Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 472, 2018 г.

Л. Ю. Колотилина

ОБ ОДНОМ ПОДКЛАССЕ КЛАССА НЕВЫРОЖДЕННЫХ $\mathcal{H}$-МАТРИЦ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ ЛОКАЛИЗАЦИИ СОБСТВЕННЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

§1. Введение

В работе предложены новые условия невырожденности квадратных матриц порядка $n \geqslant 2$, зависящие от непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$ и учитывающие шаблон разреженности матрицы. Доказано, что матрицы, удовлетворяющие этим условиям, образуют подкласс класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, который мы называем классом $\{S\text{-SOB}\}$ (S-sparse Ostrowski–Brauer).

Напомним, что матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases}$$

является невырожденной $\mathcal{M}$-матрицей.

Также мы вводим в рассмотрение класс так называемых S-OB (S-Ostrowski–Brauer) матриц, содержащийся в классе $\{S\text{-SOB}\}$.

Затем мы используем предлагаемые критерии невырожденности матриц для того, чтобы стандартным образом получить соответствующие множества локализации собственных значений.

Наконец, основываясь на общем результате, установленном в работе [1], мы получаем новое множество локализации сингулярных значений квадратной матрицы, тем самым улучшая результат из недавней работы [6].

Работа построена следующим образом. В §2 устанавливается критерий невырожденности матриц. На основе этого критерия мы вводим в

Ключевые слова: Критерий невырожденности, критерий невырожденности Островского–Брауэра, невырожденные $\mathcal{H}$-матрицы, DSDD матрицы, DZT матрицы, области локализации собственных значений, области локализации сингулярных значений.

рассмотрение новые матричные классы, которые обозначаются через $\{S\text{-SOB}\}$ и $\{S\text{-OB}\}$, и показываем, что они образуют подклассы класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц. Также мы приводим некоторые элементарные свойства матриц из указанных классов, относящиеся главным образом к строгому диагональному преобладанию. В §3 на основе критерия невырожденности из §2 мы получаем новые области локализации собственных значений для квадратных матриц и показываем, что они содержатся в объединение кругов Гершгорина. Также мы приводим область локализации сингулярных значений квадратной матрицы, уточняющую результат, полученный в работе [6].

В завершение этого вводного параграфа приведем некоторые обозначения, используемые в данной работе.

• Пусть $S \subseteq \langle n\rangle$. Тогда через $|S|$ обозначается мощность множества S, а через $\bar{S} = \langle n\rangle \setminus S$ – дополнительное подмножество.

• I_n – это единичная матрица порядка n.

• Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Тогда

$$r_i(A) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

– усеченные абсолютные строчные суммы для A; при $j \in \langle n\rangle$, $j \neq i$ мы полагаем

$$r_i^j(A) = r_i(A) - |a_{ij}|,$$

а если $S \subseteq \langle n\rangle$ – непустое подмножество множества индексов, то

$$r_i^S(A) = \sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

– это соответствующие частичные усеченные абсолютные строчные суммы.

§2. Критерии невырожденности

Главными результатами этот параграфа являются теорема 2.3, устанавливающая новый критерий невырожденности, зависящий от подмножества множества индексов, и теорема 2.4, утверждающая, что матрицы, удовлетворяющие условиям теоремы 2.3, образуют подкласс класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.

Установим сперва следующий базовый результат.

Лемма 2.1. *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *является вырожденной, пусть* $S \subset \langle n\rangle$ *– подмножество множества индексов* $\langle n\rangle$, $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$, *и пусть*

$$|x_p| = \max_{i\in\langle n\rangle} |x_i|. \tag{2.1}$$

Если $p \in S$, *то*

либо $r_p^{\bar S}(A) = 0$ *и*

$$|a_{pp}| - r_p^S(A) = |a_{pp}| - r_p(A) \leqslant 0, \tag{2.2}$$

либо для некоторого $q \in \bar S$, *такого что* $a_{pq} \neq 0$,

$$[|a_{pp}| - r_p^S(A)]\, |a_{qq}| \leqslant r_p^{\bar S}(A)\, r_q(A). \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть

$$Ax = 0, \tag{2.4}$$

где $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$ – ненулевой вектор.

Если $r_p^{\bar S}(A) = 0$, то из (2.4) и (2.1) вытекает, что

$$|a_{pp}|\, |x_p| \leqslant r_p(A)\, |x_p| = r_p^S(A)\, |x_p|,$$

так что (2.2) доказано.

В том случае, когда $r_p^{\bar S}(A) \neq 0$, выберем $q \in \bar S$ таким образом, что

$$|x_q| = \max_{j\in\bar S:\ a_{pj}\neq 0} |x_j|. \tag{2.5}$$

Используя (2.4), (2.1) и (2.5), мы выводим:

$$|a_{pp}|\,|x_p| \leqslant \sum_{\substack{i\in S\\ i\neq p}} |a_{pi}|\,|x_i| + \sum_{\substack{j\in\bar S:\\ a_{pj}\neq 0}} |a_{pj}|\,|x_j| \leqslant r_p^S(A)\,|x_p| + r_p^{\bar S}(A)\,|x_q|.$$

Следовательно,

$$[|a_{pp}| - r_p^S(A)]\, |x_p| \leqslant r_p^{\bar S}(A)\,|x_q|. \tag{2.6}$$

Здесь возможны два случая. Если $x_q = 0$, то, в силу (2.6),

$$|a_{pp}| - r_p^S(A) \leqslant 0,$$

так что неравенство (2.3) верно тривиальным образом. Если же $x_q \neq 0$, то, используя (2.4) и (2.1), мы выводим:

$$|a_{qq}|\,|x_q| \leqslant \sum_{i\neq q} |a_{qi}|\,|x_i| \leqslant r_q(A)\,|x_p|. \tag{2.7}$$

Поскольку как x_p, так и x_q отличны от нуля, неравенство (2.3) легко следует из (2.6) и (2.7).

Лемма доказана. $\square$

Рассмотри два частных случая леммы 2.1.

Пусть сперва $S = \{p\}$, где p выбрано в соответствии с (2.1). В этом случае, очевидно,

$$r_p^S(A) = 0 \quad \text{и} \quad r_p^{\bar{S}}(A) = r_p(A),$$

так что из неравенства (2.2) и условия $r_p^{\bar{S}}(A) = 0$ следует, что p-ая строка матрицы A нулевая, а неравенство (2.3) принимает вид

$$|a_{pp}|\,|a_{qq}| \leqslant r_p(A)\, r_q(A). \tag{2.8}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае лемма 2.1 сводится к следующему известному утверждению.

Следствие 2.1. *Если матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, вырождена и не имеет нулевых строк, то неравенство* (2.3) *выполняется для некоторых $p, q \in \langle n\rangle$, $p \neq q$, таких что $a_{pq} \neq 0$.*

Ясно, что следствие 2.1 равносильно приводимой ниже "разреженной" версии классического критерия невырожденности Островского–Брауэра (см. [4, 9]).

Теорема 2.1 ([8])**.** *Если матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, не имеет нулевых строк и удовлетворяет условию*

$$|a_{pp}|\,|a_{qq}| > r_p(A)\, r_q(A) \ \ \text{для всех } p \neq q \ \text{ таких, что } a_{pq} \neq 0, \tag{2.9}$$

то A является невырожденной.

Про матрицы, удовлетворяющие условию (2.9) для всех $p \neq q$ (без того требования, что $a_{pq} \neq 0$), иногда говорят, что они имеют двойное строгое диагональное преобладание, т.е. являются DSDD (doubly strictly diagonally dominant) матрицами (см., например, [5, 11]).

Рассмотрим теперь другой специальный выбор множества S. Пусть опять p выбрано в соответствии с (2.1) и пусть q – произвольный индекс, отличный от p. Положим $S = \langle n\rangle \setminus \{q\}$. В этом случае, $p \in S$, неравенство (2.3) имеет вид

$$[|a_{pp}| - r_p^q(A)]\,|a_{qq}| \leqslant |a_{pq}|\, r_q(A) \tag{2.10}$$

и, по лемме 2.1, вырожденная матрица A удовлетворяет неравенству (2.10), если $a_{pq} \neq 0$. Если же $a_{pq} = 0$, то неравенство (2.10) выполняется в силу (2.2). Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Следствие 2.2. *Если матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, вырождена, то неравенство* (2.10) *выполняется для некоторого $p \in \langle n\rangle$ и для всех $q \in \langle n\rangle$, $q \neq p$.*

Следствие 2.2 равносильно следующему критерию невырожденности.

Теорема 2.2 ([11])**.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. Если для каждого $p \in \langle n\rangle$ неравенство*

$$[|a_{pp}| - r_p^q(A)]\ |a_{qq}| > |a_{pq}|\ r_q(A) \tag{2.11}$$

справедливо при некотором $q = q(p) \neq p$, то A – невырожденная матрица.

Матрицы, удовлетворяющие условию теоремы 2.2, были введены в работе [11], в которой они были названы матрицами типа Дашница–Зусмановича (DZT). Наиболее свежие результаты о DZT матрицах представлены в статье [2], опубликованной в данном сборнике.

В том случае, когда S – произвольное непустое собственное подмножество множества индексов, из леммы 2.1 мы немедленно получаем следующий результат, обобщающий как теорему 2.1, так и теорему 2.2.

Теорема 2.3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, $S \subset \langle n\rangle$, $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$ и пусть выполнены следующие условия:*

(i) *$|a_{pp}| > r_p^S(A)$ для всех $p \in S$;*

(ii) *$|a_{qq}| > r_q^{\bar S}(A)$ для всех $q \in \bar S$;*

(iii) *для всех $p \in S$ и всех $q \in \bar S$ таких, что $a_{pq} \neq 0$, имеет место неравенство*

$$[|a_{pp}| - r_p^S(A)]\ |a_{qq}| > r_p^{\bar S}(A)\ r_q(A); \tag{2.12}$$

(iv) *для всех $p \in S$ и всех $q \in \bar S$ таких, что $a_{qp} \neq 0$, имеет место неравенство*

$$[|a_{qq}| - r_q^{\bar S}(A)]\ |a_{pp}| > r_q^S(A)\ r_p(A). \tag{2.13}$$

Тогда матрица A является невырожденной.

Теорема 2.3 сформулирована с учетом структуры разреженности матрицы A. Если же структура разреженности игнорируется и мы требуем, чтобы условия (2.12) и (2.13) выполнялись для всех $p \in S$ и всех $q \in \bar{S}$, то условия (i) и (ii) становятся избыточными, и мы приходим к следующему утверждению, имеющему более простую формулировку.

Следствие 2.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $S \subset \langle n \rangle$, $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$. *Если неравенства* (2.12) *и* (2.13) *справедливы для всех* $p \in S$ *и всех* $q \in \bar{S}$, *то матрица* A *является невырожденной.*

Как хорошо известно [5, 11], матрицы, удовлетворяющие условиям теорем 2.1 и 2.2, образуют подклассы класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц. Поэтому естественно предположить, что и матрицы, удовлетворяющие условиям теоремы 2.3, также образуют подкласс класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц. Это предположение подтверждается следующей теоремой.

Теорема 2.4. *Если матрица* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, *удовлетворяет условиям теоремы* 2.3, *то она является невырожденной* $\mathcal{H}$-*матрицей.*

Доказательство. Заметим, что матрица A удовлетворяет условиям (i)–(iv) теоремы 2.3 тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $\mathcal{M}(\mathrm{A})$ удовлетворяет им. Следовательно, по теореме 2.3, матрица $\mathcal{M}(\mathrm{A})$ невырождена, и нам остается показать, что она является $\mathcal{M}$-матрицей. Для этого, в силу [3, Condition D_{15} of Theorem 6.2.3], достаточно доказать, что матрица $\mathcal{M}(A) + \varepsilon I_n$ невырождена при всех $\varepsilon \geqslant 0$. Если условия (i)–(iv) выполняются для $\mathcal{M}(\mathrm{A})$, то они тем более выполняются и для матрицы $\mathcal{M}(A) + \varepsilon I_n$. Следовательно, по теореме 2.3, матрица $\mathcal{M}(A) + \varepsilon I_n$ является невырожденной при всех $\varepsilon \geqslant 0$, а значит A – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица. $\square$

Пусть S – некоторое подмножество множества индексов. Тогда классы матриц, удовлетворяющих условиям теоремы 2.3 и следствия 2.3, будем соответственно обозначать через $\{S\text{-SOB}\}$ (S-Sparse Ostrowski–Brauer) и $\{S\text{-OB}\}$ (S-Ostrowski–Brauer).

В заключение данного параграфа приведем некоторые элементарные свойста матриц из классов $\{S\text{-SOB}\}$ и $\{S\text{-OB}\}$, большинство из которых имеют отношение к строгому диагональному преобладанию.

1. Имеют место следующие включения:

$$\{\mathrm{SDD}\} \subsetneqq \{S\text{-OB}\} \subsetneqq \{S\text{-SOB}\} \subsetneqq \mathcal{H}.$$

2. Классы $\{S\text{-SOB}\}$ и $\{S\text{-OB}\}$ инвариантны относительно умножения слева на невырожденные диагональные матрицы.

3. Если $A \in \{S\text{-SOB}\}$ или $A \in \{S\text{-OB}\}$, то обе главные подматрицы $A[S] = (a_{ij})_{i,j\in S}$ и $A[\bar{S}] = (a_{ij})_{i,j\in \bar{S}}$ матрицы A имеют строгое диагональное преобладание.

4. Если A является S-SOB матрицей, $p \in S$, $q \in \bar{S}$ и $a_{pq} \neq 0$ или $a_{qp} \neq 0$, то, в силу (2.12) или (2.13), хотя бы одна из строк с номерами p и q имеет строгое диагональное преобладание.

5. Если $A \in \{S\text{-OB}\}$ и при некотором $p \in S$ p-ая строка не имеет строгого диагонального преобладания, то, в силу либо (2.12), либо (2.13), все строки с номерами $q \in \bar{S}$ имеют строгое диагональное преобладание. Таким образом, если $A \notin\{\text{SDD}\}$, то все ее строки, не имеющие строгого диагонального преобладания, одновременно принадлежат либо множеству S, либо его дополнению $\bar{S}$.

§3. Приложения

В этом параграфе мы приводим новые множества локализации собственных значений квадратной матрицы и им соответствующие множества локализации сингулярных значений.

3.1. Множества, содержащие собственные значения матрицы. Применяя лемму 2.1 к вырожденной матрице $\lambda I_n - A$, где $\lambda \in$ SpecA – некоторое собственное значение матрицы A, мы заключаем, что для любого подмножества $S \subset \langle n\rangle$, $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$, найдутся некоторые $p \in S$ и $q \in \bar{S}$ такие, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:

(i)
$$r_p^{\bar{S}}(A) = 0 \quad \text{и} \quad |\lambda - a_{pp}| \leqslant r_p^S(A);$$

(ii)
$$r_q^{S}(A) = 0 \quad \text{и} \quad |\lambda - a_{qq}| \leqslant r_q^{\bar{S}}(A);$$

(iii)
$$a_{pq} \neq 0 \quad \text{и} \quad \left[|\lambda - a_{pp}| - r_p^S(A)\right]\, |\lambda - a_{qq}| \leqslant r_p^{\bar{S}}(A)\, r_q(A);$$

(iv)
$$a_{qp} \neq 0 \quad \text{и} \quad \left[|\lambda - a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A)\right]\, |\lambda - a_{pp}| \leqslant r_q^{S}(A)\, r_p(A).$$

Тем самым, мы приходим к следующим областям локализации собственных значений матрицы, зависящим от множества S.

Теорема 3.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $S \subset \langle n\rangle$, $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$, *– произвольное подмножество множества индексов* $\langle n\rangle$. *Тогда*

$$\mathrm{Spec} A \subseteq \Omega(A,S) \equiv \bigcup_{\substack{p\in S:\\ r_p^{\bar S}(A)=0}} \{z\in\mathbb{C}:\ |z-a_{pp}| \leqslant r_p^S(A)\}$$
$$\cup \bigcup_{\substack{q\in \bar S:\\ r_q^{S}(A)=0}} \{z\in\mathbb{C}:\ |z-a_{qq}| \leqslant r_q^{\bar S}(A)\}$$
$$\cup \bigcup_{\substack{p\in S, q\in\bar S:\\ a_{pq}\neq 0}} \Omega_{pq}^S(A) \cup \bigcup_{\substack{p\in S, q\in\bar S:\\ a_{qp}\neq 0}} \Omega_{qp}^{\bar S}(A), \tag{3.1}$$

где

$$\Omega_{pq}^S(A) = \{z\in\mathbb{C}:\ [|z-a_{pp}| - r_p^S(A)]\, |z-a_{qq}| \leqslant r_p^{\bar S}(A)\, r_q(A)\},$$
$$p\in S,\ q\in\bar S, \tag{3.2}$$

и

$$\Omega_{qp}^{\bar S}(A) = \{z\in\mathbb{C}:\ [|z-a_{qq}| - r_q^{\bar S}(A)]\, |z-a_{pp}| \leqslant r_q^{S}(A)\, r_p(A)\},$$
$$p\in S,\ q\in\bar S. \tag{3.3}$$

Если в теореме 3.1 мы не будем принимать во внимание структуру разреженности матрицы, то получим следующий результат, более простой по форме, но менее точный.

Следствие 3.1. *В условиях теоремы* 3.1 *имеет место включение*

$$\mathrm{Spec} A \subseteq \bigcup_{p\in S,\ q\in\bar S} \Omega_{pq}(A,S), \tag{3.4}$$

где

$$\Omega_{pq}(A,S) \equiv \Omega_{pq}^S(A) \cup \Omega_{qp}^{\bar S}(A), \quad p\in S,\ q\in\bar S.$$

Доказательство. Нужно показать, что множество $\Omega(A,S)$ содержится в правой части (3.4). Действительно, если $r_p^{\bar S}(A) = 0$, то для каждого $q\in\bar S$ множество

$$\Omega_{pq}^S(A) = \{z\in\mathbb{C}:\ [|z-a_{pp}| - r_p^S(A)]\, |z-a_{qq}| \leqslant 0\},$$

очевидно, содержит множество

$$\{z\in\mathbb{C}:\ |z-a_{pp}| \leqslant r_p^S(A)\}.$$

Аналогично, если $r_q^S(A) = 0$, то для каждого $p \in S$ множество

$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z - a_{qq}| \leqslant r_q^{\bar{S}}(A)\}$$

тривиальным образом содержится в множестве

$$\Omega_{qp}^{\bar{S}}(A) = \{z \in \mathbb{C} : \ [|z - a_{qq}| - r_q^{\bar{S}}(A)]\, |z - a_{qq}| \leqslant 0\}.$$

□

Как легко убедиться, для всех $p \in S$ и всех $q \in \bar{S}$ справедливо включение

$$\Omega_{pq}(A, S) \subseteq \Gamma_p(A) \cup \Gamma_q(A), \tag{3.5}$$

где

$$\Gamma_i(A) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - a_{ii}| \leqslant r_i(A)\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

– это круги Гершгорина для матрицы A.

Действительно, пусть $z \in \Omega_{pq}(A, S)$. Если $z \in \Gamma_p(A)$, то, очевидно, $z \in \Gamma_p(A) \cup \Gamma_q(A)$. В том же случае, когда $z \notin \Gamma_p(A)$, мы имеем

$$|z - a_{pp}| > r_p(A) \quad \text{и} \quad |z - a_{pp}| - r_p^S(A) > r_p^{\S}(A),$$

и из (3.2) и (3.3) вытекает, что

$$|z - a_{qq}| \leqslant r_q(A),$$

т.е. $z \in \Gamma_q(A)$. Этим доказано соотношение (3.5).

Поскольку, как показано в доказательстве следствия 3.1, $\Omega(A, S) \subseteq \bigcup\limits_{p \in S,\, q \in \bar{S}} \Omega_{pq}(A, S)$, из (3.5) мы немедленно получаем:

$$\Omega(A, S) \subseteq \bigcup_{p \in S,\, q \in \bar{S}} \Omega_{pq}(A, S) \subseteq \Gamma(A) \equiv \bigcup_{i \in \langle n \rangle} \Gamma_i(A), \tag{3.6}$$

т.е. новые множества локализации собственных значений из теоремы 3.1 и следствия 3.1 содержатся в множестве Гершгорина $\Gamma(A)$.

3.2. Множества локализации сингулярных значений квадратной матрицы. Подход к выводу множеств локализации сингулярных значений, разработанный в работе [1], позволяет получать их, применяя известные области локализации собственных значений к некоторой матрице удвоенного порядка, ассоциированной с исходной матрицей. Данный подход основывается на следующей лемме.

Лемма 3.1 ([1]). *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A + B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $D_A = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$. *Если* $\sigma \in \Sigma(A)$ *– сингулярное значение матрицы* A, *то матрица*

$$C=(c_{ij})=C(\sigma,A)=\begin{bmatrix} \sigma^2 I_n-|D_A|^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 I_n-|D_A|^2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} D_A B^* & \sigma B \\ \sigma B^* & D_A^* B \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

вырождена. Кроме того, если $\sigma \geqslant 0$ *и* $\sigma \neq |a_{ii}|$, $i = 1, \dots, n$, *то матрица* C *вырождена тогда и только тогда, когда* $\sigma \in \Sigma(A)$.

Лемма 3.1 утверждает, что нуль является собственным значением матрицы $C = C(\sigma, A)$. Следовательно, нуль содержится в любом множестве локализации собственных значений для матрицы C. В частности, ввиду следствия 3.1,

$$0 \in \bigcup_{p\in S, q\in \bar{S}} \left[\Omega_{pq}^S(C) \cup \Omega_{qp}^{\bar{S}}(C)\right], \tag{3.8}$$

где S – произвольное непустое собственное подмножество множества индексов $\{1, 2, \dots 2n\}$, а множества $\Omega_{pq}^S(C)$ и $\Omega_{qp}^{\bar{S}}(C)$ определяются в соответствии с (3.2) и (3.3). Положим $S = \langle n\rangle$. Тогда множества $\Omega_{pq}^S(C)$ и $\Omega_{qp}^{\bar{S}}(C)$ таковы:

$$\begin{aligned}\Omega_{pq}^S(C)=\big\{z\in\mathbb{C}:\ &\big[\big|z-(\sigma^2-|a_{pp}|^2)\big|-|a_{pp}|\, r_p(A^*)\big]\cdot\big|z-(\sigma^2-|a_{qq}|^2)\big| \\ &\leqslant \sigma\, r_p(A)\ \left[\sigma\, r_q(A^*)+|a_{qq}|\, r_q(A)\right]\big\}, \quad p,q\in\langle n\rangle;\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{qp}^{\bar{S}}(C)=\big\{z\in\mathbb{C}:\ &\big[\big|z-(\sigma^2-|a_{qq}|^2)\big|-|a_{qq}|\, r_q(A)\big]\cdot\big|z-(\sigma^2-|a_{pp}|^2)\big| \\ &\leqslant \sigma\, r_q(A^*)\ \left[\sigma\, r_p(A)+|a_{pp}|\, r_p(A^*)\right]\big\}, \quad p,q\in\langle n\rangle.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Включение $0 \in \Omega_{pq}^S(C)$ равносильно неравенству

$$\begin{aligned}&\big[|\sigma^2-|a_{pp}|^2|-|a_{pp}|\, r_p(A^*)\big]\cdot|\sigma^2-|a_{qq}|^2| \\ &\qquad\leqslant \sigma\, r_p(A)\left[\sigma\, r_q(A^*)+|a_{qq}|\, r_q(A)\right],\end{aligned} \tag{3.11}$$

а включение $0 \in \Omega_{qp}^{\bar{S}}(C)$ равносильно неравенству

$$\begin{aligned}&\big[\sigma^2-|a_{qq}|^2|-|a_{qq}|\, r_q(A)\big]\cdot|\sigma^2-|a_{pp}|^2| \\ &\qquad\leqslant \sigma\, r_q(A^*)\left[\sigma\, r_p(A)\right]+|a_{pp}|\, r_p(A^*)\right].\end{aligned} \tag{3.12}$$

Учитывая (3.8) совместно с (3.11) и (3.12), мы приходим к следующему множеству локализации сингулярных значений квадратной матрицы, впервые предложенному в недавней работе [6].

Теорема 3.2 ([6]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\Sigma(A) \subseteq \Delta(A) \equiv \bigcup_{p,q\in\langle n\rangle} \left[\Delta_{pq}(A) \cup \Delta_{qp}(A^*)\right], \tag{3.13}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_{pq}(A) = \big\{z \geqslant 0 :\ &\big[|z^2 - |a_{pp}|^2| - |a_{pp}|\, r_p(A^*)\big] \cdot |z^2 - |a_{qq}|^2| \\ &\leqslant z\, r_p(A)\, [z\, r_q(A^*) + |a_{qq}|\, r_q(A)]\big\}, \quad p, q \in \langle n\rangle.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Как легко убедиться, для всех $p, q \in \langle n\rangle$ мы имеем

$$\begin{aligned}\Delta_{pq}(A) \cup \Delta_{qp}(A^*) &\subseteq \big\{z \geqslant 0 :\ |z^2 - |a_{pp}|^2| \leqslant |a_{pp}|\, r_p(A^*) + z\, r_p(A)\big\} \\ &\cup \big\{z \geqslant 0 :\ |z^2 - |a_{qq}|^2| \leqslant |a_{qq}|\, r_q(A) + z\, r_q(A^*)\big\} \\ &\subseteq \bigcup_{i\in\langle n\rangle} \big\{z \geqslant 0 :\ |z^2 - |a_{ii}|^2| \leqslant \varphi_i(z, A)\big\},\end{aligned}$$

где

$$\varphi_i(z, A) = \max\{|a_{ii}|\, r_i(A^*) + z\, r_i(A),\ |a_{ii}|\, r_i(A) + z\, r_i(A^*)\},\ \ i = 1, \ldots, n.$$

Это означает, что

$$\Delta(A) \subseteq \bigcup_{i\in\langle n\rangle} \big\{z \geqslant 0 :\ |z^2 - |a_{ii}|^2| \leqslant \varphi_i(z, A)\big\},$$

так что теорема 3.2 уточняет теорему 2.1 работы [1], утверждающую, что

$$\Sigma(A) \subseteq \bigcup_{i\in\langle n\rangle} \big\{z \geqslant 0 :\ |z^2 - |a_{ii}|^2| \leqslant \varphi_i(z, A)\big\}, \tag{3.15}$$

и соответствующую использованию леммы 3.1 в сочетании с теоремой Гершгорина. Заметим, что включение (3.15) было впервые получено, хотя и не сформулировано как отдельное утверждение, в работе [10]. Совсем недавно это включение появилось как теорема 2 в работах [6] и [7], обе из которых ссылаются на работу [10], но не упоминают обсуждаемый результат. Следует также отметить, что, с точностью до некоторых опечаток, теорема 3 работы [7] представляет собой ослабленную версию, не принимающую во внимание шаблон разреженности матрицы, следствия 2.4 из работы [1].

Заметим, что множество локализации из теоремы 3.2 содержит не только сингулярные значения заданной матрицы A, но также и сингулярные значения любой матрицы $B = (b_{ij})$, эквимодулярной A, т.е. такой, что $|b_{ij}| = |a_{ij}|$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Проводя те же рассуждения, что и выше, но применяя теорему 3.1, а не следствие 3.1, мы приходим к следующему уточнению теоремы 3.2, учитывающему структуру разреженности матрицы.

Теорема 3.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\Sigma(A) \subseteq \bigcup_{\substack{p\in\langle n\rangle:\\ r_p(A)=0}} \left\{z \geqslant 0 :\ \left|z^2 - |a_{pp}|^2\right| \leqslant |a_{pp}|\, r_p(A^*)\right\}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{q\in\langle n\rangle:\\ r_q(A^*)=0}} \left\{z \geqslant 0 :\ \left|z^2 - |a_{qq}|^2\right| \leqslant |a_{qq}|\, r_q(A)\right\} \tag{3.16}$$

$$\cup \left[\bigcup_{\substack{p,q\in\langle n\rangle:\\ a_{pq}\neq 0}} \Delta_{pq}(A)\right] \cup \left[\bigcup_{\substack{p,q\in\langle n\rangle:\\ a_{qp}\neq 0}} \Delta_{qp}(A^*)\right],$$

где множества $\Delta_{pq}(A)$ *определяются в соответствии с* (3.14).

Заметим, что для матрицы A, не имеющей диагональных строк и, в частности, для произвольной неприводимой матрицы A, соотношение (3.16) принимает следующий более простой вид:

$$\Sigma(A) \subseteq \left[\bigcup_{\substack{p,q\in\langle n\rangle:\\ a_{pq}\neq 0}} \Delta_{pq}(A)\right] \cup \left[\bigcup_{\substack{p,q\in\langle n\rangle:\\ a_{qp}\neq 0}} \Delta_{qp}(A^*)\right], \tag{3.17}$$

который представляет собой разреженную версию включения (3.13).

В завершение данной работы заметим, что множество S можно выбрать и отличным от $\langle n\rangle$, скажем, взять $S = \{k\}$, где $k \in \langle n\rangle$. Тогда, применяя лемму 2.1 и теорему 3.1 или следствие 3.1, можно получить другие области локализации сингулярных значений матрицы.

Список литературы

1. Л. Ю. Колотилина, *Множества, содержащие сингулярный спектр квадратной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 52–77.
2. Л. Ю. Колотилина, *О матрицах Дашница– Зусмановича (DZ) и матрицах типа Дашница–Зусмановича (DZT) и их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 145–165.
3. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, New York etc., 1979.
4. A. Brauer, *Limits for the characteristic roots of a matrix: II.* — Duke Math. J. **14** (1947), 21–26.

5. L. Cvetković, *H-matrix theory vs. eigenvalue localization.* — Numer. Algorithms **42** (2007), 229–245.
6. Jun He, Yan-Min Liu, Yun-Kang Tian, and Ze-Rong Ren, *A note on the inclusion set for singular values.* — AIMS Mathematics **2(2)** (2017), 315–321.
7. Jun He, Yan-Min Liu, Yun-Kang Tian, and Ze-Rong Ren, *New inclusion sets for singular values.* — J. Ineq. Appl. **64** (2017), `DOI 10.1186/s 13660-017-1337-8`.
8. L. Yu. Kolotilina, *Generalizations of the Ostrowski–Brauer theorem.* — Linear Algebra Appl. **364** (2003), 65–80.
9. A. M. Ostrowski, Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale. — *Comment. Math. Helv.* **10** (1937), 69–96.
10. L. Qi, *Some simple estimates for singular values of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **56** (1984), 105–119.
11. Jianxing Zhao, Qilong Liu, Chaoqian Li, Yaotang Li, *Dashnic–Zusmanovich type matrices: a new subclass of nonsingular H-matrices.* — Linear Algebra Appl. **552** (2018), 277–287.

Kolotilina L. Yu. A new subclass of the class of nonsingular $\mathcal{H}$-matrices and related inclusion sets for eigenvalues and singular values.

The paper presents new nonsingularity conditions for $n \times n$ matrices, which involve a subset S of the index set $\{1, \dots, n\}$ and take into consideration the matrix sparsity pattern. It is shown that the matrices satisfying these conditions form a subclass of the class of nonsingular $\mathcal{H}$-matrices, which contains some known matrix classes such as the class of doubly strictly diagonally dominant (DSDD) matrices and the class of Dashnic–Zusmanovich type (DZT) matrices.

The nonsingularity conditions established are used to obtain the corresponding eigenvalue inclusion sets, which, in their turn, are used in deriving new inclusion sets for the singular values of a square matrix, improving some recently suggested ones.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия

Поступило 26 октября 2018 г.

E-mail: `lilikona@mail.ru`