Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 472, 2018 г.

В. Н. Чугунов

О НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВАХ АНТИКОММУТИРУЮЩИХ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ

§1. Постановка задачи

Теплицевой называется комплексная $n \times n$-матрица T, имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Теплицева матрица (1) называется *ϕ-циркулянтом*, если

$$t_{-j} = \phi t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $\phi \in \mathbf{C}$.

Задача об антикоммутировании теплицевых матриц заключается в описании пар теплицевых матриц T_1 и T_2, удовлетворяющих соотношению

$$T_1 T_2 + T_2 T_1 = 0. \qquad (2)$$

В предлагаемой работе даются частные решения этой задачи. В §2 формулируется теорема, являющаяся главным результатом статьи; в ней перечисляются некоторые классы пар (T_1, T_2), решающих задачу. Доказательство теоремы проводится в §3, в заключение которого указывается, где лежат оставшиеся решения.

При обосновании результата будем использовать следующий факт, который принадлежит к теплицеву фольклору. Все знают о нем, но никто не знает первоисточника.

Лемма. *Произведение нескалярных теплицевых матриц T_1 и T_2 тогда и только тогда является теплицевой матрицей, когда T_1 и T_2 принадлежат хотя бы одному из следующих классов*:

Ключевые слова: теплицева матрица, ϕ-циркулянт, антикоммутирующие матрицы.

Работа автора поддержана грантом Российского научного фонда No. 14-11-00806.

Класс ТПТМ_1. *Матрицы T_1 и T_2 суть ϕ-циркулянты для одного и того же числа $\phi \neq 0$.*

Класс ТПТМ_2. *Обе матрицы T_1 и T_2 верхнетреугольные или же обе нижнетреугольные.*

§2. Главный результат

Основным результатом, который будет установлен в данной работе, является следующее утверждение.

Теорема. *Ненулевые теплицевы матрицы T_1 и T_2 антикоммутируют, если принадлежат одному из следующих классов*:

Класс 1. *Матрицы T_1 и T_2 – ϕ-циркулянты для одного и того же числа ϕ ($\phi \neq 0$). При этом T_1 и T_2 делят нуль, т.е. $T_1 T_2 = 0$.*

Класс 2. *Матрицы T_1 и T_2 являются верхними* (*нижними*) *треугольными с соответственно k* (*где $0 < k < n$*) *и $n-k$ нулевыми последними* (*первыми*) *строками.*

Класс 3. *Матрицы T_1 и T_2 имеют вид*

$$T_1 = \alpha \left(L_1 + L_2^\top \right), \quad T_2 = \beta \left(L_1 - L_2^\top \right),$$

где L_1 и L_2 – нижние треугольные теплицевы матрицы, такие что $L_1^2 = L_2^2 = 0$. Здесь α, β – произвольные комплексные числа.

Класс 4. *Матрицы T_1 и T_2 имеют вид*

$$T_1 = \alpha(C + S), \quad T_2 = \beta(C - S),$$

где C – инволютивный ϕ_1-циркулянт, а S – инволютивный ϕ_2-циркулянт ($\phi_1 \neq 0$, $\phi_2 \neq 0$ и $\phi_1 \neq \phi_2$). При этом α, β – произвольные комплексные числа.

§3. Доказательство главного результата

В данном параграфе установим справедливость сформулированной выше теоремы.

Начнем доказательство с разбора двух особых случаев. Если матрицы T_1 и T_2 – ϕ-циркулянты для одного и того же числа ϕ, то они коммутируют (см. [1]) и, чтобы являться решением, должны делить нуль. Получаем класс 1.

В ситуации, когда T_1 и T_2 одновременно являются верхними (нижними) треугольными матрицами, они также коммутируют и будут решением, если их произведение равно нулевой матрице. Это соответствует классу 2.

Для исследования общего случая введем дополнительные теплицевы матрицы A и B вида

$$A = \frac{T_1 + T_2}{2}, \quad B = \frac{T_1 - T_2}{2};$$

тогда

$$T_1 = A + B, \quad T_2 = A - B.$$

Условие, что матрицы T_1 и T_2 ненулевые, накладывает ограничения

$$A \neq \pm B. \tag{3}$$

Подставим выражения для T_1 и T_2 в уравнение (2):

$$(A + B)(A - B) + (A - B)(A + B) = 0.$$

Совершая элементарные преобразования, получим соотношение

$$A^2 - AB + BA - B^2 + A^2 + AB - BA - B^2 = 0,$$

которое эквивалентно уравнению

$$A^2 - B^2 = 0. \tag{4}$$

Вместо уравнения (2) будем решать (4). Обозначим элементы первой строки в матрицах A и B соответственно через $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ и b_0, $b_1, \ldots, b_{n-1}$. Аналогично элементы первого столбца в этих матрицах обозначим через $a_0, a_{-1}, \ldots, a_{-(n-1)}$ и $b_0, b_{-1}, \ldots, b_{-(n-1)}$.

Правая часть в (4), будучи нулевой матрицей, является теплицевой, поэтому и левая часть должна быть теплицевой матрицей, т. е.

$$\left\{A^2 - B^2\right\}_{k,j} = \left\{A^2 - B^2\right\}_{k+1,j+1}, \qquad k, j = 1, \ldots, n-1. \tag{5}$$

Подробная запись последнего равенства

$$\sum_{l=1}^{n} \{A\}_{k,l}\{A\}_{l,j} - \sum_{l=1}^{n} \{B\}_{k,l}\{B\}_{l,j} - \sum_{l=1}^{n} \{A\}_{k+1,l}\{A\}_{l,j+1} + \sum_{l=1}^{n} \{B\}_{k+1,l}\{B\}_{l,j+1} = 0,$$

в силу теплицевости A и B, эквивалентна условию

$$\sum_{l=1}^{n} a_{l-k}a_{j-l} - \sum_{l=1}^{n} a_{l-k-1}a_{j+1-l} - \sum_{l=1}^{n} b_{l-k}b_{j-l} + \sum_{l=1}^{n} b_{l-k-1}b_{j+1-l} = 0.$$

Заменим индексы суммирования l на p: в первой и третьей суммах положим $p = l$, а во второй и четвертой $p = l - 1$:

$$\sum_{p=1}^{n} a_{p-k}a_{j-p} - \sum_{p=0}^{n-1} a_{p-k}a_{j-p} - \sum_{p=1}^{n} b_{p-k}b_{j-p} + \sum_{p=0}^{n-1} b_{p-k}b_{j-p} = 0.$$

Выполняя элементарные преобразования, приходим к равенству

$$a_{n-k}a_{-(n-j)} - a_{-k}a_j - b_{n-k}b_{-(n-j)} + b_{-k}b_j = 0.$$

Заменив j на $n - j$, имеем

$$a_{n-k}a_{-j} - a_{n-j}a_{-k} = b_{n-k}b_{-j} - b_{n-j}b_{-k}. \tag{6}$$

Из элементов матриц A и B построим две вспомогательные $(n-1)\times$ 2-матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{-1} \\ a_{n-2} & a_{-2} \\ \vdots & \vdots \\ a_1 & a_{-(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} b_{n-1} & b_{-1} \\ b_{n-2} & b_{-2} \\ \vdots & \vdots \\ b_1 & b_{-(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Определим величины

$$\triangle_{kj}^{\mathcal{F}} = \det\begin{pmatrix} a_{n-k} & a_{-k} \\ a_{n-j} & a_{-j} \end{pmatrix} = a_{n-k}a_{-j} - a_{n-j}a_{-k},$$

$$\triangle_{kj}^{\mathcal{G}} = \det\begin{pmatrix} b_{n-k} & b_{-k} \\ b_{n-j} & b_{-j} \end{pmatrix} = b_{n-k}b_{-j} - b_{n-j}b_{-k}.$$

Тогда равенства (6) принимают вид

$$\triangle_{kj}^{\mathcal{F}} = \triangle_{kj}^{\mathcal{G}}. \tag{7}$$

Рассмотрим несколько случаев.

I случай. Матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ нулевые, тогда A и B – диагональные матрицы вида $A = a_0 I_n$ и $B = b_0 I_n$. Условие (4) означает, что $A = \pm B$. Это нарушает требование (3).

II случай. Матрица $\mathcal{G}$ нулевая, а $\mathcal{F}$ ненулевая.

В этом случае матрица B является скалярной, а тогда, в силу (4), A^2 должна быть скалярной матрицей. Так как матрица A теплицева и ее квадрат является теплицевой матрицей, то, по лемме, A – либо нижняя или верхняя треугольная матрица, либо ϕ-циркулянт. Рассмотрим эти ситуации.

Пусть сначала

$$A = a_0 I_n + L, \quad B = b_0 I_n,$$

где L – нижняя строго треугольная матрица. Тогда имеем условие

$$a_0^2 I_n + 2a_0 L + L^2 = b_0^2 I_n,$$

которое можно записать как

$$a_0^2 I_n + L(2a_0 I_n + L) = b_0^2 I_n.$$

Матрица $L(2a_0 I_n + L)$ теплицева нижняя строго треугольная, поэтому получаем систему

$$\begin{cases} a_0 = \pm b_0, \\ L(2a_0 I_n + L) = 0. \end{cases}$$

Если $b_0 \neq 0$, то $a_0 \neq 0$ и матрица $2a_0 I_n + L$ невырожденна, поэтому $L = 0$ и A – скалярная матрица. Условие (4) означает, что $A = \pm B$. Это нарушает требование (3).

В случае $b_0 = 0$ получаем, что $B = 0$ и $T_1 = T_2 = L$ с условием $L^2 = 0$. Приходим к частному случаю класса 2. Аналогично рассматривается ситуация, когда A – верхнетреугольная теплицева матрица.

Если A – ϕ-циркулянт, то, учитывая скалярность матрицы B, получаем, что T_1 и T_2 – ϕ-циркулянты для одного и того же числа ϕ. Этот случай уже был рассмотрен.

III случай. Если матрица $\mathcal{F}$ нулевая, а $\mathcal{G}$ ненулевая, то все разбирается аналогично.

IV случай. Матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ненулевые, а $\operatorname{rank}\mathcal{F} = 1$. Тогда в (7) все $\triangle_{kj}^{\mathcal{F}} = 0$, а значит все $\triangle_{kj}^{\mathcal{G}} = 0$, т.е. $\operatorname{rank}\mathcal{G} = 1$ в силу того, что $\mathcal{G}$ – ненулевая матрица.

Введем ненулевые $(n-1)$-мерные векторы $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ и числа α_1, β_1, α_2 и β_2 такие, что

$$\mathcal{F} = z^{(1)}(\alpha_1 \quad \beta_1), \quad \mathcal{G} = z^{(2)}(\alpha_2 \quad \beta_2).$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha_1 = 0$. Условие $\operatorname{rank}\mathcal{F} = 1$ накладывает ограничение $\beta_1 \neq 0$, тогда матрица A нескалярная нижняя треугольная, поэтому A^2 и, значит, B^2 теплицевы нижнетреугольные.

Из условия теплицевости B^2 выводим, что сама матрица B может быть либо нижней или верхней треугольной, либо ϕ-циркулянтом для некоторого числа ϕ. При этом считаем, что если матрица B скалярна, то она нижнетреугольная.

В случае, когда матрицы A и B нижнетреугольные, сами матрицы T_1 и T_2 также нижнетреугольные. Приходим к уже рассмотренному случаю.

Пусть теперь B – верхнетреугольная теплицева матрица; тогда уравнение (4) приобретает вид

$$A^2 = B^2 = \kappa I_n. \tag{8}$$

Запишем матрицы A и B как

$$A = a_0 I_n + L_1, \quad B = b_0 I_n + L_2^\top, \tag{9}$$

где L_1 и L_2 – теплицевы нижнетреугольные матрицы.

Если $\kappa = 0$, то $a_0 = b_0 = 0$ и $L_1^2 = L_2^2 = 0$. Получаем класс 3.

В случае ненулевого числа κ имеем $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ и

$$\begin{cases} a_0^2 I_n + 2a_0 L_1 + L_1^2 = \kappa I_n, \\ b_0^2 I_n + 2b_0 L_2^\top + \left(L_2^\top\right)^2 = \kappa I_n, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (2a_0 I_n + L_1)\, L_1 = \left(\kappa - a_0^2\right) I_n, \\ \left(2b_0 I_n + L_2^\top\right) L_2^\top = \left(\kappa - b_0^2\right) I_n. \end{cases}$$

Проанализируем каждое из уравнений. В правых частях стоят диагональные матрицы. В левой части первого уравнения стоит нижняя строго треугольная матрица, поэтому $(2a_0 I_n + L_1)\, L_1 = 0$. В силу условия $a_0 \neq 0$, матрица $2a_0 I_n + L_1$ невырожденна, а потому $L_1 = 0$. В левой части второго уравнения записана строго верхняя треугольная матрица, поэтому $\left(2b_0 I_n + L_2^\top\right) L_2^\top = 0$. Так как $b_0 \neq 0$, то матрица $2b_0 I_n + L_2^\top$ невырожденна и, следовательно, $L_2 = 0$. Значит, матрицы A и B скалярные. Этот случай уже был описан.

В заключение анализа случая $\alpha_1 = 0$ исследуем ситуацию, когда B – ϕ-циркулянт. И в этом случае уравнение (4) приобретает вид (8). В силу свойств ϕ-циркулянтов из условия $\kappa = 0$ сразу следует, что $B = 0$, и тогда T_1 и T_2 – нижнетреугольные матрицы. Приходим к уже исследованному случаю. Если $\kappa \neq 0$, то $a_0 \neq 0$ и, рассуждая как в предыдущем случае, выводим, что $L_1 = 0$, что противоречит условию $\operatorname{rank} \mathcal{F} = 1$. Аналогично исследуется ситуация $\beta_1 = 0$.

Теперь пусть $\alpha_1 \neq 0$ и $\beta_1 \neq 0$. Используя вектор $z^{(1)}$, запишем

$$a_{n-j} = \alpha_1 z_j^{(1)}, \quad a_{-j} = \beta_1 z_j^{(1)}.$$

Отсюда имеем

$$a_{-j} = \beta_1 z_j^{(1)} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \alpha_1 z_j^{(1)} = \phi_1 a_{n-j},$$

где $\phi_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$. Получаем, что A – ϕ_1-циркулянт, тогда A^2 и, значит, B^2 – теплицевы матрицы. По лемме это возможно, если сама матрица B является либо нижней или верхней треугольной, либо ϕ_2-циркулянтом.

В случае, когда матрица B является треугольной, повторяя рассуждения ситуации, когда A была треугольной и B – ϕ-циркулянтом, меняя местами A и B, приходим к исследованным ситуациям. Остается проанализировать единственный случай, при котором B является ϕ_2-циркулянтом.

Исследуем сначала ситуацию $\phi_1 \neq \phi_2$. Равенство $A^2 = B^2$ превращается в условие $A^2 = B^2 = \mu I_n$, которое означает, что A и B – скалярные кратные инволютивных ϕ_1 и ϕ_2-циркулянтов. Матрицы T_1 и T_2 лежат в классе 4.

Если же $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, то A и B – ϕ-циркулянты, поэтому T_1 и T_2 – ϕ-циркулянты. Эта ситуация уже была описана.

Для получения полного решения задачи об антикоммутировании теплицевых матриц осталось исследовать случай, когда матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ненулевые и $\operatorname{rank} \mathcal{F} = 2$.

Список литературы

1. В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами.* М., Наука, 1987.

Chugunov V. N. On some sets of anticommuting Toeplitz matrices.

A description of certain sets of pairs of anticommuting Toeplitz matrices is given.

Институт вычислительной математики РАН
ул. Губкина 8, 119333 Москва, Россия
E-mail: chugunov.vadim@gmail.com

Поступило 28 августа 2018 г.