5K_0K_3)), \\ \widetilde{N}_2 &= \frac{4K_2K_8^2 - 12K_1K_8K_9 + 15K_0K_9^2}{\nu_0(3K_1^2 - 5K_0K_2)} + 23328\nu_1^2\nu_3\nu_5K_1 \\ &\quad + 4\nu_3^2[1080\nu_2\nu_5K_3 + 5(768(25\nu_2^2 - 108\nu_1^3)\nu_3^3 + 216\nu_1^2\nu_3\nu_4^2 - 35\nu_2\nu_4^3 \\ &\quad + 192\nu_1\nu_2\nu_3^2\nu_4)K_0 + 12(768\nu_1\nu_2\nu_3^2 + 648\nu_1^2\nu_3\nu_4 + 35\nu_2\nu_4^2)K_2], \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} K_0 &= A(z+1-3w) + B(3z-(z+1)w) + \Gamma((z-2)w + 2z-1) \\ &\quad + \Delta((2z-1)w + z(z-2)), \qquad B = \beta z(w-1)^3(w-z)^3, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} &A = \alpha\nu_3^3, \quad \Gamma = \gamma(z-1)w^3(w-z)^3, \quad \Delta = \delta z(z-1)w^3(w-1)^3, \\ &K_8 = 54\nu_1\nu_5K_3 + 12(168\nu_1^2\nu_3^2 + 15\nu_2\nu_3\nu_4 - 2\nu_1\nu_4^2)K_2 - 135\nu_1\nu_4\nu_5K_1 \\ &\quad + (4800\nu_1\nu_2\nu_3^3 + 2232\nu_1^2\nu_3^2\nu_4 - 25\nu_2\nu_3\nu_4^2 - 15\nu_1\nu_4^3)K_0, \\ &K_9 = 2(288\nu_1^2\nu_3^2 + 30\nu_2\nu_3\nu_4 - \nu_1\nu_4^2)K_3 + 24\nu_1\nu_4\nu_5K_2 - (576\nu_1^2\nu_3^2 \\ &\quad + 50\nu_2\nu_3\nu_4 - 5\nu_1\nu_4^2)\nu_4K_1 - 3(1584\nu_1^2\nu_3^2 + 100\nu_2\nu_3\nu_4 - 5\nu_1\nu_4^2)\nu_5K_0. \end{aligned}$$

Вместо громоздких выражений для K_1, K_2, K_3 удобнее работать со следующими комбинациями

$$
\begin{aligned}
&(w^2-z)K_0-K_1=2A(w-1)(w-z)(6w-z-1)\\
&\quad+2B(w-1)(w-z)(6z-(z+1)w)\\
&\quad+2\Gamma(w-z)((z-2)w^2+6(z-1)w+2z-1)\\
&\quad+2\Delta(w-1)((2z-1)w^2+6z(z-1)w+z^2(z-2)),\\
&K_2+2(z+1)\nu_3K_0=-3A\nu_3(15w^2-8(z+1)w+3z)\\
&\quad+3Bz(w-1)(w-z)(3w^2-8(z+1)w+15z)\\
&\quad-3\Gamma w(w-z)((7-5z)w^2+4(2z-1)(z-2)w+z(7z-5))\\
&\quad-3\Delta zw(w-1)((5-7z)w^2+4(2z-1)(2-z)w+z(5z-7)),\\
&\quad(w-1)(w-z)(3(w^2+z)-2(z+1)w)((z-w^2)K_0-K_1)\\
&\quad+K_3+(w^2-z)(2(z+1)\nu_3K_0-K_2)=12A\nu_3^2(7(z+1)\\
&\quad-18w)+12Bz(w-1)^2(w-z)^2(7(z+1)w-18z)\\
&\quad+36\Gamma(z-1)w^2(w-z)^2((3z-7)w+7z-3)\\
&\quad+36\Delta z(z-1)w^2(w-1)^2((3-7z)w+z(7-3z)).
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Кроме того, для величин K_4, K_5, K_6, K_7 имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
&48\nu_0K_4-900\nu_2\nu_5K_3-30(256\nu_1\nu_2\nu_3^2+504\nu_1^2\nu_3\nu_4+45\nu_2\nu_4^2)K_2\\
&\quad-45(1512\nu_1^2\nu_3+125\nu_2\nu_4)\nu_5K_1+(128(3969\nu_1^3-625\nu_2^2)\nu_3^3\\
&\quad+18000\nu_1\nu_2\nu_3^2\nu_4-7560\nu_1^2\nu_3\nu_4^2-625\nu_2\nu_4^3)K_0=0,\\
&8\nu_0K_5-5(96\nu_1\nu_2\nu_3^2+504\nu_1^2\nu_3\nu_4+55\nu_2\nu_4^2)K_3-75(504\nu_1^2\nu_3\\
&\quad+61\nu_2\nu_4)\nu_5K_2+(1008\nu_1^2\nu_3+125\nu_2\nu_4)(144\nu_1\nu_3^2-5\nu_4^2)K_1\\
&\quad+15(1200\nu_1\nu_2\nu_3^2-1008\nu_1^2\nu_3\nu_4-125\nu_2\nu_4^2)\nu_5K_0=0,\\
&144K_6-840\nu_4K_4-2205\nu_5K_3+21(976\nu_1\nu_3^2-45\nu_4^2)K_2\\
&\quad-3150\nu_4\nu_5K_1+10(1280\nu_2\nu_3^3+1008\nu_1\nu_3^2\nu_4-35\nu_3^3)K_0=0,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&12K_7-70\nu_4K_5-1890\nu_5K_4+28(96\nu_1\nu_3^2-5\nu_4^2)K_3-1470\nu_4\nu_5K_2\\
&\quad+5(960\nu_2\nu_3^3+1008\nu_1\nu_3^2\nu_4-35\nu_3^3)K_1+105(48\nu_1\nu_3^2-5\nu_4^2)\nu_5K_0=0
\end{aligned}
$$

Равенства (3.6) разрешимы относительно величин

$$\begin{gathered} K_2=-\frac{K_1^2J_1}{2K_0},\qquad K_3=\frac{K_1^3J_2}{2K_0^2},\qquad K_4=-\frac{K_1^4J_3}{16K_0^3},\\ K_5=\frac{K_1^5J_4}{16K_0^4},\qquad K_6=-\frac{K_1^6J_5}{32K_0^5},\qquad K_7=\frac{K_1^7J_6}{32K_0^6}. \end{gathered} \tag{3.12}$$

После их подстановки соотношения (3.11) принимают вид (3.3), а (3.7) – вид

$$\frac{I_{21}^2}{I_1^9}=-\frac{25N_0^2}{2^{15}3^6\nu_0^2\nu_1^2\nu_3^2H^2K_1},\qquad H=\frac{K_1}{K_0},$$

откуда можно выразить величину K_1. Ее подстановка в (3.8) вместе с (3.12) приводит к (3.4), а подстановка в (3.9), (3.10) приводит к (3.5). Это завершает доказательство. □

§4. Применение Теоремы 2

Если необходимо проверить данное ОДУ (1.1) на эквивалентность PVI, прежде всего нужно проверить для него условия (2.1), (3.1) и затем найти решение (3.2) системы (3.3).

Соотношения (3.3) могут быть переписаны в форме полиномов четвертой степени по H:

$$\begin{aligned} &3P_4J_3H^4+450\nu_5P_3J_2H^3-15P_2J_1H^2+45\nu_5P_1H+P_0=0,\\ &Q_4J_4H^4-90\nu_5Q_3J_3H^3+5Q_2J_2H^2+75\nu_5Q_1J_1H+Q_0=0,\\ &3R_4J_5H^4-900\nu_5R_3J_4H^3+15R_2J_3H^2+315\nu_5R_1J_2H+R_0J_1=0,\\ &S_4J_6H^4+120\nu_5S_3J_5H^3+15S_2J_4H^2+225\nu_5S_1J_3H+S_0J_2=0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$\begin{aligned} &P_0=128(625\nu_2^2-3969\nu_1^3)\nu_3^3-5(3600\nu_1\nu_2\nu_3^2-1512\nu_1^2\nu_3\nu_4-125\nu_2\nu_4^2)\nu_4,\\ &P_1=1512\nu_1^2\nu_3+125\nu_2\nu_4,\quad P_2=256\nu_1\nu_2\nu_3^2+504\nu_1^2\nu_3\nu_4+45\nu_2\nu_4^2,\\ &P_3=\nu_2,\quad P_4=216\nu_1^2\nu_3+25\nu_2\nu_4,\quad Q_0=384\nu_3^3R_4,\quad Q_4=P_0,\\ &Q_1=128(1525\nu_2^2-9261\nu_1^3)\nu_3^3-7(5520\nu_1\nu_2\nu_3^2-504\nu_1^2\nu_3\nu_4-25\nu_2\nu_4^2)\nu_4,\\ &Q_2=128(9261\nu_1^3-1625\nu_2^2)\nu_3^3\nu_4+7(32256\nu_1^2\nu_2\nu_3^4+1200\nu_1\nu_2\nu_3^2\nu_4^2\\ &\qquad -2520\nu_1^2\nu_3\nu_4^3-125\nu_2\nu_4^4),\quad Q_3=1200\nu_1\nu_2\nu_3^2-1008\nu_1^2\nu_3\nu_4-125\nu_2\nu_4^2, \end{aligned}$$

$$R_0 = 5376(540125\nu_2^2 - 2259684\nu_1^3)\nu_1^2\nu_3^4 + 4116000\nu_1^2\nu_2\nu_3\nu_4^3 + 6720(28224\nu_1^3 - 6875\nu_2^2)\nu_1\nu_3^2\nu_4^2 + 875(625\nu_2^2 - 1764\nu_1^3)\nu_4^4 + 6400(38125\nu_2^2 - 168462\nu_1^3)\nu_2\nu_3^3\nu_4, \quad R_1 = -117600\nu_1^2\nu_2\nu_3\nu_4 + 48(18125\nu_2^2 - 86436\nu_1^3)\nu_1\nu_3^2 + 25(1764\nu_1^3 - 625\nu_2^2)\nu_4^2,$$

$$R_2 = 1290240\nu_1^3\nu_2\nu_3^3 + 48(107604\nu_1^3 - 15625\nu_2^2)\nu_1\nu_3^2\nu_4 + 285600\nu_1^2\nu_2\nu_3\nu_4^2 + 65(625\nu_2^2 - 1764\nu_1^3)\nu_4^3, \quad R_3 = 1680\nu_1^2\nu_2\nu_3 + (625\nu_2^2 - 1764\nu_1^3)\nu_4,$$

$$R_4 = 112(3125\nu_2^2 - 15876\nu_1^3)\nu_1\nu_3^2 - 84000\nu_1^2\nu_2\nu_3\nu_4 + 25(1764\nu_1^3 - 625\nu_2^2)\nu_4^2,$$

$$S_0 = 512\nu_3^3[64(43747200\nu_1^3\nu_2^2 - 1328694192\nu_1^6 - 27640625\nu_2^4)\nu_3^3 + 403200(3625\nu_2^2 - 15582\nu_1^3)\nu_1\nu_2\nu_3^2\nu_4 + 88200(19404\nu_1^3 - 5375\nu_2^2)\nu_1^2\nu_3\nu_4^2 + 30625(5292\nu_1^3 - 1375\nu_2^2)\nu_2\nu_4^3],$$

$$S_1 = 16128(267725\nu_2^2 - 1111908\nu_1^3)\nu_1^2\nu_3^4 + 823200\nu_1^2\nu_2\nu_3\nu_4^3 + 6400(44225\nu_2^2 - 196686\nu_1^3)\nu_2\nu_3^3\nu_4 + 105(625\nu_2^2 - 1764\nu_1^3)\nu_4^4 + 20160(7056\nu_1^3 - 1975\nu_2^2)\nu_1\nu_3^2\nu_4^2,$$

$$S_2 = 5376(2905308\nu_1^3 - 689875\nu_2^2)\nu_1^2\nu_3^4\nu_4 - 4116000\nu_1^2\nu_2\nu_3\nu_4^4 + 57600(21266\nu_1^3 - 5125\nu_2^2)\nu_2\nu_3^3\nu_4^2 + 11200(3025\nu_2^2 - 15288\nu_1^3)\nu_1\nu_3^2\nu_4^3 + 40960(125538\nu_1^3 - 27875\nu_2^2)\nu_1\nu_2\nu_3^5 + 525(1764\nu_1^3 - 625\nu_2^2)\nu_4^5,$$

$$S_3 = 320(38125\nu_2^2 - 168462\nu_1^3)\nu_2\nu_3^3 + 672(28224\nu_1^3 - 6875\nu_2^2)\nu_1\nu_3^2\nu_4 + 617400\nu_1^2\nu_2\nu_3\nu_4^2 + 175(625\nu_2^2 - 1764\nu_1^3)\nu_4^3, \quad S_4 = R_0.$$

Из (4.1) следует равенство нулю квадратных полиномов по H

$$\begin{gathered} 15U_6H^2 + 45\nu_5U_5H + U_4 = 0, \quad 15V_6H^2 + 45\nu_5V_5H + V_4 = 0, \\ 6\nu_5U_4H^2 + U_3H + 3\nu_5U_2 = 0, \quad 6\nu_5V_4H^2 + V_3H + 3\nu_5V_2 = 0, \\ U_2H^2 + 30\nu_5U_1H + 5U_0 = 0, \quad V_2H^2 + 30\nu_5V_1H + 5V_0 = 0, \end{gathered} \tag{4.2}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} &U_0 = T_0P_2J_1 + T_1P_1 - T_4P_0, && U_1 = -5T_0P_3J_2 - 3T_2P_1 + T_5P_0, \\ &U_2 = -T_0P_4J_3 + T_3P_1 - T_6P_0, && U_3 = -T_1P_4J_3 - T_3P_2J_1 - T_8P_0, \\ &U_4 = 3T_2P_4J_3 + 5T_3P_3J_2 + T_9P_0, && T_0 = 21Q_0R_1J_2 - 5R_0Q_1J_1^2, \\ &U_5 = T_5P_4J_3 + 5T_6P_3J_2 + T_9P_1, && T_1 = 3Q_0R_2J_3 - R_0Q_2J_1J_2, \\ &U_6 = T_7P_4J_3 + 5T_8P_3J_2 - T_9P_2J_1, && T_2 = 10Q_0R_3J_4 - R_0Q_3J_1J_3, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&V_0 = 3T_0S_2J_4 - 15T_1S_1J_3 + 3T_4S_0J_2, && T_3 = 3Q_0R_4J_5 - R_0Q_4J_1J_4,\\
&V_1 = 4T_0S_3J_5 + 45T_2S_1J_3 - 3T_5S_0J_2, && T_4 = 5Q_1R_2J_1J_3 - 7R_1Q_2J_2^2,\\
&V_2 = T_0S_4J_6 - 15T_3S_1J_3 + 3T_6S_0J_2, && T_5 = 50Q_1R_3J_1J_4 - 21R_1Q_3J_2J_3,\\
&V_3 = T_1S_4J_6 - 3T_3S_2J_4 + 3T_8S_0J_2, && T_6 = 5Q_1R_4J_1J_5 - 7R_1Q_4J_2J_4,\\
&V_4 = -3T_2S_4J_6 - 4T_3S_3J_5 - 3T_9S_0J_2, && T_7 = 10Q_2R_3J_2J_4 - 3R_2Q_3J_3^2,\\
&V_5 = -T_5S_4J_6 - 4T_6S_3J_5 - 15T_9S_1J_3, && T_8 = Q_2R_4J_2J_5 - R_2Q_4J_3J_4,\\
&V_6 = -T_7S_4J_6 - 4T_8S_3J_5 - 3T_9S_2J_4, && T_9 = 3Q_3R_4J_3J_5 - 10R_3Q_4J_4^2.
\end{aligned}
$$

Эти выражения удовлетворяют условиям

$$
\begin{aligned}
&U_0U_4 - U_1U_3 = U_2\widetilde{U}_2, && \widetilde{U}_2 = 5T_1P_3J_2 - 3T_2P_2J_1 - T_7P_0,\\
&U_2U_6 - U_3U_5 = U_4\widetilde{U}_4, && \widetilde{U}_4 = T_4P_4J_3 + T_6P_2J_1 + T_8P_1,\\
&V_0V_4 - V_1V_3 = V_2\widetilde{V}_2, && \widetilde{V}_2 = -4T_1S_3J_5 - 9T_2S_2J_4 + 3T_7S_0J_2,\\
&V_2V_6 - V_3V_5 = V_4\widetilde{V}_4, && \widetilde{V}_4 = -T_4S_4J_6 + 3T_6S_2J_4 - 15T_8S_1J_3.
\end{aligned}
$$

Исключение H из равенств (4.2) приводит к соотношениям

$$
\begin{aligned}
U_4[3\nu_5^2(4U_4^3 - 30U_3U_4U_5 - 60U_2U_4U_6 + 225U_2\widetilde{U}_4U_6)&\\
+12150\nu_5^4U_2U_5^2 + 5U_3^2U_6] = 0,&\\
V_4[3\nu_5^2(4V_4^3 - 30V_3V_4V_5 - 60V_2V_4V_6 + 225V_2\widetilde{V}_4V_6)&\\
+12150\nu_5^4V_2V_5^2 + 5V_3^2V_6] = 0,&\\
U_2[9\nu_5^2(U_2^3 - 10U_1U_2U_3 - 20U_0U_2U_4 + 100U_0\widetilde{U}_2U_4)&\\
+16200\nu_5^4U_1^2U_4 + 5U_0U_3^2] = 0,&\\
V_2[9\nu_5^2(V_2^3 - 10V_1V_2V_3 - 20V_0V_2V_4 + 100V_0\widetilde{V}_2V_4)&\\
+16200\nu_5^4V_1^2V_4 + 5V_0V_3^2] = 0.&
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Они заданы полиномами по z, w с коэффициентами, являющимися функциями инвариантов $J_1, \ldots, J_6$ уравнения (1.1), зависящими от x, y.

Пусть можно найти такие функции $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$, что выражения (1.2) являются решением всех равенств (4.3). После подстановки (1.2) попытаемся факторизовать левые части равенств (4.2) с общим множителем, из равенства нулю которого получается выражение для $H = \zeta(x,y)$. Если рассматриваемое ОДУ (1.1) эквивалентно PVI, то подстановка полученных таким образом функций (3.2) в соотношения

(3.3), (3.4) превращает их в тождества. После подстановки (3.2) соотношения (3.5) должны сводиться к совместной системе алгебраических уравнений на α, β, γ, δ. Иначе, если эта система несовместна или не является алгебраической, то данное ОДУ (1.1) неэквивалентно PVI.

§5. Другие необходимые условия эквивалентности и автопреобразования PVI

В [15] найдены условия эквивалентности ОДУ второго порядка шестому уравнению Пенлеве с одним ненулевым существенным параметром. Если модифицировать серию (2.4), в терминах которой они формулируются, и ввести инварианты

$$E_1 = \frac{6}{5}\Big(\frac{1}{I_1^2}-1\Big),\ \ E_{m+1} = (2m+(m+1)E_1)E_m+\frac{1}{I_1}\mathcal{D}_1 E_m,\ \ m\in\mathbb{N}, \quad (5.1)$$

то эти условия принимают следующий вид.

Теорема 3. *Инварианты* (5.1) *уравнения* (1.1), *эквивалентного шестому уравнению Пенлеве, удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{gathered}225E_3^2(E_3-2E_2-E_1)-120(E_1E_3+E_2^2)^2\\ -30E_1E_2(3E_2E_3+5E_1E_3+2E_2^2)+E_1^3(16E_1E_3+7E_2^2)=0,\\ E_1E_5+20E_2E_4-45E_3^2=0 \quad (5.2)\end{gathered}$$

в следующих случаях:

(1) *только один из параметров α, β, γ или δ уравнения (1.3) отличен от нуля;*

(2) *два параметра равны друг другу и отличны от нуля, а другие два равны нулю;*

(3) $\alpha=\beta=\gamma=\delta\neq 0$.

Условия (5.2) являются только необходимыми, так как в них не задействованы инварианты I_2 и $\mathcal{D}_2 I_1$. Но их проверять легче, чем условия теоремы 2 и это имеет смысл делать перед ее применением.

Теорема 3 позволяет предположить, что перечисленные в ней три частных случая PVI связаны между собой некоторыми точечными преобразованиями. Их можно найти с помощью инвариантов (5.1) и теоремы 2. Для уравнения (1.3) с $\alpha\neq 0$, $\beta=\gamma=\delta=0$

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-z}\Big)\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2-\Big(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{w-z}\Big)\frac{dw}{dz}$$
$$+\frac{\alpha w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}+\frac{w(w-1)}{2z(z-1)(w-z)} \qquad (5.3)$$

инварианты (5.1) равны

$$E_1=-\frac{k_0\tau}{3k_1^2}(\rho+\sigma),\quad E_2=\frac{k_0\tau^2}{3k_1^3}(4\rho+\sigma),\quad E_3=\frac{k_0\tau^3}{3k_1^4}(7\rho+\sigma) \qquad (5.4)$$

и так далее, где

$$k_1=15(w-z-1)w^2+(2z^2+13z+2)w-z(z+1),\ k_0=3w-z-1,$$
$$\tau=6w(w-1)(w-z),\ \rho=2(z^2-z+1),\ \sigma=15(3w^2-2(z+1)w+z).$$

Шестое уравнение Пенлеве, в котором $\alpha=\beta=\gamma=\delta=A\neq 0$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\Big)\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2-\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\Big)\frac{dy}{dx}$$
$$+\frac{A(y^2-x)(y^2-2y+x)(y^2-2xy+x)}{x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)}+\frac{y(y-1)}{2x(x-1)(y-x)} \qquad (5.5)$$

имеет инварианты (5.1) той же формы (5.4), но с коэффициентами

$$k_1=60y(y-1)(x-y)(y^2-x)^4(x+1)-64x(x+1)y^3(y-1)^3(y-x)^3$$
$$+15(y^2-x)^6+16y^2(y-1)^2(y-x)^2(y^2-x)^2(2x^2+13x+2),$$
$$k_0=3(y^2-x)^2+4y(y-1)(x-y)(x+1),$$
$$\tau=6(y^2-x)^2(y^2-2y+x)^2(y^2-2xy+x)^2,$$
$$\rho=32y^2(y-1)^2(y-x)^2(x^2-x+1),\quad \sigma=15(3(y^2-x)^4$$
$$+8y(y-1)(x-y)(y^2-x)^2(x+1)+16xy^2(y-1)^2(y-x)^2).$$

Сравнивая коэффициенты ρ, можно предположить, что $z=x$. Тогда из равенства инвариантов (5.4) уравнений (5.3), (5.5) следует

$$z=x,\qquad w=\frac{(y^2-x)^2}{4y(y-1)(y-x)}. \qquad (5.6)$$

Применим теорему 2 к уравнению (5.5). При подстановке (5.6) соотношения (4.3) превращаются в тождества, а (4.2) факторизуются с общим множителем $(y^2-x)(y^2-2y+x)(y^2-2xy+x)k_0H-k_1$. Приравнивая его нулю, можно найти выражение для H. Его подстановка вместе с (5.6) в (3.3), (3.4) приводит к тождествам, а (3.5) сводятся к $\alpha - 16A = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$. Таким образом, замена переменных (5.6) связывает ОДУ (5.5) с уравнением (5.3), в котором $\alpha = 16A$. Преобразования, связывающие ОДУ (5.5) с PVI, в котором отличен от нуля один из параметров β, γ или δ, можно получить произведением (5.6) с известными точечными автопреобразованиями PVI [24].

Для PVI с параметрами $\alpha = \beta = B \neq 0$, $\gamma = \delta = 0$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-t}\Big)\Big(\frac{du}{dt}\Big)^2 - \Big(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{u-t}\Big)\frac{du}{dt} + \frac{B(u-1)(u-t)(u^2-t)}{t^2(t-1)^2u} + \frac{u(u-1)}{2t(t-1)(u-t)} \tag{5.7}$$

инварианты (5.1) имеют форму (5.4) с коэффициентами

$$k_1 = 2u^2(u^2+t)(t^2-16t+1) - u(t+1)(15u^4+2tu^2+15t^2) + 15(u^2+t)^3,$$
$$k_0 = 3(u^2+t) - (t+1)u, \quad \tau = 6(u-1)(u-t)(u^2-t)^2,$$
$$\rho = 2u^2(t^2+14t+1), \quad \sigma = 15(3(u^2+t)^2 - 2u(t+1)(u^2+t) - 4tu^2).$$

Приравнивая соответствующие инварианты (5.4) уравнений (5.3), (5.7) и разрешая эти равенства относительно z, w, получим замену

$$z = \frac{(\sqrt{t}+1)^2}{4\sqrt{t}}, \qquad w = \frac{(u+\sqrt{t})^2}{4\sqrt{t}u}. \tag{5.8}$$

Она преобразует ОДУ (5.7) в ОДУ (5.3) с $\alpha = 4B$. Уравнения (5.3), (5.5), (5.7) обсуждаются в [26], в том числе случай $A = B = 1/8$.

Для PVI либо с двумя парами равных друг другу параметров, либо с двумя отличными от нуля и не равными друг другу параметрами имеют место соотношения, аналогичные (5.2). Ввиду их громоздкости они здесь не приводятся. Нетрудно убедиться, что формула (5.8) задает также автопреобразование из PVI с параметрами $\alpha = \beta = B \neq 0$, $\gamma = \delta = \Gamma \neq 0$, $B \neq \Gamma$ относительно функции $u(t)$ в уравнение (1.3) с $\alpha = 4B$, $\beta = \gamma = 0$, $\delta = 4\Gamma$.

Список литературы

1. R. Liouville, *Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications.* — J. École Polytechnique **59** (1889), 7–76.
2. A. Tresse, *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations.* — Acta Math. **18** (1894), 1–88.

3. E. Cartan, *Sur les variétés à connexion projective.* — Bull. Soc. Math. France **52** (1924), 205–241.
4. S. Lie, *Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. III.* — Arch. Mat. Naturvidensk. **8** (1883), 371–458.
5. Э. Л. Айнс, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Харьков: ОНТИ (1939).
6. N. Kamran, K. G. Lamb, W. F. Shadwick, *The local equivalence problem for* $y'' = F(x, y, y')$ *and the Painlevé transcendents.* — J. Diff. Geom. **22** (1985), 139–150.
7. A. V. Bocharov, V. V. Sokolov, S. I. Svinolupov, *On some equivalence problems for differential equations.* — International Erwin Schrödinger Institute for Mathematical Physics, Preprint ESI-54, Vienna (1993), 12 pp.
8. J. Hietarinta, V. Dryuma, *Is my ODE a Painlevé equation in disguise?* — J. Nonlin. Math. Phys. **9**, Suppl. 1 (2002), 67–74.
9. R. Dridi, *On the geometry of the first and second Painlevé equations.* — J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009), 125201.
10. V. V. Kartak, *Point classification of second order ODEs and its application to Painlevé equations.* — J. Nonlin. Math. Phys. **20**, Suppl. 1 (2013), 110–129.
11. Yu. Yu. Bagderina, *Invariants of a family of scalar second-order ordinary differential equations.* — J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013), 295201.
12. V. V. Kartak, *"Painlevé 34" equation: equivalence test.* — Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. **19**, No. 9 (2014), 2993–3000.
13. Ю. Ю. Багдерина, *Эквивалентность ОДУ второго порядка уравнениям типа первого уравнения Пенлеве.* — Уфимский математический журнал **7**, No. 1 (2015), 19–30.
14. Yu. Yu. Bagderina, N. N. Tarkhanov, *Solution of the equivalence problem for the third Painlevé equation.* — J. Math. Phys. **56** (2015), 013507.
15. Ю. Ю. Багдерина, *Эквивалентность обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка уравнениям Пенлеве.* — Теор. матем. физика **182**, No. 2 (2015), 256–276.
16. R. Fuchs, *Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre.* — Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **141** (1905), 555–558.
17. B. Gambier, *Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes.* — Acta Mathematica **33** (1910), 1–55.
18. M. Jimbo, T. Miwa, *Studies of holonomic quantum fields. XVII.* — Proc. Japan Acad. **56** Ser. A (1980), 405–410.
19. P. J. Forrester, N. S. Witte, *Application of the* τ*-function theory of Painlevé equations to random matrices: PVI, the JUE, CyUE, cJUE and scaled limits.* — Nagoya Math. J. **174** (20014), 29–114.
20. H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations.* — Commun. Math. Phys. **220** (2001), 165–220.
21. A. S. Fokas, R. A. Leo, L. Martina, G. Soliani, *The scaling reduction of the three-wave resonant system and the Painlevé VI equation.* — Phys. Lett. A **115** (1986), 329–332.

22. A. V. Kitaev, *On similarity reductions of the three-wave resonant system to the Painlevé equations.* — J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), 3543–3553.
23. L. J. Mason, N. M. Woodhouse, *Self-duality and the Painlevé transcendents.* — Nonlinearity **6** (1993), 569–581.
24. K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé, a Modern Theory of Special Functions*, Braunschweig: Vieweg (1991).
25. M. V. Babich, L. A. Bordag, *Projective differential geometrical structure of the Painlevé equations.* — J. Differ. Equations **157** (1999), 452–485.
26. Yu. I. Manin, *Sixt Painlevé Equation, Universal Elliptic Curve, and Mirror of* $\mathbb{P}^2$. — Max–Planck–Institut für Mathematik, Preprint MPI 96-114, Bonn (1996), 20 pp.
27. Yu. Yu. Bagderina, *Invariants of a family of scalar second-order ordinary differential equations for Lie symmetries and first integrals.* — J. Phys. A: Math. Theor. **49** (2016), 155202.

Bagderina Yu. Yu. Necessary conditions of point equivalence of second-order ODEs to the sixth Painlevé equation.

Equivalence problem for a projective type scalar second-order ordinary differential equations is considered with respect to invertible point changes of variables. Invariants of the equivalence transformation group of this family of equations are used to find the necessary conditions of the equivalence to the sixth Painlevé equation.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН
ул. Чернышевского 112,
Уфа 450008, Россия
E-mail: `bagderinayu@yandex.ru`

Поступило 1 ноября 2018 г.