

Е. К. Куликов, А. А. Макаров

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Сплайны с натяжением часто используются в задачах формосохраняющей аппроксимации [1–3]. Известно [4, 5], что полиномиальные B -сплайны степени p строятся в пространстве, натянутом на множество функций $\{1, t, \dots, t^p\}$. В системах автоматизированного проектирования рассматриваются пространства типа пространств B -сплайнов, натянутые на множества, содержащие тригонометрические и гиперболические функции. Такие сплайны активно изучались в работах [6, 7]. С их помощью получают точные представления таких кривых, как конические сечения, винтовые линии, гиперболы, цепные линии и ряда других кривых, используемых в практических приложениях.

Сплайны, полученные из аппроксимационных соотношений с использованием полной цепочки векторов и порождающей вектор-функции φ , рассматривались в работах [8–12]. Если такие сплайны обладают минимальным носителем, то они называются *минимальными*. Определенный способ выбора полной цепочки векторов позволил рассмотреть минимальные сплайны, обладающие свойством максимальной гладкости (B_φ -сплайны), и установить единственность пространства таких сплайнов среди множества пространств минимальных сплайнов (определяемых произвольным выбором упомянутой цепочки векторов при заданной сетке и заданной порождающей вектор-функции). Установление условий знакоопределенности координатных сплайнов важно для практического применения в задачах геометрического моделирования, связанных с построением обобщенных NURBS кривых для систем автоматизированного проектирования (см., например, работы [13, 14]), в задачах изогеометрического анализа – активно

Ключевые слова: минимальные сплайны, гиперболические сплайны, B -сплайны, биортогональная система функционалов, аппроксимационные функционалы, функционалы типа де Бура–Фикса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Томской области (код проекта 16-41-700400 р_а).

развивающегося вычислительного подхода, который предлагает возможность непосредственного интегрирования конечно-элементного анализа в обычные средства проектирования, основанные на NURBS кривых и их обобщениях (подробности см. в монографии [15]), а также в задачах формосохраняющей аппроксимации [16].

Квадратичные полиномиальные B -сплайны являются частным случаем B_φ -сплайнов, порожденных вектор-функцией $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$ (см. [17]). В данной работе изучаются квадратичные гиперболические минимальные сплайны, порожденные вектор-функцией $\varphi(t) = (1, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)^T$. Установлено, что такие сплайны обладают свойством положительности на произвольной сетке в отличие от тригонометрических сплайнов, порожденных вектор-функцией $\varphi(t) = (1, \sin t, \cos t)^T$, которые положительны, если шаг сетки меньше π (см. [18]).

В работе рассматривается локальная схема аппроксимации сплайнами, т.е. коэффициенты при базисных функциях задаются явно двойственными функционалами типа де Бура–Фикса, которые являются линейными комбинациями значений аппроксимируемой функции и ее производных. В работе приводятся результаты численных экспериментов по приближению функций с помощью гиперболических сплайнов, порожденных вектор-функцией $\varphi(t) = (1, \operatorname{sh} pt, \operatorname{ch} qt)^T$, $q \geq p > 0$, которые показывают, что использование последних может приводить к снижению ошибки аппроксимации за счет изменения параметров контроля формы.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть \mathbb{Z} – множество целых чисел, $\mathbb{Z}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid j \geq 0, j \in \mathbb{Z}\}$, \mathbb{R}^1 – множество вещественных чисел. Векторное (линейное) пространство трехмерных вектор-столбцов обозначим через \mathbb{R}^3 , причем векторы в нем будем отождествлять с одностолбцовыми матрицами и применять к ним обычные матричные операции; в частности, для пары векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ выражение $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ представляет собой евклидово скалярное произведение этих векторов. Квадратная матрица, столбцами которой являются векторы $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ (в указанном порядке), обозначается символом $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, а выражение $\det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ обозначает ее определитель. Компоненты векторов обозначаются квадратными скобками и нумеруются целыми числами; например, $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, [\mathbf{a}]_2)^T$.

Для любого $S \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначение $C^S[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u^{(i)} \in C[a, b], i = 0, 1, \dots, S\}$, полагая $C^0[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} C[a, b]$. Будем писать $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^S[a, b]$, если компоненты вектор-функции $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемы S раз на отрезке $[a, b]$.

На отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X (с дополнительными узлами вне отрезка $[a, b]$, лежащими на некотором интервале $(\alpha, \beta) \supset [a, b]$):

$$\begin{aligned} X : x_{-2} \leq x_{-1} \leq a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \\ &= b \leq x_{n+1} \leq x_{n+2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем обозначение $J_{i,k} \stackrel{\text{def}}{=} \{i, i+1, \dots, k\}, i, k \in \mathbb{Z}, i < k$. Упорядоченное множество $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j \in J_{-2, n-1}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3$ будем называть *цепочкой векторов*. Цепочка \mathbf{A} называется *полной* цепочкой векторов, если $\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0$ для всех $j \in J_{0, n-1}$.

Введем обозначение для объединения элементарных сеточных интервалов $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j \in J_{0, n-1}} (x_j, x_{j+1})$. Пусть $\mathbb{X}(M)$ – линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M . Пусть $S_j \stackrel{\text{def}}{=} [x_j, x_{j+3}], j \in J_{-2, n-1}$.

Рассмотрим вектор-функцию $\varphi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ с элементами из пространства $\mathbf{C}^2[a, b]$ и ненулевым вронскианом:

$$\det(\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

Пусть \mathbf{A} – полная цепочка векторов. Предположим, что функции $\omega_j \in \mathbb{X}(M), j \in J_{-2, n-1}$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{k-2} \omega_{k-2}(t) + \mathbf{a}_{k-1} \omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}_k \omega_k(t) &\equiv \varphi(t) \\ \forall t \in (x_k, x_{k+1}), \forall k \in J_{0, n-1}, & \\ \omega_j(t) &\equiv 0 \\ \forall t \in M \setminus S_j, \forall j \in J_{-2, n-1}. & \end{aligned} \quad (2)$$

Для всякого фиксированного $t \in (x_k, x_{k+1})$ и всех $k \in J_{0, n-1}$ соотношения (2) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. Ввиду полноты цепочки векторов \mathbf{A} , система (2) имеет единственное решение. Отсюда также следует, что $\text{supp } \omega_j \subset S_j$. Тогда по формулам Крамера имеем

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)}, \quad t \in (x_j, x_{j+1}), \quad (3)$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})}, \quad t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \quad (4)$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2})}, \quad t \in (x_{j+2}, x_{j+3}). \quad (5)$$

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$ называется *пространством квадратичных минимальных координатных $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$ -сплайнов*, которое мы будем обозначать через $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$. Тожества (2) называются *аппроксимационными соотношениями*. Вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ называется *порождающей*.

Для вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} \in C^1[a, b]$ положим

$$\boldsymbol{\varphi}_j \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}(x_j), \quad \boldsymbol{\varphi}'_j \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}'(x_j), \quad j \in J_{-2, n+2}.$$

Известно [17], что если $\mathbf{a}_j = c_j \mathbf{b}_j$ для каждого $j \in J_{0, n-1}$, где c_j – произвольные ненулевые константы и \mathbf{b}_j – векторы, заданные формулой

$$\mathbf{b}_j \stackrel{\text{def}}{=} \det(\boldsymbol{\varphi}_{j+2}, \boldsymbol{\varphi}'_{j+2}, \boldsymbol{\varphi}'_{j+1}) \boldsymbol{\varphi}_{j+1} - \det(\boldsymbol{\varphi}_{j+2}, \boldsymbol{\varphi}'_{j+2}, \boldsymbol{\varphi}_{j+1}) \boldsymbol{\varphi}'_{j+1}, \quad (6)$$

то $\omega_j \in C^1[a, b]$ для каждого $j \in J_{-2, n-1}$. Более того, если $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_0 \equiv 1$ и $c_j \stackrel{\text{def}}{=} 1/\det(\boldsymbol{\varphi}_{j+2}, \boldsymbol{\varphi}'_{j+2}, \boldsymbol{\varphi}'_{j+1})$, то

$$\sum_{j=-2}^{n-1} \omega_j(t) \equiv 1 \quad \forall t \in [a, b].$$

В таком случае функции $\omega_j(t)$ называются *квадратичными нормализованными минимальными координатными $B_{\boldsymbol{\varphi}}$ -сплайнами*.

Замечание 1. Можно показать, что $\mathbf{b}_j = -(\boldsymbol{\varphi}_{j+1} \times \boldsymbol{\varphi}'_{j+1}) \times (\boldsymbol{\varphi}_{j+2} \times \boldsymbol{\varphi}'_{j+2})$, где через \times обозначено векторное произведение в пространстве \mathbb{R}^3 .

Замечание 2. Заметим, что для $\boldsymbol{\varphi}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t, t^2)^T$ функции $\omega_j(t)$ совпадают с известными квадратичными полиномиальными B -сплайнами (третьего порядка).

§3. КВАДРАТИЧНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Пусть $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, \text{sh } t, \text{ch } t)^T$. Тогда определитель Вронского $\det(\varphi, \varphi', \varphi'')(t) = 1$ отличен от нуля. Для вычисления \mathbf{a}_j мы определим векторы \mathbf{b}_j в соответствии с соотношением (6). Имеем

$$\det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{sh } x_{j+2} & \text{ch } x_{j+2} & \text{ch } x_{j+1} \\ \text{ch } x_{j+2} & \text{sh } x_{j+2} & \text{sh } x_{j+1} \end{vmatrix} = \text{sh}(x_{j+1} - x_{j+2})$$

и

$$\det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \text{sh } x_{j+2} & \text{ch } x_{j+2} & \text{sh } x_{j+1} \\ \text{ch } x_{j+2} & \text{sh } x_{j+2} & \text{ch } x_{j+1} \end{vmatrix} = 2 \text{sh}^2 \left(\frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2} \right).$$

Таким образом, получаем

$$\mathbf{b}_j = \text{sh}(x_{j+1} - x_{j+2}) \begin{pmatrix} 1 \\ \text{sh } x_{j+1} \\ \text{ch } x_{j+1} \end{pmatrix} - 2 \text{sh}^2 \left(\frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \text{ch } x_{j+1} \\ \text{sh } x_{j+1} \end{pmatrix}.$$

Упрощая выписанное выражение, имеем

$$\mathbf{b}_j = \text{sh}(x_{j+1} - x_{j+2}) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\text{sh } \frac{x_{j+2} + x_{j+1}}{2}}{\text{ch } \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2}} \\ \frac{\text{ch } \frac{x_{j+2} + x_{j+1}}{2}}{\text{ch } \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2}} \end{pmatrix}.$$

Полагая $c_j \stackrel{\text{def}}{=} \text{sh}^{-1}(x_{j+1} - x_{j+2})$ и пользуясь равенством $\mathbf{a}_j = c_j \mathbf{b}_j$, представим векторы \mathbf{a}_j в следующем виде:

$$\mathbf{a}_j = \left(1, \frac{\text{sh } \frac{x_{j+2} + x_{j+1}}{2}}{\text{ch } \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2}}, \frac{\text{ch } \frac{x_{j+2} + x_{j+1}}{2}}{\text{ch } \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2}} \right)^T. \quad (7)$$

Подставляя (7) в соотношения (3)–(5), получаем формулы для вычисления квадратичных гиперболических B_φ -сплайнов, которые будем обозначать через ω_j^{hyp} , причем $\text{supp } \omega_j^{\text{hyp}} = [x_j, x_{j+3}]$:

$$\omega_j^{\text{hyp}}(t) = \frac{\text{ch } \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2} \text{sh}^2 \left(\frac{t - x_j}{2} \right)}{\text{sh } \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \text{sh } \frac{x_{j+2} - x_j}{2}}, \quad t \in [x_j, x_{j+1}], \quad (8)$$

$$\omega_j^{\text{hyp}}(t) = \frac{\text{ch} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}}{\text{sh} \frac{x_{j+1}-x_j}{2}} \left(\frac{\text{sh}^2 \left(\frac{t-x_j}{2} \right)}{\text{sh} \frac{x_{j+2}-x_j}{2}} - \frac{\text{sh} \frac{x_{j+3}-x_j}{2} \text{sh}^2 \left(\frac{t-x_{j+1}}{2} \right)}{\text{sh} \frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2} \text{sh} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}} \right),$$

$$t \in [x_{j+1}, x_{j+2}], \quad (9)$$

$$\omega_j^{\text{hyp}}(t) = \frac{\text{ch} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2} \text{sh}^2 \left(\frac{x_{j+3}-t}{2} \right)}{\text{sh} \frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2} \text{sh} \frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{2}}, \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}]. \quad (10)$$

§4. СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Как видно из равенств (8) и (10), функция $\omega_j^{\text{hyp}}(t)$ положительна на интервалах (x_j, x_{j+1}) и (x_{j+2}, x_{j+3}) . Найдем первую и вторую производные функции $\omega_j^{\text{hyp}}(t)$ на интервалах $(x_j, x_{j+1}]$ и $[x_{j+2}, x_{j+3})$ и получим, что

$$\frac{d}{dt} \omega_j^{\text{hyp}}(t) = \frac{\text{ch} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2} \text{sh}(t-x_j)}{2 \text{sh} \frac{x_{j+1}-x_j}{2} \text{sh} \frac{x_{j+2}-x_j}{2}} > 0, \quad (11)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \omega_j^{\text{hyp}}(t) = \frac{\text{ch} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2} \text{ch}(t-x_j)}{2 \text{sh} \frac{x_{j+1}-x_j}{2} \text{sh} \frac{x_{j+2}-x_j}{2}} > 0 \quad (12)$$

для $t \in (x_j, x_{j+1}]$, а также

$$\frac{d}{dt} \omega_j^{\text{hyp}}(t) = -\frac{\text{ch} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2} \text{sh}(x_{j+3}-t)}{2 \text{sh} \frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2} \text{sh} \frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{2}} < 0, \quad (13)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \omega_j^{\text{hyp}}(t) = \frac{\text{ch} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2} \text{ch}(t-x_{j+3})}{2 \text{sh} \frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2} \text{sh} \frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{2}} > 0 \quad (14)$$

для $t \in [x_{j+2}, x_{j+3})$.

Введем обозначения:

$$K_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{ch} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2} \text{sh}^{-1} \frac{x_{j+1}-x_j}{2} \text{sh}^{-1} \frac{x_{j+2}-x_j}{2},$$

$$K_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{ch} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2} \text{sh} \frac{x_{j+3}-x_j}{2} \text{sh}^{-1} \frac{x_{j+1}-x_j}{2}$$

$$\times \text{sh}^{-1} \frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2} \text{sh}^{-1} \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}.$$

Тогда из соотношения (9) мы получаем, что

$$\omega_j^{\text{hyp}}(t) = K_1 \text{sh}^2 \left(\frac{t-x_j}{2} \right) - K_2 \text{sh}^2 \left(\frac{t-x_{j+1}}{2} \right), \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}].$$

Рассмотрим функцию $u(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}\omega_j^{\text{hyp}}(t)$ на отрезке $[x_{j+1}, x_{j+2}]$:

$$u(t) = \frac{1}{2}K_1 \operatorname{sh}(t - x_j) - \frac{1}{2}K_2 \operatorname{sh}(t - x_{j+1}).$$

Легко видеть, что $u(t) = u''(t)$, поэтому функция $u(t)$ является решением дифференциального уравнения $u'' - u = 0$, следовательно, $u(t)$ может быть представлена в виде

$$u(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad (15)$$

где константы $C_1 < 0$ и $C_2 > 0$ определяются из граничных условий

$$u(x_{j+1}) = \frac{d}{dt}\omega_j^{\text{hyp}}(x_{j+1}) > 0, \quad u(x_{j+2}) = \frac{d}{dt}\omega_j^{\text{hyp}}(x_{j+2}) < 0,$$

если использовать соотношения (11) и (13) соответственно. Представление (15) показывает, что функция $u(t)$ имеет единственный нуль на отрезке $[x_{j+1}, x_{j+2}]$ и

$$u'(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} < 0. \quad (16)$$

Теорема 1. *Гиперболический сплайн $\omega_j^{\text{hyp}}(t)$ положителен на интервале $t \in (x_j, x_{j+3})$ для всякого $j \in J_{-2, n-1}$. Функция $\omega_j^{\text{hyp}}(t)$ является монотонно возрастающей и выпуклой вниз на интервале (x_j, x_{j+1}) , выпуклой вверх на (x_{j+1}, x_{j+2}) , монотонно убывающей и выпуклой вниз на интервале (x_{j+2}, x_{j+3}) .*

Доказательство. Для крайних интервалов $(x_j, x_{j+1}]$ и $[x_{j+2}, x_{j+3})$ утверждение теоремы немедленно следует из соотношений (8) и (10)–(14). Таким образом, $\omega_j^{\text{hyp}}(x_{j+1}) > 0$ и $\omega_j^{\text{hyp}}(x_{j+2}) > 0$. В соответствии с соотношением (16), $\frac{d^2}{dt^2}\omega_j^{\text{hyp}}(t) < 0$ на интервале (x_{j+1}, x_{j+2}) , откуда следует, что функция $\omega_j^{\text{hyp}}(t)$ положительна и выпукла вверх на интервале (x_{j+1}, x_{j+2}) . \square

§5. ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ

Рассмотрим некоторое линейное пространство \mathfrak{U} над полем вещественных чисел и сопряженное ему пространство \mathfrak{U}^* линейных функционалов f над пространством \mathfrak{U} . Значение функционала f на элементе $u \in \mathfrak{U}$ обозначим через $\langle f, u \rangle$. Для функционала $f \in (C^S)^*$ будем писать $\operatorname{supp} f \subset [c, d]$, если значение $\langle f, u \rangle$ определяется значениями функции $u \in C^S$ на интервале (c, d) .

Будем говорить, что система функционалов $\{\nu_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ биортогональна системе функций $\{w_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, если $\langle \nu_i, w_j \rangle = \delta_{i,j}$ для всех $i, j \in \mathbb{Z}$, где

$\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Функционалы ν_i называются *двойственными* (биортогональными) функционалами к функциям w_j .

Теорема 2. Система линейных функционалов

$$\lambda_k^{(r)} : \text{supp } \lambda_k^{(r)} \subset [x_{k+r}, x_{k+r+1}], k \in J_{-2,n-1}, r \in \{0, 1, 2\},$$

биортогональна системе минимальных B_φ -сплайнов $\{\omega_{j'}\}_{j' \in J_{-2,n-1}}$ для любого $r \in \{0, 1, 2\}$ тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$\langle \lambda_k^{(r)}, \varphi \rangle = \mathbf{a}_k \quad \forall k \in J_{-2,n-1}. \quad (17)$$

Доказательство. Действительно, при любом $r \in \{0, 1, 2\}$ применение функционала $\lambda_k^{(r)}$ к аппроксимационным соотношениям (2) на интервале (x_{k+r}, x_{k+r+1}) приводит к равенству

$$\sum_{j'=k+r-2}^{k+r} \mathbf{a}_{j'} \langle \lambda_k^{(r)}, \omega_{j'} \rangle = \langle \lambda_k^{(r)}, \varphi \rangle. \quad (18)$$

Теперь из соотношения (17) следует биортогональность $\{\lambda_k^{(r)}\}$ и $\{\omega_{j'}\}$.

Если соотношение (17) выполняется, то из представления (18) мы получаем

$$\sum_{j'=k+r-2}^{k+r} \mathbf{a}_{j'} \langle \lambda_k^{(r)}, \omega_{j'} \rangle = \mathbf{a}_k.$$

Поскольку цепочка векторов $\mathbf{a}_{j'}$ полная, единственность решения указанных уравнений позволяет установить биортогональность для всех $j' \in \{k+r-2, k+r-1, k+r\}$. Для остальных значений $\langle \lambda_k^{(r)}, \omega_{j'} \rangle$, $j' \in J_{-2,n-1} \setminus \{k+r-2, k+r-1, k+r\}$ данный факт вытекает из расположения носителей функционала $\lambda_k^{(r)}$ и функции $\omega_{j'}$. Таким образом, утверждение доказано. \square

Замечание 3. Заметим, что функционалы $\lambda_j^{(r)}$ на полиномиальной порождающей вектор-функции $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$ совпадают с двойственными функционалами де Бура–Фикса [19]. В случае неполиномиальной порождающей вектор-функции φ можно говорить о двойственных функционалах типа де Бура–Фикса.

Рассмотрим интерполяционную задачу

$$\langle \lambda_j^{(r)}, u \rangle = v_j \quad \forall j \in J_{-2,n-1}, \quad u \in \mathcal{S}(X, \mathbf{A}, \varphi), \quad (19)$$

где $\{v_j\}$ – заданная последовательность чисел.

Теорема 3. Для каждого фиксированного $r \in \{0, 1, 2\}$ в пространстве $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \varphi)$ существует единственное решение интерполяционной задачи (19), которое задается формулой

$$\tilde{u}_r(t) = \sum_{j=-2}^{n-1} v_j \omega_j(t).$$

Доказательство. Данное утверждение непосредственно вытекает из теоремы 2. \square

Пусть дана функция $u \in C^3[a, b]$. Принимая во внимание расположение носителя функции ω_j для $t \in (x_k, x_{k+1})$, рассмотрим сплайн

$$\tilde{u}_r(t) = \sum_{j=k-2}^k \langle \lambda_j^{(r)}, u \rangle \omega_j(t), \quad t \in (x_k, x_{k+1}), \quad (20)$$

где функционалы $\lambda_j^{(r)}$ называются *аппроксимационными функционалами*.

Теорема 4. Для каждого фиксированного $r \in \{0, 1, 2\}$ аппроксимация (20) обладает свойством точности на функциях $u \in \{[\varphi]_i \mid i = 0, 1, 2\}$, т.е.

$$\tilde{u}_r \equiv u \quad \text{для} \quad u \in \{[\varphi]_i \mid i = 0, 1, 2\}.$$

Доказательство. Согласно (17), аппроксимационные соотношения (2) могут быть переписаны в виде

$$\sum_{j=k-2}^k \langle \lambda_j^{(r)}, [\varphi]_i \rangle \omega_j(t) = [\varphi]_i(t), \quad i = 0, 1, 2,$$

откуда точность на функциях $u \in \{[\varphi]_i \mid i = 0, 1, 2\}$ следует непосредственно. \square

§6. О РЕАЛИЗАЦИЯХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Рассмотрим сплайны, определенные формулами (8)–(10), и линейные функционалы $\lambda_j^{(r)}$, заданные следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_j^{(0)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} & u(x_j) + \frac{\text{sh}\left(\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2} - x_j\right)}{\text{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}} u'(x_j) \\ & + \left(\frac{\text{ch}\left(\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2} - x_j\right)}{\text{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}} - 1 \right) u''(x_j), \quad u \in C^2[a, b]; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\langle \lambda_j^{(1)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(x_{j+1}) + \text{th}\frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2} u'(x_{j+1}), \quad u \in C^1[a, b]; \quad (22)$$

$$\langle \lambda_j^{(2)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(x_{j+2}) - \text{th}\frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2} u'(x_{j+2}), \quad u \in C^1[a, b]. \quad (23)$$

Метод построения аппроксимационных функционалов к минимальным сплайнам в общем виде был рассмотрен в работе [20].

Теорема 5. Для каждого фиксированного $r \in \{0, 1, 2\}$ система линейных функционалов $\{\lambda_j^{(r)}\}_{j \in J_{-2, n-1}}$ биортогональна системе функций $\{\omega_{j'}^{\text{hyp}}\}_{j' \in J_{-2, n-1}}$, т.е.

$$\langle \lambda_j^{(r)}, \omega_{j'}^{\text{hyp}} \rangle = \delta_{j, j'}. \quad (24)$$

Доказательство. Доказательство этого факта основывается на применении теоремы 2, а именно, для каждого фиксированного $r \in \{0, 1, 2\}$ проверяется равенство (17) для $\varphi(t) = (1, \text{sh } t, \text{ch } t)^T$.

Так как $[\varphi(t)]_0 \equiv 1$ и ее производные равны нулю, очевидно, что $\langle \lambda_j^{(r)}, [\varphi]_0 \rangle = 1 = [\mathbf{a}_j]_0$ для всех $r \in \{0, 1, 2\}$.

Пусть $r = 0$. Поскольку гиперболические синус и косинус совпадают со своими вторыми производными, для $u(t) \equiv \text{sh } t$ или $u(t) \equiv \text{ch } t$ выражение (21) может быть упрощено:

$$\langle \lambda_j^{(0)}, u \rangle = \frac{\text{sh}\left(\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2} - x_j\right)}{\text{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}} u'(x_j) + \frac{\text{ch}\left(\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2} - x_j\right)}{\text{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}} u''(x_j).$$

Подставляя $u(t) = [\varphi(t)]_1 = \operatorname{sh} t$ в полученное представление, мы получаем

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2} - x_j\right)}{\operatorname{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}} \operatorname{ch} x_j + \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2} - x_j\right)}{\operatorname{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}} \operatorname{sh} x_j = \frac{\operatorname{sh}\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}},$$

а для $u(t) = [\varphi(t)]_2 = \operatorname{ch} t$ имеет место следующее равенство:

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2} - x_j\right)}{\operatorname{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}} \operatorname{sh} x_j + \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2} - x_j\right)}{\operatorname{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}} \operatorname{ch} x_j = \frac{\operatorname{ch}\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}}.$$

Справедливость выписанных равенств может быть установлена путем их умножения на знаменатель и применения к левым частям формул гиперболического синуса и косинуса суммы соответственно. Сравнение правых частей этих формул с представлением (7) позволяет установить справедливость равенств $\langle \lambda_j^{(0)}, [\varphi]_1 \rangle = [\mathbf{a}_j]_1$ и $\langle \lambda_j^{(0)}, [\varphi]_2 \rangle = [\mathbf{a}_j]_2$. Теперь, согласно теореме 2, утверждение доказано.

Для $r = 1$ имеем

$$\langle \lambda_j^{(1)}, \operatorname{sh} t \rangle = \operatorname{sh} x_{j+1} + \operatorname{th} \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2} \operatorname{ch} x_{j+1} = \frac{\operatorname{sh}\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}} = [\mathbf{a}_j]_1,$$

$$\langle \lambda_j^{(1)}, \operatorname{ch} t \rangle = \operatorname{ch} x_{j+1} + \operatorname{th} \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2} \operatorname{sh} x_{j+1} = \frac{\operatorname{ch}\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}} = [\mathbf{a}_j]_2.$$

Для $r = 2$ справедливость утверждения устанавливается аналогично. \square

§7. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

В этом разделе приводятся результаты численных экспериментов по аппроксимации функций с помощью квадратичных координатных сплайнов в зависимости от реализаций аппроксимационных функционалов $\lambda_j^{(r)}$ и выбора порождающей вектор-функции φ .

Будем строить аппроксимацию на отрезке $[0, 1]$ на равномерной сетке $x_j = j/10, j = 0, \dots, 10$, а ошибку приближения вычислять на сетке в десять раз более мелкой, чем исходная. В качестве критерия качества построенной аппроксимации будем использовать оценку максимума абсолютного значения отклонения полученного приближения,

обозначаемого через u^h , от значений исходной функции u в узлах сетки, т.е.

$$E = \max_{t \in [0,1]} |u^h(t) - u(t)|.$$

Рассмотрим аппроксимацию цепной линии, задаваемой уравнением $u(t) = a \operatorname{ch}(t/a)$ с параметром $a = 0.2$. Будем использовать обозначение $\varphi^B(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t, t^2)^T$ для вектор-функции, порождающей полиномиальные B -сплайны, и $\varphi^H(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)^T$ – для вектор-функции, порождающей гиперболические сплайны ω_j^{hyp} , определяемые формулами (8)–(10). Ошибки аппроксимации для рассматриваемой функции u в зависимости от выбора порождающей вектор-функции φ и функционалов $\lambda_j^{(r)}$, $r = 0, 1, 2$, определяемых формулами (21)–(23), приведены в табл. 1.

Таблица 1. Ошибки аппроксимации для $u(t) = a \operatorname{ch}(t/a)$, $a = 0.2$.

$\varphi(t)$	$\lambda_j^{(0)}$	$\lambda_j^{(1)}$	$\lambda_j^{(2)}$
φ^B	0.2577	0.0427	0.0705
φ^H	0.2475	0.0410	0.0676

Таким образом, использование гиперболической порождающей вектор-функции φ^H ведет к улучшению качества аппроксимации для каждого из рассматриваемых функционалов. Наименьшей ошибки удается добиться при использовании $\lambda_j^{(1)}$ в обоих случаях.

Однако не всегда ошибка аппроксимации оказывается наименьшей при использовании именно функционала $\lambda_j^{(1)}$. Например, при построении приближения для функции $u(t) = \operatorname{arctan}(10t)$ получают следующие значения ошибок (см. табл. 2).

Таблица 2. Ошибки аппроксимации для $u(t) = \operatorname{arctan}(10t)$.

$\varphi(t)$	$\lambda_j^{(0)}$	$\lambda_j^{(1)}$	$\lambda_j^{(2)}$
φ^B	0.3341	0.0245	0.0160
φ^H	0.3371	0.0249	0.0158

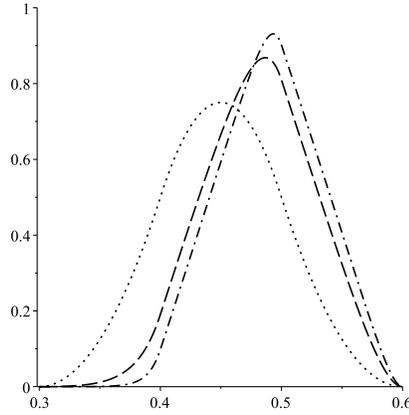


Рис. 1. Графики сплайнов с $\varphi_{p,q}^H$, где $p = 1$ и $q = 1$ (точечная линия), $q = 50$ (пунктирная линия), $q = 100$ (точечно-пунктирная линия).

В данном случае, наиболее высокого качества аппроксимации удалось добиться при использовании функционала $\lambda_j^{(2)}$.

§8. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ПАРАМЕТРАМИ КОНТРОЛЯ ФОРМЫ

В этом разделе мы проиллюстрируем аппроксимацию минимальными гиперболическими сплайнами на данных типа экспоненциального пограничного слоя [21].

Пусть $\varphi_{p,q}^H(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, \text{sh } pt, \text{ch } qt)^T$, где $q \geq p > 0$. В этом случае, определитель Вронского

$$\det(\varphi, \varphi', \varphi'')(t) = qp((q-p)\text{ch}(q+p)t + (q+p)\text{ch}(q-p)t)/2$$

отличен от нуля, а следовательно B_φ -сплайны, порожденные вектор-функцией $\varphi_{p,q}^H$, существуют.

На рис. 1 приведены графики B_φ -сплайнов с порождающей вектор-функцией $\varphi_{p,q}^H$ с параметрами $p = 1$ и $q = 1$ (точечная линия), $q = 50$ (пунктирная линия), $q = 100$ (точечно-пунктирная линия).

Рассмотрим аппроксимацию функции

$$u(t) = 1 - \frac{e^{100t} - 1}{e^{100} - 1}, \quad t \in [0, 1],$$

на равномерной сетке $x_j = j/10, j = 0, \dots, 10$.

Ошибки аппроксимации для рассматриваемой функции u в зависимости от выбора параметров p и q порождающей вектор-функции $\varphi_{p,q}^H$ и функционалов $\lambda_j^{(r)}, r = 1, 2$, определяемых формулами (22)–(23), приведены в табл. 3.

Таблица 3. Ошибки аппроксимации данных типа экспоненциального пограничного слоя, $p = 1$.

$\varphi_{p,q}^H$	$\lambda_j^{(1)}$	$\lambda_j^{(2)}$
$q = 1$	0.5046	2.5689
$q = 50$	0.2255	0.5170
$q = 75$	0.1026	0.1918
$q = 90$	0.0383	0.0658
$q = 95$	0.0187	0.0314
$q = 100$	≈ 0	≈ 0

На рис. 2 приведены графики аппроксимации рассматриваемой функции u в зависимости от выбора параметров p и q порождающей вектор-функции $\varphi_{p,q}^H$ и функционалов $\lambda_j^{(r)}, r = 1, 2$, определяемых формулами (22)–(23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. G. Schweikert, *An interpolating curve using a spline in tension*. — J. Math. Phys. **45** (1966), 312–317.
2. H. Späth, *Exponential spline interpolation*. — Computing **4** (1969), 225–233.
3. J. W. Jerome, L. L. Schumaker, *Local support bases for a class of spline functions*. — J. Approx. Theory **16** (1976), 16–27.
4. C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, Revised edn., Springer, New York, 2001.
5. L. L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory*. 3rd edn., Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
6. B. I. Kvasov, P. Sattayatham, *GB-splines of arbitrary order*. — J. Comput. Appl. Math. **104** (1999), 63–88.
7. P. Costantini, T. Lyche, C. Manni, *On a class of weak Tchebycheff systems*. — Numer. Math. **101** (2005), 333–354.

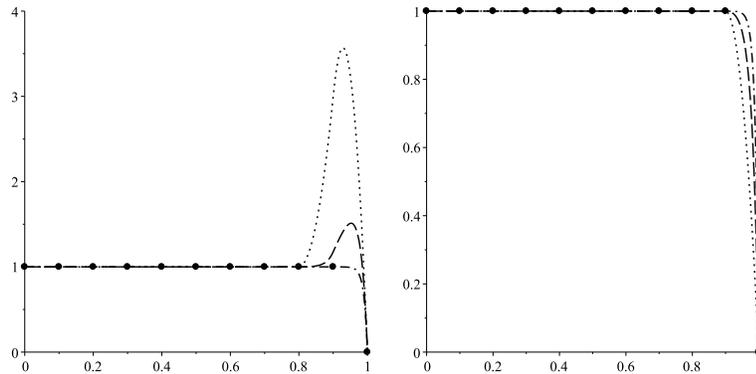


Рис. 2. Аппроксимация данных типа экспоненциального пограничного слоя, $p = 1$ и $q = 1$ (точечная линия), $q = 50$ (пунктирная линия), $q = 100$ (точечно-пунктирная линия). Слева – аппроксимационный функционал $\lambda_j^{(2)}$, определяемый формулой (23), справа – $\lambda_j^{(1)}$, определяемый формулой (22).

8. Ю. К. Демьянович, *Вложенные пространства тригонометрических сплайнов и их всплесковое разложение*. — Мат. заметки **78:5** (2005), 658–675.
9. Ю. К. Демьянович, *Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения*. — Докл. РАН **401**, No. 4 (2005), 1–4.
10. Ю. К. Демьянович, *Минимальные сплайны лагранжеса типа*. — Пробл. мат. анализа **50** (2010), 21–64.
11. А. А. Макаров, *Нормализованные тригонометрические сплайны лагранжеса типа*. — Вестн. С.-Петерб. ун-та **1**, No. 3 (2008), 81–87.
12. А. А. Макаров, *О построении сплайнов максимальной гладкости*. — Пробл. мат. анализа **60** (2011), 25–38.
13. J. M. Pena, *Shape preserving representations for trigonometric polynomial curves*. — Computer Aided Geometric Design **14(1)** (1997), 5–11.
14. G. Xu, G. Z. Wang, *AHT Bezier curves and NUAHT B-spline curves*. — J. Comp. Sci. Technol. **22(4)** (2007), 597–607.
15. J. A. Cottrell, Th. J. R. Hughes, Yu. Bazilevs, *Isogeometric Analysis: Towards Integration of CAD and FEA*, John Wiley & Sons, 2009.
16. Б. И. Квасов, *Методы изогометрической аппроксимации сплайнами*, М., Физматлит, 2006.
17. O. Kosogorov, A. Makarov, *On some piecewise quadratic spline functions*. — Lect. Notes Comp. Sci. **10187** (2017), 448–455.

18. Ю. К. Демьянович, А. А. Макаров, *Необходимые и достаточные условия неотрицательности координатных тригонометрических сплайнов второго порядка*. — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, **4 (62)**, No. 1 (2017), 9–16.
19. А. А. Макаров, *О двойственных функционалах к минимальным сплайнам*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 198–218.
20. А. А. Макаров, *Биортогональные системы функционалов и матрицы декомпозиции для минимальных сплайнов*. — Укр. мат. вісн. **9**, No. 2 (2012), 219–236.
21. Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций*, М., Наука, 1980.

Kulikov E. N., Makarov A. A. Approximation by hyperbolic splines.

The paper considers the minimal hyperbolic splines and their properties. Formulas for constructing quadratic splines and the corresponding biorthogonal (dual) functionals are obtained. Numerical results, demonstrating how approximation quality can be improved by using hyperbolic splines and changing control parameters, are presented.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
199034 С.-Петербург, Россия
E-mail: egor.k.kulikov@gmail.com
E-mail: a.a.makarov@spbu.ru

Поступило 31 октября 2018 г.