Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 472, 2018 г.

Н. А. Лебединская, Д. М. Лебединский, А. А. Смирнов

БАЗИС ГИЛЬБЕРТА КОНУСА, ПОРОЖДЕННОГО МАТРИЦАМИ, ОПИСЫВАЮЩИМИ СИТУАЦИИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

§1. Введение

В наших предыдущих статьях [1,2] изучался конус верхнетреугольных целочисленных матриц, описывающих возможные размерности пересечений подпространства в прямой сумме с попарными суммами прямых слагаемых. В этих статьях предпринимались попытки аппроксимировать указнный конус сверху, т.е. получить набор линейных неравенств, которым должны удовлетворять все матрицы из данного конуса. Сейчас мы собираемся аппроксимировать данный конус снизу, т.е. вычислить базис Гильберта для некоторого его подконуса.

Подконус, о котором идет речь, порождается матрицами, описывающими ситуации общего положения, т.е. такими, в которых подпространство по отношению к прямым слагаемым находится в общем положении.

Основным результатом данной работы является следующий факт.

Теорема. *Базис Гильберта интересующего нас конуса состоит из тех матриц, описывающих ситуации общего положения, в которых размерности прямых слагаемых не больше двух* (*и если равные двум есть, то число прямых слагаемых размерности один должно быть больше двух*)*, а коразмерность подпространства равна максимальной размерности прямого слагаемого.*

§2. Доказательство.

Для начала введем ряд обозначений и терминов.

Под *ситуацией* $S_n(A_1, \ldots, A_n; V)$ понимается прямая сумма $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$, где A_i – конечномерные векторные пространства, и V – подпространство в ней, пересекающееся только по нулю с каждым из A_i.

Ключевые слова: прямая сумма, подпространство, базис Гильберта.

Под матрицей $M = (M_{ij})_{i,j=1}^n = M(S_n(A_1, \ldots, A_n; V))$, *описывающей* $S_n(A_1, \ldots, A_n; V)$, понимается верхнетреугольная целочисленная матрица, элементы которой задаются соотношениями

$$M_{i,j} = \begin{cases} 0, & j < i, \\ \dim A_i, & j = i, \\ \dim(A_i \oplus A_j) \cap V, & j > i. \end{cases}$$

Мы будем говорить, что верхнетреугольная целочисленная матрица *реализуема*, если она описывает какую-либо ситуацию.

Под *ситуацией общего положения* понимается такая, в которой подпространство V по отношению к прямым слагаемым A_i находится в общем положении.

Под *промежуточной матрицей общего положения* понимается такая верхнетреугольная целочисленная матрица $M = (M_{i,j})_{i,j=1}^n$, элементы которой удовлетворяют соотношениям $M_{i,i} \geqslant 0$, $M_{i,i} \geqslant M_{i,j}$, $M_{j,j} \geqslant M_{i,j}$, $M_{i,j} = M_{1,2} - (M_{1,1} - M_{i,i}) - (M_{2,2} - M_{j,j})$. Ясно, что в этом случае все элементы такой матрицы определяются однозначно теми, которые стоят на главной диагонали, и элементом $M_{1,2}$.

Пусть M – верхнетреугольная целочисленная матрица. Под *исправлением* $C(M)$ матрицы M будет пониматься матрица $N = (N_{i,j})_{i,j=1}^n$, элементы которой определяются как $N_{i,j} = \max(0, M_{i,j})$.

Лемма 1. *Матрица M описывает ситуацию общего положения тогда и только тогда, когда существует такая промежуточная матрица общего положения N, что $M = C(N)$. Если в M есть хотя бы один ненулевой внедиагональный элемент, то N единственна.*

Доказательство. Очевидный факт из линейной алгебры. □

В дальнейшем будем обозначать ту промежуточную матрицу общего положения, которая существует по предыдущей лемме, через $\overline{M}$ (если M – диагональная матрица, то положим $\overline{M} = M$).

Для дальнейшего нам понадобятся две конкретные серии матриц.

Обозначим $P(k) = \{1, \ldots, k\}$. Следуя [3], будем писать

$$[\text{утверждение L}] = \begin{cases} 0, & \text{L ложно}, \\ 1, & \text{L истинно}. \end{cases}$$

Пусть $Q \subset P(n)$. Под $U^{Q,n} = (U^{Q,n}_{i,j})^n_{i,j=1}$ понимается целочисленная верхнетреугольная матрица, элементы которой заданы соотношениями

$$U^{Q,n}_{i,j} = \begin{cases} 0, & j < i, \\ [i \in Q], & j = i, \\ [i \in Q \wedge j \in Q], & j > i. \end{cases}$$

Множество Q будем называть базовым для такой матрицы.

Пусть также $\varnothing \neq T \subset P(n)$, причем $T \cap Q = \varnothing$. Под $V^{T,Q,n} = (V^{T,Q,n}_{i,j})^n_{i,j=1}$ понимается целочисленная верхнетреугольная матрица, элементы которой заданы соотношениями

$$V^{T,Q,n}_{i,j} = \begin{cases} 0, & j < i, \\ 2 * [i \in T] + [i \in Q], & j = i, \\ 2 * [i \in T \wedge j \in T] + [(i \in T \wedge j \in Q) \vee (i \in Q \wedge j \in T)], & j > i. \end{cases}$$

Лемма 2. *$U^{P(n),n} = \overline{U^{P(n),n}}$ и, если $T \cup Q = P(n)$, то $V^{T,Q,n} = \overline{V^{T,Q,n}}$.*

Доказательство. Очевидно. □

Пусть σ – перестановка множества $P(n)$. Результат применения этой перестановки к верхнетреугольной матрице $M = (M_{i,j})^n_{i,j=1}$ будет задаваться формулами

$$_\sigma M = ({}_\sigma M_{i,j})^n_{i,j=1}, {}_\sigma M_{i,j} = M_{\min(\sigma(i),\sigma(j)),\max(\sigma(i),\sigma(j))}$$

Лемма 3. *Только что описанное преобразование матрицы линейно зависит от нее для любой перестановки.*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 4. *Результат применения любой перестановки к любым матрицам из серий U и V дает матрицу из той же серии.*

Доказательство. Очевидно. □

Под главной перестановкой $\gamma(M)$ матрицы M будем понимать любую такую перестановку, в результате которой элементы матрицы, стоящие на главной диагонали, становятся упорядоченными по нестрогому убыванию.

Лемма 5. *Любая верхнетреугольная матрица раскладывается в сумму матриц из серий U и V тогда и только тогда, когда то же утверждение справедливо для ее главной перестановки.*

Доказательство. Очевидное следствие двух предыдущих лемм (3 и 4). □

Лемма 6. *Результат приписывания к верхнетреугольной матрице M нулевого столбца справа и нулевой строки снизу является матрицей из серии U или V тогда и только тогда, когда исходная матрица принадлежит к той же серии.*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 7. *Если матрица M является главной перестановкой матрицы, описывающей ситуацию общего положения, то элементы ее строк и столбцов, кроме диагонального элемента, нестрого убывают.*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 8. *Пусть M – главная перестановка матрицы, описывающей ситуацию общего положения, причем $M_{n,n} > 0$, $\exists k : n-1 > k \geqslant 1 \wedge \forall i : (k \geqslant i \geqslant 1 \Rightarrow M_{i,n} > 0) \wedge (i > k \geqslant 1 \Rightarrow M_{i,n} = 0)$. В этом случае из M можно вычесть $V^{\{1,\dots,k\},\{k+1,\dots,n\},n}$, и разность снова будет главной перестановкой матрицы, описывающей ситуацию общего положения.*

Доказательство. Для краткости изложения обозначим вычитаемую матрицу через $N = V^{\{1,\dots,k\},\{k+1,\dots,n\},n}$. В силу леммы 1, для доказательства достаточно предъявить такую промежуточную матрицу общего положения Y, что $C(Y) = M - N$. В качестве такой матрицы возьмем $Y = \overline{M} - N$.

Теперь нужно доказать следующее: 1) Y – промежуточная матрица общего положения, 2) $C(Y) = M - N$ и 3) диагональные элементы матрицы $C(Y)$ нестрого убывают.

Докажем сначала утверждение 3. Для этого докажем, что диагональные элементы Y нестрого убывают и неотрицательны. Нам нужно проверить неравенства $Y_{i,i} \geqslant Y_{i+1,i+1}$ для $1 \leqslant i < n$ и $Y_{n,n} \geqslant 0$. Последнее неравенство верно, так как $Y_{n,n} = \overline{M}_{n,n} - 1$ и $\overline{M}_{n,n} \geqslant 1$ в силу условия леммы на матрицу $M = C(\overline{M})$. Для доказательства первого рассмотрим случаи:

а) $i < k$, откуда $Y_{i,i} = \overline{M}_{i,i} - 2 \geqslant \overline{M}_{i+1,i+1} - 2 = Y_{i+1,i+1}$;

б) $i > k$, откуда $Y_{i,i} = \overline{M}_{i,i} - 1 \geqslant \overline{M}_{i+1,i+1} - 1 = Y_{i+1,i+1}$;

в) $i = k$, откуда $Y_{i,i} = \overline{M}_{i,i} - 2 \geqslant \overline{M}_{i+1,i+1} - 1 = Y_{i+1,i+1}$; в этой цепочке среднее неравенство следует из того, что $\overline{M}_{k,k} > \overline{M}_{k+1,k+1}$, что, в свою очередь, следует из $\overline{M}_{k,n} > \overline{M}_{k+1,n}$ и линейной части условий на промежуточную матрицу общего положения.

Теперь займемся утверждением 1. Очевидно, линейная часть условий на промежуточную матрицу общего положения выполнена. Остается доказать только неравенства. Неравенства $Y_{i,i} \geqslant 0$ уже доказаны в предыдущей части доказательства леммы. Таким образом, нужно показать, что $Y_{i,j} \leqslant Y_{j,j}$ (вообще говоря, нужно еще проверить, что $Y_{i,j} \leqslant Y_{i,i}$, но это будет следовать из уже доказанного неравенства $Y_{i,i} \geqslant Y_{j,j}$).

Рассмотрим следующие случаи:

а) $1 \leqslant i < j \leqslant k$. Нужное нам неравенство следует из аналогичного неравенства для $\overline{M}$ и того факта, что оба сравниваемых элемента матрицы Y меньше соответствующих элементов $\overline{M}$ на 2.

б) $1 \leqslant i \leqslant k < j$. Аналогично предыдущему пункту, только не 2, а 1.

в) $k < i < j$. Для доказательства нужного нам неравенства понадобится соотношение $\overline{M}_{i,j} < \overline{M}_{j,j}$, которое доказывается "обратной" индукцией по j: база при $j = n$, очевидно, следует из условий леммы на матрицу $M = C(\overline{M})$, а переход от $j + 1$ к j следует из линейной части условий на $\overline{M}$ как промежуточную матрицу общего положения.

Наконец, проверим утверждение 2 ($C(Y) = M - N$). Это равенство мы будем доказывать поэлементно. Здесь мы снова рассмотрим несколько случаев, в зависимости от того, в какую часть матрицы попадает рассматриваемый элемент. Первые два случая касаются диагональных элементов, а последние три – лежащих выше диагонали.

а) $i \leqslant k$. Имеем $C(Y)_{i,i} = \max(0, \overline{M}_{i,i} - 2) = \overline{M}_{i,i} - 2 = M_{i,i} - N_{i,i} = (M - N)_{i,i}$. Здесь второе равенство следует из $\overline{M}_{i,i} \geqslant \overline{M}_{k,k} > \overline{M}_{k+1,k+1} \geqslant \overline{M}_{n,n} > 0$, что уже было доказано (утверждение 3).

б) $i > k$. Аналогично предыдущему пункту, только неравенство будет короче ($\overline{M}_{i,i} \geqslant \overline{M}_{n,n} > 0$).

в) $i < j \leqslant k$. Аналогично предыдущим пунктам, здесь нам нужно проверить неравенство $\overline{M}_{i,j} \geqslant 2$, которое следует из $\overline{M}_{i,j} \geqslant \overline{M}_{i,k} > \overline{M}_{i,k+1} \geqslant \overline{M}_{i,n} > 0$. Первое строгое неравенство в последней формуле следует из $\overline{M}_{k,k} > \overline{M}_{k+1,k+1}$ и линейной части условий на $\overline{M}$.

г) $1 \leqslant i \leqslant k < j$. Аналогично предыдущему пункту, только неравенство будет короче ($\overline{M}_{i,j} \geqslant \overline{M}_{i,n} > 0$).

д) $k < i < j$. Имеем $C(Y)_{i,j} = \max(0, \overline{M}_{i,j}) = M_{i,j} = (M - N)_{i,j}$, поскольку в этом случае $N_{i,j} = 0$. □

Лемма 9. *Пусть M – главная перестановка матрицы, описывающей ситуацию общего положения, причем весь последний столбец M состоит из положительных чисел. В этом случае из M можно вычесть $U^{\{1,\dots,n\},n}$, и разность снова будет главной перестановкой матрицы, описывающей ситуацию общего положения.*

Доказательство. И здесь в качестве Y возьмем $M - U^{\{1,\dots,n\},n}$. Те утверждения, которые надо проверить (как и в доказательстве предыдущей леммы), кроме, разве что, неравенства $M_{i,j} > 0$, являются очевидными следствиями того факта, что все интересующие нас элементы $U^{\{1,\dots,n\},n}$ равны 1. Что же касается выписанного неравенства, то оно следует из леммы 7. □

Лемма 10. *Любая матрица, описывающая ситуацию общего положения, может быть представлена в виде суммы матриц из серий U и V.*

Доказательство. В силу леммы 5, достаточно доказать утверждение для главной перестановки исходной матрицы. Последнее утверждение мы докажем индукцией по порядку матрицы.

База индукции (утверждение для матрицы порядка 1) совершенно очевидно.

Для доказательства справедливости индукционного перехода рассмотрим матрицу M порядка n – главную перестановку матрицы, описывающей ситуацию общего положения.

Возможен ряд случаев.

1) Последний столбец M состоит только из нулей. В этом случае, результат следует из леммы 6 и индукционного предположения.

2) В противном случае докажем, что из M можно вычесть одну из матриц серий U или V так, чтобы выполнялись следующие условия:

а) результат снова оказался бы главной перестановкой матрицы, описывающей ситуацию общего положения, и

б) сумма чисел последнего столбца полученной матрицы была бы строго меньше, чем у исходной матрицы M.

Для этого, опять же, рассмотрим ряд случаев.

1) $M_{n,n} = 0$. В этом случае, очевидно, весь последний столбец M нулевой в силу тех неравенств, которым должна удовлетворять $\overline{M}$ как

промежуточная матрица общего положения (ее положительные элементы, очевидно, равны соответствующим элементам M, и наоборот).

2) $M_{n,n} > 0$ – единственный ненулевой элемент последнего столбца. В этом случае, из M, очевидно, можно вычесть $U^{\{n\},n}$.

3) $M_{n,n} > 0$, $\exists k : n-1 > k \geqslant 1 \wedge \forall i : (k \geqslant i \geqslant 1 \Rightarrow M_{i,n} > 0) \wedge (i > k \geqslant 1 \Rightarrow M_{i,n} = 0)$. В этом случае, в силу леммы 8, из M можно вычесть $V^{\{1,\ldots,k\},\{k+1,\ldots,n\},n}$.

4) Весь последний столбец M состоит из положительных чисел. В этом случае, в силу леммы 9, из M можно вычесть $U^{\{1,\ldots,n\},n}$. □

Лемма 11. *Все матрицы серии U и те матрицы серии V, у которых $|Q| > 2$, не могут быть разложены нетривиальным образом в суммы других матриц из этих серий.*

Доказательство. Для начала докажем утверждение леммы для матриц из серии U. Предположим противное, т.е. что матрица из серии U разложена нетривиальным образом в сумму матриц из серий U и V. Первое, что мы можем утверждать, – что среди слагаемых нет матриц серии V, поскольку все элементы всех таких матриц неотрицательны, и среди элементов матриц серии U встречаются только 0 и 1, а среди элементов матриц серии V обязательно есть двойки. Далее, аналогично можно утверждать, что базовые множества слагаемых не пересекаются, и их объединение составляет базовое множество той матрицы, которую мы разлагаем в сумму. Но тогда, взяв два элемента из базовых множеств разных слагаемых, мы получим противоречие, потому что в разлагаемой матрице элемент, опирающийся на них, равен 1, а в любом из слагаемых он равен 0.

Теперь докажем это утверждение и для матрицы $M = V^{T,Q,n}$ из серии V, у которой $|Q| > 2$. Предположим противное, т.е. допустим, что

$$M = \sum_{i=1}^{l} U_i^{Q_i,n} + \sum_{j=1}^{k} V_j^{T_j,Q_{j+l},n}.$$

Множества T_j попарно не пересекаются, а также T_j не пересекается с Q_{i+l}, так как иначе в этой сумме на диагонали будут встречаться числа, не меньшие трех. Если $k \geqslant 2$, то возьмем $i \in T_1$ и $j \in T_2$. В силу только что сказанного, имеем

$$M_{i,j} = 2 \neq 0 = \sum_{p=1}^{l} (U_p^{Q_p,n})_{i,j} + \sum_{q=1}^{k} (V_q^{T_q,Q_{q+l},n})_{i,j}.$$

Полученное противоречие доказывает, что $k \leqslant 1$. Теперь предположим, что $k = 1$. Тогда рассмотрение элемента $M_{i,j}$, где $i \in T_1$ и $j \in Q_i \cap Q_{l+1}$, как и в предыдущих рассуждениях, показывает, что $Q_i \cap Q_{l+1} = \varnothing$ для всех $1 \leqslant i \leqslant l$. Аналогично, $Q_i \cap Q_j = \varnothing$ для всех $1 \leqslant i < j \leqslant l$. Наконец, рассмотрение элемента $M_{i,j}$, где $i \in T_1$ и $j \in Q_t$, для любого $1 \leqslant t \leqslant l$, показывает, что $l = 0$ и разложение M в сумму тривиально.

Итак, $k = 0$. Очевидно, Q_i не могут быть попарно непересекающимися, поэтому пусть $Q_1 \cap Q_2 \neq \varnothing$. Однако тройки из этих множеств пересекаться не могут; следовательно, остальные Q_i не пересекаются, иначе в строках матрицы M, индексы которых лежат в $Q_1 \cap Q_2$, стояли бы двойки вместо единиц в соответствующих строках разложения в сумму. Отсюда следует, что $l \leqslant 2$, $|Q_1 \backslash Q_2| \leqslant 1$ и $|Q_2 \backslash Q_1| \leqslant 1$ (для того, чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть элемент $M_{i,j}$, где $i, j \in Q_1 \backslash Q_2$ различны). В итоге, если $|Q| > 2$, то разложение может быть только тривиальным, а вот если $|Q| \leqslant 2$, то возможно разложение на два слагаемых из серии V. То, что других разложений нет, мы показали только что, а то, что они действительно возможны, показывает следующая лемма. $\square$

Лемма 12.

$$U^{T,\varnothing,n} = 2V^{T,n}, \quad U^{T,\{i\},n} = V^{T,n} + V^{T\cup\{i\},n},$$
$$U^{T,\{i,j\},n} = V^{T\cup\{i\},n} + V^{T\cup\{j\},n}.$$

Доказательство. Очевидно. $\square$

Доказательство теоремы. Теорема является очевидным следствием лемм 10, 11 и 12. $\square$

Список литературы

1. Н. А. Лебединская, Д. М. Лебединский, А. А. Смирнов, *О возможных значениях размерностей пересечений подпространств для пяти прямых слагаемых.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 189–197.
2. Н. А. Лебединская, Д. М. Лебединский, *О возможных значениях размерностей пересечений подпространств.* — Вестник СПБГУ, Сер. 1 математика, механика, астрономия, No. 2 (2016), 204–209.
3. Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика.* — Основание информатики. Мир, М., 1998.

Lebedinskaya N. A., Lebedinskii D. M., Smirnov A. A. A Hilbert basis of the cone constructed from matrices describing generic situations.

A Hilbert basis of the cone constructed from matrices describing generic situations, i.e., such vector subspaces in a finite direct sum of finite-dimensional subspaces that are in generic position with respect to the direct summands is computed.

С.-Петербургский государственный
университет,
Университетская наб. д. 7-9,
199034 С.-Петербург, Россия
E-mail: n.lebedinskaya@spbu.ru
E-mail: d.lebedinsky@spbu.ru

Поступило 18 сентября 2018 г.

Военно-космическая академия
им. А. Ф. Можайского,
ул. Ждановская 13,
197198 С.-Петербург, Россия
E-mail: alexandr.alexandrovich.smirnov@gmail.com