Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 472, 2018 г.

Л. Ю. Колотилина

О МАТРИЦАХ ДАШНИЦА–ЗУСМАНОВИЧА (DZ) И МАТРИЦАХ ТИПА ДАШНИЦА–ЗУСМАНОВИЧА (DZT) И ИХ ОБРАТНЫХ

§1. Введение

Класс $\mathcal{H}$-матриц играет чрезвычайно важную роль в теории матриц. Но, в общем случае, весьма трудно проверить, принадлежит ли заданная матрица этому классу. В этой связи совершенно естественным является выделение специфических подклассов класса $\mathcal{H}$-матриц, которые характеризуются условиями, поддающимися проверке.

В частности, среди таких подклассов следует упомянуть матрицы, обладающие строгим диагональным преобладанием (SDD), матрицы Дашница–Зусмановича (DZ) [1, 8], S-SDD матрицы, где S – это непустое собственное подмножество множества индексов [13, 14, 16], матрицы Некрасова (см., например, [9, 3]), S-некрасовские (SN) матрицы [12, 11], квазинекрасовские (QN) матрицы [4] и т.д., а также блочные обобщения [10, 5] перечисленных выше подклассов.

Следует также отметить, что для матриц A из указанных подклассов известны верхние оценки для l_∞-нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ их обратных.

Настоящая работа тесно связана с классом DZ матриц, введенных в статье [1]. Напомним, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется DZ матрицей, если существует такой индекс $j \in \langle n\rangle$, где мы используем обозначение $\langle n\rangle = \{1, \dots, n\}$, что для всех $i \neq j$, $i \in \langle n\rangle$, выполняется неравенство

$$\Big[|a_{ii}| - r_i^j(A)\Big]\ |a_{jj}| > |a_{ij}|\ r_j(A). \tag{1.1}$$

Ключевые слова: невырожденные $\mathcal{H}$-матрицы, матрицы Дашница–Зусмановича (DZ), матрицы типа Дашница–Зусмановича (DZT), SDD матрицы, S-SDD матрицы, верхние оценки, l_∞-норма, обратные матрицы, локализация собственных значений, трансвекции.

Работа подготовлена при поддержке программы Президиума РАН № 01 “Фундаментальная математика и ее приложения” (грант PRAS-18-01).

В (1.1) и ниже для заданной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ мы полагаем

$$r_i(A) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1,\dots,n,$$

и

$$r_i^j(A) = r_i(A) - |a_{ij}|, \quad \text{где} \quad i = 1,\dots,n, \quad j \neq i.$$

В работе [1] было доказано, что всякая DZ матрица является невырожденной. Более того, как упомянуто в работе [8], каждая DZ матрица в действительности является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей. Ясно, что любая SDD матрица A, для которой, по определению,

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad i = 1,\dots,n, \tag{1.2}$$

удовлетворяет условию (1.1) для всех $i \neq j$, $i, j \in \langle n\rangle$. Следовательно, соответствующие матричные классы удовлетворяют соотношениям

$$\{\mathrm{SDD}\} \subset \{\mathrm{DZ}\} \subset \{\mathcal{H}\}. \tag{1.3}$$

В недавней работе [17] был введен в рассмотрение новый матричный класс, который формально получается, если в определении DZ матриц переставить кванторы. Точнее, говорят, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является матрицей типа DZ (DZT), если для каждого $i \in \langle n\rangle$ найдется индекс $j = j(i)$ такой, что выполняется неравенство (1.1), т.е.

$$\forall i \in \langle n\rangle\ \exists j \neq i: \quad \Big(|a_{ii}| - r_i^j(A)\Big)\ |a_{jj}| > |a_{ij}|\ r_j(A). \tag{1.4}$$

Заметим, что, как будет показано в §2, каждая i-ая строка DZT матрицы A, которая не имеет строгого диагонального преобладания, т.е. $|a_{ii}| \leqslant r_i(A)$, трансформируется в строку со строгим диагональным преобладанием (sdd) посредством добавления к ней соответствующей j-ой строки, где $j = j(i)$, с подходящим коэффициентом. Что же касается DZ матрицы A, удовлетворяющей условию (1.1), все ее строки с номерами $i \neq j$ трансформируются в sdd строки прибавлением одной и той же строки j.

В данной работе мы, главным образом, заинтересованы в исследовании класса DZT матриц. Сперва мы показываем, что условие (1.4) в определении DZT матриц можно существенно ослабить, а именно, мы доказываем, что $A \in \{\mathrm{DZT}\}$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \langle n\rangle$, такого что $|a_{ii}| \leqslant r_i(A)$, неравенство (1.1) выполняется при некотором $j \in \langle n\rangle$, $j \neq i$. Другими словами, для того, чтобы матрица A была DZT матрицей, достаточно, чтобы условие (1.1) выполнялось для всех тех строк с номерами i, которые не имеют строгого диагонального преобладания. Установленная характеризация DZT матриц, наряду с фактом их невырожденности, позволяет нам получить новую область локализации собственных значений произвольной квадратной матрицы, уточняющую как теорему Гершгорина, так и недавний результат из работы [17].

Затем мы исследуем неравенство (1.1) с точки зрения гауссова исключения. Используя такую интерпретацию, мы легко получаем новое доказательство включения $\{\mathrm{DZT}\} \subset \mathcal{H}$ и устанавливаем определенное сходство между классом $\{\mathrm{DZT}\}$ и классом некрасовских матриц, что позволяет нам получить верхнюю оценку l_∞-нормы обратной матрицы A^{-1} для DZT матрицы A.

Статья построена следующим образом. В §2 мы устанавливаем полезную характеризацию DZT матриц, приводим новое доказательство включения $\{\mathrm{DZT}\} \subset \mathcal{H}$ и выводим верхнюю оценку $\|A^{-1}\|_\infty$ для DZT матрицы A. Также мы уточняем результат, касающийся локализации собственных значений, полученный в работе [17]. В §3 рассматриваются соотношения между классами DZT, DZ и S-SDD матриц. В частности, показывается, что, в отличие от $\{\mathrm{DZ}\}$, класс $\{\mathrm{DZT}\}$ не содержится в классе $\{S\text{-SDD}\}$. В §4 исследуются верхние оценки $\|A^{-1}\|_\infty$ для DZ и SDD матриц.

В заключение этого вводного параграфа приведем еще некоторые обозначения, используемые в статье.
Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – матрица порядка $n \geqslant 2$.

• Если $S \subseteq \langle n\rangle$ – непустое подмножество индексов, то через

$$r_i^S(A) = \sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

обозначаются соответствующие частичные абсолютные строчные суммы матрицы A;

• $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} \ \ |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases}$$

– это Z-матрица сравнения для A, а через

$$S_A := \{i \in \langle n\rangle : \ |a_{ii}| \leqslant r_i(A)\}$$

обозначается множество тех строк A, которые не имеют строгого диагонального преобладания.

• I_n – это единичная матрица порядка n.

• $e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор.

• Для подмножества $S \subseteq \langle n \rangle$ через $|S|$ обозначается его мощность, а через $\bar{S} = \langle n \rangle \setminus S$ – дополнительное подмножество.

В §2 мы будем использовать трансвекции, т.е. элементарные матрицы вида

$$T_{ij}(\xi) := I_n + \xi e_{ij}, \quad i, j \in \langle n \rangle,$$

где e_{ij}, $i \neq j$, $i, j \in \langle n \rangle$, – это матричная единица, отличающаяся от нулевой матрицы единичным элементом на позиции (i, j). Как легко видеть,

$$e_{ij}\, e_{rs} = \delta_{jr} e_{is}, \quad i, j, r, s \in \langle n \rangle,$$

где δ_{jr} – символ Кронеккера.

§2. DZT матрицы

В этом параграфе мы устанавливаем характеризацию DZT матриц, на основе которой доказываем, что DZT матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами. Также, используя сходство между DZT и некрасовскими матрицами, мы получаем верхнюю оценку нормы l_∞ обратной к DZT матрице A.

Напомним, что, в соответствии с определением из работы [17], матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, является DZT матрицей, если для каждого $i \in \langle n \rangle$ неравенство

$$\Big[|a_{ii}| - r_i^j(A)\Big]\ |a_{jj}| > |a_{ij}|\ r_j(A) \tag{2.1}$$

выполняется при некотором $j \neq i$, $j = j(i)$.

Установим сперва упомянутую характеризацию DZT матриц. Для этого нам понадобится следующий вспомогательный результат.

Лемма 2.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть неравенство* (2.1) *справедливо для некоторых $i \in S_A$ и $j \notin S_A$. Тогда справедливо и неравенство*

$$\big[|a_{jj}| - r_j^i(A)\big]\ |a_{ii}| > |a_{ji}|\ r_i(A), \tag{2.2}$$

в котором индексы меняются местами.

Доказательство. Вычитая $|a_{ij}||a_{jj}|$из обеих частей (2.1), мы получаем

$$[|a_{ii}| - r_i(A)]\ |a_{jj}| > |a_{ij}|\ [r_j(A) - |a_{jj}|].$$

Принимая во внимание, что $i \in S_A$ и $j \notin S_A$, запишем последнее неравенство в виде

$$[r_i(A) - |a_{ii}|]\ |a_{jj}| < |a_{ij}|\ [|a_{jj}| - r_j(A)].$$

Поскольку $|a_{ii}| \leqslant r_i(A)$, отсюда следует, что

$$[r_i(A) - |a_{ii}|]\ |a_{jj}| < r_i(A)\ [|a_{jj}| - r_j(A)],$$

или

$$r_i(A)\ r_j(A) < |a_{ii}|\ |a_{jj}|. \tag{2.3}$$

Теперь допустим, что неравенство (2.2) не выполняется, т.е.

$$\left[|a_{jj}| - r_j^i(A)\right]\ |a_{ii}| \leqslant |a_{ji}|\ r_i(A).$$

Тогда, вычитая $|a_{ji}||a_{ii}|$ из обеих частей (2.1), получаем

$$[|a_{jj}| - r_j(A)]\ |a_{ii}| \leqslant |a_{ji}|\ [r_i(A) - |a_{ii}|],$$

откуда

$$[|a_{jj}| - r_j(A)]\ |a_{ii}| \leqslant r_j(A)\ [r_i(A) - |a_{ii}|],$$

или

$$|a_{ii}|\ |a_{jj}| \leqslant r_i(A)\ r_j(A),$$

что противоречит неравенству (2.3).

Тем самым неравенство (2.2) установлено, что и завершает доказательство леммы. □

Теперь мы готовы представить новую характеризацию DZT матриц.

Теорема 2.1. *Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, является DZT матрицей тогда и только тогда, когда либо $S_A = \varnothing$, т.е. A – SDD матрица, либо неравенство* (2.1) *с соответствующими $j = j(i) \neq i$ выполняется для всех $i \in S_A$.*

Доказательство. Если A – DZT матрица, то, по определению, условие (2.1) выполнено для всех $i \in \langle n\rangle$ и, в частности, для всех $i \in S_A$, если только $S_A \neq \varnothing$.

Докажем обратное утверждение. Если $S_A = \varnothing$, то матрица A имеет строгое диагональное преобладание, так что она является DZT матрицей. Теперь предположим, что $S_A \neq \varnothing$ и что (2.1) справедливо для всех $i \in S_A$. Мы должны показать, что оно также справедливо и для всех $i \notin S_A$.

Если $|\overline{S_A}| \geqslant 2$ и $i \in \overline{S_A}$, то неравенство (2.1) верно тривиальным образом для всех $j \in \overline{S_A}$, $j \neq i$.

Итак, нам лишь остается рассмотреть тот случай, когда $|\overline{S_A}| = 1$, $\overline{S_A} = \{k\}$, и показать, что условие (2.1) выполнено для $i = k$ при некотором $j \neq k$, $j \in S_A$. В этом случае, по предположению, для всех $j \neq k$ мы имеем

$$\left[|a_{jj}| - r_j^k(A)\right] \ |a_{kk}| > |a_{jk}| \ r_k(A). \tag{2.4}$$

Но тогда, в силу леммы 2.1, для любого $j \neq k$ выполнено и неравенство

$$\left[|a_{kk}| - r_k^j(A)\right] \ |a_{jj}| > |a_{kj}| \ r_j(A). \qquad \square$$

В следующей лемме перечислены некоторые элементарные следствия соотношения (2.1).

Лемма 2.2. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, удовлетворяет соотношению* (2.1) *при некоторых i и j, где $i \neq j$. Тогда матрица A обладает следующими свойствами:*

(i) $a_{ii} \neq 0$ *и* $a_{jj} \neq 0$*;*

(ii) $|a_{ii}| > r_i^j(A)$*;*

(iii) *если* $a_{ij} = 0$, *то* $|a_{ii}| > r_i(A)$, *т.е.* $i \notin S_A$*;*

(iv) *если* $a_{ij} \neq 0$, *то* $i \notin S_A$ *или* $j \notin S_A$*;*

(v) *A удовлетворяет условию* (2.1) *тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ удовлетворяет* (2.1).

Доказательство. Свойства (i)–(v) легко следуют из (2.1). $\square$

Следствие 2.1. *Если, в условиях леммы* 2.2, *$i \in S_A$, то $a_{ij} \neq 0$.*

Доказательство. Допустим, что $a_{ij} = 0$. Тогда, в силу (ii), имеем $|a_{ii}| > r_i^j(A) = r_i(A)$, т.е. $i \notin S_A$, противоречие. $\square$

В силу следствия 2.1, для DZT матрицы A в соотношении (2.1) при $i \in S_A$ необходимо $a_{ij} \neq 0$.

Ниже нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.3. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть при некоторых $i \neq j$ выполнено неравенство* (2.1), *причем $a_{ij} \neq 0$. Тогда матрица*

$$B = (b_{ij}) := T_{ij}\left(\frac{-a_{ij}}{a_{jj}}\right) A, \tag{2.5}$$

где $T_{ij}(\xi) = I_n + \xi e_{ij}$ *– трансвекция, обладает следующими свойствами:*

(i) $b_{ij} = 0$*;*

(ii) $|b_{ii}| - r_i(B) \geqslant [|a_{ii}| - r_i^j(A)] - \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} r_j(A)$*, откуда, в силу* (2.1)*,* i*-ая строка матрицы* B *является sdd;*

(iii) *при* $k \neq i$ k*-ые строки матриц* B *и* A *совпадают.*

Доказательство. По определению матрицы T_{ij}, мы имеем

$$B = T_{ij}\left(\frac{-a_{ij}}{a_{jj}}\right) A = A - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \sum_{i=1}^{n} a_{js} e_{is}. \tag{2.6}$$

Из (2.6) немедленно следует, что B отличается от A только i-ой строкой, что доказывает (iii).

Также из (2.6) мы выводим

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} a_{jj} = 0.$$

Этим доказан пункт (i).

Для того, чтобы установить (ii), заметим, что, ввиду (2.6),

$$b_{ii} = a_{ii} - \frac{a_{ij} a_{ji}}{a_{jj}}$$

и при $k \neq i, j$ имеет место равенство

$$b_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{ij} a_{jk}}{a_{jj}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |b_{ii}| - r_i(B) &= \left| a_{ii} - \frac{a_{ij} a_{ji}}{a_{jj}} \right| - \sum_{k \neq i,j} \left| a_{ik} - \frac{a_{ij} a_{jk}}{a_{jj}} \right| \\ &\geqslant |a_{ii}| - \frac{|a_{ij}||a_{ji}|}{|a_{jj}|} - \sum_{k \neq i,j} |a_{ik}| - \sum_{k \neq i,j} \frac{|a_{ij}||a_{jk}|}{|a_{jj}|} \\ &= [|a_{ii}| - r_i^j(A)] - \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} r_j(A). \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.3 показывает, в частности, что если матрица A удовлетворяет условию (2.1) при некоторых $i \in S_A$ и $j \neq i$, то i-ая строка матрицы A может быть трансформирована в строку со строгим диагональным преобладанием прибавлением к ней j-ой строки с коэффициентом $-a_{ij}/a_{jj}$, т.е. посредством умножения матрицы A слева на трансвекцию $T_{ij}\left(\frac{-a_{i_kj_k}}{a_{j_kj_k}}\right)$.

Теперь мы докажем, что если A – DZT матрица, то найдется такая невырожденная матрица T, что $B = TA$ является SDD матрицей и, кроме того, матрица T перестановочно подобна верхней унитреугольной матрице вида $\begin{bmatrix} I_k & * \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix}$.

Отсюда будет нетрудно заключить, что $\{\mathrm{DZT}\} \subset \{\mathcal{H}\}$, а также получить верхнюю оценку $\|A^{-1}\|_\infty$ для DZT матрицы A.

Теорема 2.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – DZT матрица, для которой $S_A = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $p \geqslant 1$, и пусть*

$$\left[|a_{i_ki_k}| - r_{i_k}^{j_k}(A)\right]\ |a_{j_kj_k}| > |a_{i_kj_k}|\ r_{j_k}(A), \quad k = 1, \ldots, p. \tag{2.7}$$

Тогда матрица

$$B = TA, \tag{2.8}$$

где

$$T := \prod_{k=1}^{p} T_{i_kj_k}\left(\frac{-a_{i_kj_k}}{a_{j_kj_k}}\right) = I_n - \sum_{k=1}^{p} \frac{a_{i_kj_k}}{a_{j_kj_k}} e_{i_kj_k}, \tag{2.9}$$

имеет строгое диагональное преобладание; кроме того,

$$|b_{jj}| - r_j(B) = |a_{jj}| - r_j(A), \quad j \notin S_A, \tag{2.10}$$

и

$$|b_{i_ki_k}| - r_{i_k}(B) \geqslant |a_{i_ki_k}| - r_{i_k}^{j_k}(A) - \frac{|a_{i_kj_k}|}{|a_{j_kj_k}|} r_{j_k}(A), \quad k = 1, \ldots, p. \tag{2.11}$$

Доказательство. По лемме 2.3, строка i_1 матрицы

$$B^{(1)} = T_{i_1j_1}\left(\frac{-a_{i_1j_1}}{a_{j_1j_1}}\right) A$$

является sdd и неравенство (2.11) верно при $k = 1$. Поскольку при $s \neq i_1$ s-ые строки матриц $B^{(1)}$ и A одинаковы, мы имеем $S_{B^{(1)}} = S_A \setminus \{i_1\}$ и, в силу (2.7), $B^{(1)} \in \{\mathrm{DZT}\}$.

Если $p = 1$, т.е. $S_A = \{i_1\}$, то теорема доказана. Поэтому предположим, что $p \geqslant 2$. В этом случае, используя индукцию, мы последовательно преобразуем строки $i_2, \ldots, i_p$ матрицы A в строки со строгим диагональным преобладанием, применяя соответствующие трансвекции $T_{i_k j_k}\left(\frac{-a_{i_k j_k}}{a_{j_k j_k}}\right)$. В результате таких операций изменяются только строки с номерами i_k, тогда как прочие остаются неизменными.

Здесь нужно учесть, что, по следствию 2.1 и пункту (iv) леммы 2.2, все элементы $a_{i_k j_k}$, $k = 1, \ldots, p$, являются ненулевыми и $j_1, \ldots, j_k \notin S_A$. Отсюда следует, что сроки с номерами $j_1, \ldots, j_k$ не подвергаются изменениям в процессе трансформации строк с номерами $i_1, \ldots, i_p$ в строки со строгим диагональным преобладанием. Также отсюда следует, что $i_k \neq j_l$ для всех $k, l = 1, \ldots, p$, откуда вытекает равенство (2.9). □

Замечание 2.1. Поскольку $i_k \in S_A$, $k = 1, \ldots, p$, и $j_k \in \overline{S_A}$, $k = 1, \ldots, p$, матрица (2.9) в теореме 2.2, ненулевые внедиагональные элементы которой расположены на позициях (i_k, j_k), $k = 1, \ldots, p$, перестановочно подобна верхней треугольной матрице вида

$$\begin{bmatrix} I_p & * \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что A является DZT матрицей тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ является DZT матрицей. Как легко видеть, в условиях теоремы 2.2 матрица

$$B = \prod_{k=1}^{p} T_{i_k j_k}\left(\frac{|a_{i_k j_k}|}{|a_{j_k j_k}|}\right)\mathcal{M}(A) \tag{2.12}$$

имеет неположительные внедиагональные элементы. Поскольку, по теореме 2.2, она имеет строгое диагональное преобладание, мы можем заключить, что B – SDD $\mathcal{M}$-матрица, тогда как матрица $T = \prod_{k=1}^{p} T_{i_k j_k}\left(\frac{|a_{i_k j_k}|}{|a_{j_k j_k}|}\right)$, очевидно, неотрицательна. Из (2.12) мы выводим, что

$$\mathcal{M}(A)^{-1} = B^{-1}T, \tag{2.13}$$

так что $\mathcal{M}(A)^{-1}$ – неотрицательная матрица. Значит, $\mathcal{M}(A)$ – монотонная Z-матрица, и, следовательно (см. [7, Theorem 6.2.3, condition N_{38}]), $\mathcal{M}(A)$ – невырожденная $\mathcal{M}$-матрица, а A – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица. Таким образом, в качестве следствия теоремы 2.2 мы получаем (новым способом) следующий известный результат, установленный в работе [17].

Следствие 2.2.

$$\{\mathrm{DZT}\} \subset \{\mathcal{H}\}.$$

Еще одним следствием теоремы 2.2 является верхняя оценка l_∞-нормы обратной для DZT матрицы.

Теорема 2.3. *Для матрицы* A, *удовлетворяющей условиям теоремы* 2.2, *справедлива оценка*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{ \max_{i\notin S_A} \frac{1}{|a_{ii}|-r_i(A)},\ \max_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{|a_{i_kj_k}|+|a_{j_kj_k}|}{\left[|a_{i_ki_k}|-r_{i_k}^{j_k}(A)\right]|a_{j_kj_k}|-|a_{i_kj_k}|r_{j_k}(A)} \right\}. \tag{2.14}$$

Замечание 2.2. Если A – SDD матрица, то $p = 0$, и оценка (2.14) теоремы 2.3 сводится к классической оценке Вараха [15].

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{|a_{ii}|-r_i(A)}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Как было показано выше, если A – DZT матрица, то матрица

$$B = T\mathcal{M}(A)$$

является SDD $\mathcal{M}$-матрицей, а T – невырожденная неотрицательная матрица. Тогда, по теореме 5.1 работы [6],

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\left[\Delta^{-1}B\right]^{-1}\|_\infty,$$

где диагональная матрица $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1,\dots,\delta_n)$ определяется равенством

$$\Delta e = Te,$$

т.е.

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i\notin S_A,\\ 1+\frac{|a_{i_kj_k}|}{|a_{j_kj_k}|}, & i=i_k,\ k=1,\dots,p. \end{cases}$$

Теперь для завершения доказательства неравенства (2.14) остается применить оценку Вараха (2.15) к SDD матрице $\Delta^{-1}B$ и принять во внимание соотношения (2.10) и (2.11). □

Замечание 2.3. Приведенное выше доказательство верхней оценки (2.14) основывается на приеме, впервые использованном в работе [3] для вывода верхней оценки нормы обратной для матрицы Некрасова. Здесь следует отметить, что, в силу теоремы 2.2, DZT и некрасовские матрицы имеют то сходство, что и те, и другие могут быть преобразованы в SDD матрицы умножением слева на некоторые невырожденные матрицы. При этом, если DZT или некрасовская матрица является $\mathcal{M}$-матрицей, то соответствующая матрица преобразования неотрицательна.

В завершение этого параграфа мы представим новый результат о локализации собственных значений квадратной матрицы, который легко следует из невырожденности DZT матриц и их характеризации, установленной в теореме 2.1.

Теорема 2.4. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\mathrm{Spec} A \subseteq \bigcup_{i\in\langle n\rangle} \left\{ \Gamma_i(A) \cap \left[\bigcap_{\substack{j\neq i:\\ a_{ij}\neq 0}} \Omega_{ij}(A) \right] \right\}, \tag{2.16}$$

где $\mathrm{Spec}A$ *– множество собственных значений матрицы* A*;*

$$\Gamma_i(A) = \{z \in \mathbb{C} : \ |a_{ii} - z| \leqslant r_i(A)\}, \quad i = 1,\dots,n,$$

– круги Гершгорина для A*, а множества* $\Omega_{ij}(A)$ *определяются, как и в работе* [17]*, по формуле*

$$\Omega_{ij}(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ [|a_{ii} - z| - r_i^j(A)]\, |a_{jj} - z| \leqslant |a_{ij}|\, r_j(A) \right\}, \qquad i,j = 1,\dots,n, \quad i \neq j.$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathrm{Spec}A$. Тогда матрица $A - \lambda I_n$ является вырожденной, а значит, в силу теоремы 2.1, найдется такой индекс $i \in S_{A-\lambda I_n}$, что для всех $j \neq i$ имеют место неравенства

$$[|a_{ii} - \lambda| - r_i^j(A)]\, |a_{jj} - \lambda| \leqslant |a_{ij}|\, r_j(A).$$

Они означают, что

$$\lambda \in \bigcap_{j\neq i} \Omega_{ij}(A). \tag{2.17}$$

С другой стороны, включение $i \in S_{A-\lambda I_n}$ равносильно включению

$$\lambda \in \Gamma_i(A). \tag{2.18}$$

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно принять во внимание соотношения (2.17) и (2.18), а также тот очевидный факт, что если $a_{ij} = 0$, то $\Omega_{ij}(A) = \Gamma_i(A)$. $\square$

Заметим, что правая часть включения (2.16), очевидно, содержится как в множестве кругов Гершгорина

$$\Gamma(A) = \bigcup_{i \in \langle n \rangle} \Gamma_i(A),$$

так и в множестве

$$\Omega(A) = \bigcup_{i \in \langle n \rangle} \left[\bigcap_{j \neq i} \Omega_{ij}(A) \right],$$

предложенном в [17].

§3. Соотношения между классами $\{\mathrm{DZT}\}, \{\mathrm{DZ}\}$ и $\{S\text{-SDD}\}$

В этом параграфе рассматриваются соотношения между классами матриц, указанными в его заголовке.

Как было продемонстрировано на численных примерах в работе [17],

$$\{\mathrm{DZT}\} \not\subseteq \{\mathrm{DZ}\} \quad \text{и} \quad \{\mathrm{DZ}\} \not\subseteq \{\mathrm{DZT}\}.$$

Также в [17] было отмечено, что при $n = 2$ и $n = 3$ любая DZT является DZ матрицей, а при $n = 2$ справедливо обратное. Далее, при $n = 3$ $\{\mathrm{DZ}\} \not\subseteq \{\mathrm{DZT}\}$, тогда как при $n = 4$ $\{\mathrm{DZT}\} \not\subseteq \{\mathrm{DZ}\}$.

Соотношения между классами $\{\mathrm{DZ}\}$ и $\{\mathrm{DZT}\}$ можно уточнить, если использовать множество S_A, состоящее из номеров тех строк матрицы A, которые не имеют строгого диагонального преобладания.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, – DZ матрица и пусть при некотором $j \in \langle n \rangle$ выполнено условие

$$\left[|a_{ii}| - r_i^j(A) \right] \, |a_{jj}| > |a_{ij}| \, r_j(A) \quad \text{для всех} \quad i \neq j. \tag{3.1}$$

Разобьем множество всех DZ матриц на два типа в зависимости от того, какое из включений $j \notin S_A$ или $j \in S_A$ выполняется.

В первом случае, неравенство (3.1) справедливо, в частности, для всех $i \in S_A$, откуда, ввиду теоремы 2.1, следует, что $A \in \{\mathrm{DZT}\}$. Итак, *каждая DZ матрица первого типа является DZT матрицей.*

Что же касается DZ матриц второго типа, то, в силу пунктов (ii) и (iv) леммы 2.2, мы заключаем, что $i \notin S_A$ для всех $i \neq j$. Другими словами, для DZ матрицы второго типа мы имеем $S_A = \{j\}$, т.е. A отличается от SDD матрицы лишь одной строкой. Такие матрицы могут не принадлежать классу {DZT}, как показывает пример, рассмотренный в работе [17].

Таким образом, *каждая DZ матрица либо является DZT матрицей, либо отличается от SDD (а значит и от DZT) матрицы одной строкой.*

Пусть теперь A – DZT матрица порядка n. Если $|S_A| = n-1$, то, очевидно, A является DZ матрицей, поскольку $|\overline{S_A}| = 1$. С другой стороны, если $|S_A| = 1$, $S_A = \{i\}$ и $j = j(i)$, то, наряду с (3.1), мы также имеем

$$[|a_{kk}| - r_k^j(A)]\, |a_{jj}| > |a_{kj}|\, r_j(A) \quad \text{для всех} \quad k \neq i, j. \tag{3.2}$$

Таким образом, и в этом случае $A \in \{\mathrm{DZ}\}$.

Напомним, что DZ матрицы образуют подкласс класса так называемых S-SDD матриц, которые определяются следующим образом [13, 16].

Пусть $S \subset \langle n \rangle$ – непустое собственное подмножество множества индексов. Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется S-SDD матрицей, если выполняются следующие два условия:

(i) для всех $i \in S$,

$$|a_{ii}| > r_i^S(A); \tag{3.3}$$

(ii) для всех $i \in S$ и всех $j \in \bar{S}$,

$$[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\, [|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)] > r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A). \tag{3.4}$$

Заметим, что из (3.3) и (3.4) вытекает, что, наряду с (3.3), мы также имеем

$$|a_{jj}| > r_j^{\bar{S}}(A) \quad \text{для всех} \quad j \in \bar{S}.$$

Ясно, что DZ матрица A, удовлетворяющая (3.1), является S-SDD матрицей для $S = \langle n \rangle \setminus \{j\}$ или $S = \{j\}$.

Рассмотрим пример DZT матрицы, которая не является S-SDD матрицей ни при каком выборе подмножества S.

Пример 3.1. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & | & -3 & 0 \\ -1 & 3 & | & 0 & -8 \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & -1 & | & 3 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 8 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

В этом случае, $S_A = \{1, 2\}$ и если $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, то условие

$$[|a_{i_k i_k}| - r_{i_k}^{j_k}(A)]\,|a_{j_k j_k}| > |a_{i_k j_k}|\,r_{j_k}(A)$$

выполнено для $k = 1, 2$ и $j_1 = 3$, $j_2 = 4$.

Следовательно, A – DZT матрица и

$$\begin{bmatrix} I_2 & I_2 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & | & 0 & 0 \\ -1 & 3 & | & 0 & 0 \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & -1 & | & 3 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 8 \end{bmatrix} \in \{\mathrm{SDD}\}.$$

Теперь мы покажем, что A не является S-SDD матрицей ни при каком $S \subsetneqq \langle n \rangle$, $S \neq \varnothing$. Для этого мы сперва заметим, что из (3.4) следует, что при любых $i \in S$ и любых $j \in \bar{S}$ либо $i \notin S_A$, либо $j \notin S_A$. Это значит, что множество S_A целиком попадает либо в S, либо в $\bar{S}$. Поскольку классы $\{S\text{-SDD}\}$ и $\{\bar{S}\text{-SDD}\}$, очевидно, совпадают, без ограничения общности можно считать, что

$$S_A \subseteq S. \tag{3.6}$$

Итак, нам достаточно показать, что $A \notin \{S\text{-SDD}\}$ при $S = S_A = \{1, 2\}$, $S = \{1, 2, 3\}$ и $S = \{1, 2, 4\}$.

Пусть сперва $S = \{1, 2\}$. В этом случае,

$$\left[|a_{22}| - r_2^S(A)\right]\,\left[|a_{33}| - r_3^{\bar{S}}(A)\right] = 2 \cdot 3 = 6,$$

тогда как

$$r_2^{\bar{S}}(A)\,r_3^S(A) = 8 \cdot 1 = 8.$$

Тем самым условие (3.4) не выполняется при $i = 2$ и $j = 3$, так что A не является S-SDD матрицей для $S = \{1, 2\}$.

Если $S = \{1, 2, 3\}$, то

$$|a_{11}| - r_1^S(A) = -1 < 0,$$

так что условие (3.3) не выполняется, откуда вытекает, что A не является S-SDD матрицей для $S = \{1, 2, 3\}$.

Наконец, если $S = \{1, 2, 4\}$, то

$$|a_{22}| - r_2^S(A) = -6 < 0,$$

так что условие (3.3) не выполнено, и A не является S-SDD матрицей для $S = \{1, 2, 4\}$.

Итак, DZT матрица (3.5) не является S-SDD матрицей ни при каком возможном выборе подмножества S.

Этим доказано, что при $n = 4$

$$\{\mathrm{DZT}\} \nsubseteq \{S\text{-SDD}\}. \tag{3.7}$$

Рассматривая матрицы

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix},$$

где $k \geqslant 1$ и A – это матрица (3.5), мы видим, что соотношение (3.7) выполнено и при всех $n \geqslant 4$.

Наконец, поскольку $\{\mathrm{DZ}\} \subseteq \{S\text{-SDD}\}$, из (3.7) немедленно следует, что

$$\{\mathrm{DZT}\} \nsubseteq \{\mathrm{DZ}\}.$$

§4. Верхняя оценка обратной для DZ матрицы

В этом параграфе мы выводим верхнюю оценку нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для DZ матрицы A общего вида, адаптируя к рассматриваемому случаю представленную ниже известную оценку для S-SDD матриц. Также мы рассматриваем специальные оценки для DZ матриц первого и второго типов, а также улучшаем оценку Вараха для SDD матриц.

Теорема 4.1 ([14, 2])**.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – S-SDD матрица, где S – непустое собственное подмножество множества индексов $\langle n\rangle$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\ j\in\bar S} \max\left\{\rho_{ij}^S(A),\ \rho_{ji}^{\bar S}(A)\right\}, \tag{4.1}$$

где

$$\rho_{ij}^S(A) = \frac{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A)}{[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\,[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)] - r_i^{\bar S}(A) r_j^S(A)}, \quad i \in S, \quad j \in \bar S. \tag{4.2}$$

В том частном случае, когда A является DZ матрицей и $S = \langle n\rangle\backslash\{j\}$, оценка (4.1)–(4.2) принимает вид

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{\substack{i\in\langle n\rangle,\\ i\neq j}} \frac{\max\{|a_{ii}| - r_i^j(A) + r_j(A),\ |a_{ij}| + |a_{jj}|\}}{[|a_{ii}| - r_i^j(A)]\,|a_{jj}| - |a_{ij}|\, r_j(A)}. \tag{4.3}$$

Основываясь на оценке (4.3), мы получаем следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, где $n \geqslant 2$, – DZ матрица, такая что*

$$[|a_{ii}| - r_i^j(A)]\, |a_{jj}| > |a_{ij}|\, r_j(A)$$
$$\text{при некотором} \quad j \in \langle n\rangle \quad \text{и при всех} \quad i \neq j. \tag{4.4}$$

Тогда

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{ \max_{\substack{i\neq j:\\ p_i(A)\geqslant p_j(A)}} \frac{|a_{ii}| - r_i^j(A) + r_j(A)}{[|a_{ii}| - r_i^j(A)]\, |a_{jj}| - |a_{ij}|\, r_j(A)}, \right.$$
$$\left. \max_{\substack{i\neq j:\\ p_i(A)< p_j(A)}} \frac{|a_{ij}| + |a_{jj}|}{[|a_{ii}| - r_i^j(A)]\, |a_{jj}| - |a_{ij}|\, r_j(A)} \right\}, \tag{4.5}$$

где мы используем обозначение

$$p_i(A) := |a_{ii}| - r_i(A), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.6}$$

Доказательство. Ввиду (4.3), для того, чтобы установить оценку (4.5), достаточно заметить, что

$$|a_{ii}| - r_i^j(A) + r_j(A) \geqslant |a_{ij}| + |a_{jj}|$$

тогда и только тогда, когда $p_i(A) \geqslant p_j(A)$. □

Рассмотрим некоторые приложения теоремы 4.2.

Поскольку любая SDD матрица является DZ матрицей, теорема 4.2 применима, в частности, к любой SDD матрице A. Выберем $j \in \langle n\rangle$ таким образом, что

$$p_j(A) = \max_{i\in\langle n\rangle} p_i(A). \tag{4.7}$$

Тогда, поскольку условие (4.4), очевидно, выполнено, то, в силу (4.5), мы имеем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\neq j} \frac{|a_{ij}| + |a_{jj}|}{[|a_{ii}| - r_i^j(A)]\, |a_{jj}| - |a_{ij}|\, r_j(A)}. \tag{4.8}$$

Аналогично, если

$$p_k(A) = \min_{i\in\langle n\rangle} p_i(A), \tag{4.9}$$

то, применяя теорему 4.2, мы получаем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\neq k} \frac{|a_{ii}| - r_i^k(A) + r_k(A)}{[|a_{ii}| - r_i^k(A)]\, |a_{kk}| - |a_{ik}|\, r_k(A)}. \tag{4.10}$$

Учитывая (4.8) и (4.10), мы приходим к следующему результату для SDD матриц.

Следствие 4.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *где* $n \geqslant 2$, *является SDD матрицей. Если индексы* $j, k \in \langle n \rangle$ *определены в соответствии с* (4.7) *и* (4.9), *то справедлива оценка*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \min\left\{ \max_{i\neq j} \frac{|a_{ij}| + |a_{jj}|}{[|a_{ii}| - r_i^j(A)]\, |a_{jj}| - |a_{ij}|\, r_j(A)}, \right.$$
$$\left. \max_{i\neq k} \frac{|a_{ii}| - r_i^k(A) + r_k(A)}{[|a_{ii}| - r_i^k(A)]\, |a_{kk}| - |a_{ik}|\, r_k(A)} \right\}. \qquad (4.11)$$

Покажем, что оценка (4.11), вообще говоря, улучшает классическую оценку Вараха

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}. \qquad (4.12)$$

Для этого нам достаточно убедиться, что при всех $i \neq j$ имеет место неравенство

$$\frac{|a_{ij}| + |a_{jj}|}{[|a_{ii}| - r_i^j(A)]\, |a_{jj}| - |a_{ij}|\, r_j(A)} \leqslant \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}, \qquad (4.13)$$

а для всех $i \neq k$ – неравенство

$$\frac{|a_{ii}| - r_i^k(A) + r_k(A)}{[|a_{ii}| - r_i^k(A)]\, |a_{kk}| - |a_{ik}|\, r_k(A)} \leqslant \frac{1}{|a_{kk}| - r_k(A)}. \qquad (4.14)$$

Действительно, как легко видеть, (4.13) равносильно неравенству

$$|a_{ij}|\, p_i(A) \leqslant |a_{ij}|\, p_j(A),$$

тогда как (4.14) эквивалентно соотношению

$$p_k(A)\, r_k(A) \leqslant p_i(A)\, r_k(A).$$

Остается заметить, что оба последние соотношения выполняются в силу (4.7) и (4.9).

Проиллюстрируем оценки (4.11) и (4.12) следующим примером.

Пример 4.1. Рассмотрим SDD матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Применяя оценку Вараха (4.12), мы получаем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant 1,$$

тогда как оценка (4.11) (с $k = 1$ и $j = 4$) дает

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \min\{2/3,\ 3/4\} = 2/3.$$

Заметим, что $\|A^{-1}\|_\infty = 2/3$, так что оценка (4.11) оказывается точной для матрицы A.

В том случае, когда A – DZ матрица второго типа, т.е. $S_A = \{j\}$, мы, очевидно, имеем $p_i(A) > 0 \geqslant p_j(A)$ для всех $i \neq j$, и оценка (4.5) принимает следующий более простой вид:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\neq j} \frac{|a_{ii}| - r_i^j(A) + r_j(A)}{[|a_{ii}| - r_i^j(A)]\,|a_{jj}| - |a_{ij}|\,r_j(A)}. \tag{4.15}$$

Наконец, рассмотрим случай DZ матрицы A первого типа, для которой (4.4) справедливо при некотором $j \notin S_A$, так что $p_j(A) > 0$. Обратная к такой матрице удовлетворяет, во-первых, неравенству (4.5) теоремы 4.2, относящейся к случаю DZ матриц общего вида. С другой стороны, поскольку, как показано в §3, A одновременно является и DZT матрицей, то к ней также применима и теорема 2.3. В рассматриваемом случае, оценку (2.14) можно записать в виде

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\max_{i\notin S_A} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)},\ \max_{i\in S_A} \frac{|a_{ij}| + |a_{jj}|}{[|a_{ii}| - r_i^j(A)]\,|a_{jj}| - |a_{ij}|r_j(A)}\right\}. \tag{4.16}$$

Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2.3, но исключая все ненулевые элементы j-го столбца матрицы A, а не только элементы a_{ij} из строк $i \in S_A$, можно получить следующую оценку:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{1}{|a_{jj}| - r_j(A)},\ \max_{i\neq j} \frac{|a_{ij}| + |a_{jj}|}{\left[|a_{ii}| - r_i^j(A)\right]|a_{jj}| - |a_{ij}|r_j(A)}\right\}. \tag{4.17}$$

Покажем, что оценка (4.17), вообще говоря, улучшает оценку (4.16). Действительно, как легко убедиться, если $0 < p_i(A) \leqslant p_j(A)$, то

$$\frac{|a_{ij}| + |a_{jj}|}{\Big[|a_{ii}| - r_i^j(A)\Big]\, |a_{jj}| - |a_{ij}| r_j(A)} \leqslant \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)}, \tag{4.18}$$

а если $p_i(A) \geqslant p_j(A)$, то

$$\frac{|a_{ij}| + |a_{jj}|}{\Big[|a_{ii}| - r_i^j(A)\Big]\, |a_{jj}| - |a_{ij}| r_j(A)} \leqslant \frac{1}{|a_{jj}| - r_j(A)}. \tag{4.19}$$

Таким образом, при всех $i \notin S_A$ мы имеем

$$\frac{|a_{ij}| + |a_{jj}|}{\Big[|a_{ii}| - r_i^j(A)\Big]\, |a_{jj}| - |a_{ij}| r_j(A)} \leqslant \max_{k \notin S_A} \frac{1}{|a_{kk}| - r_k(A)}, \tag{4.20}$$

так что правая часть неравенства (4.17) не превосходит правую часть неравенства (4.16).

Далее, ввиду (4.19), оценка (4.17) равносильна оценке

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max \left\{ \frac{1}{|a_{jj}| - r_j(A)}, \max_{\substack{i \neq j: \\ p_i(A) < p_j(A)}} \frac{|a_{ij}| + |a_{jj}|}{\Big[|a_{ii}| - r_i^j(A)\Big]\, |a_{jj}| - |a_{ij}| r_j(A)} \right\}. \tag{4.21}$$

Покажем теперь, что оценка (4.21), которая получается, если рассматривать матрицу A как DZT матрицу специального вида, не лучше, чем оценка (4.5), которая получается, если рассматривать матрицу A как S-SDD матрицу. Действительно, нам остается лишь убедиться, что

$$\frac{|a_{ii}| - r_i^j(A) + r_j(A)}{\Big[|a_{ii}| - r_i^j(A)\Big]\, |a_{jj}| - |a_{ij}| r_j(A)} \leqslant \frac{1}{|a_{jj}| - r_j(A)}, \tag{4.22}$$

если только $i \neq j$ и $p_i(A) \geqslant p_j(A)$. Проверка этого утверждения проводится тривиально.

Окончательно, мы заключаем, что *для DZ матрицы A первого типа, удовлетворяющей условию* (4.4) *при $j \notin S_A$, справедливы неравенства*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max \left\{ \max_{\substack{i \neq j: \\ p_i(A) \geqslant p_j(A)}} \frac{|a_{ii}| - r_i^j(A) + r_j(A)}{[|a_{ii}| - r_i^j(A)]\, |a_{jj}| - |a_{ij}|\, r_j(A)}, \right.$$

$$\left.\max_{\substack{i\neq j:\\ p_i(A)<p_j(A)}} \frac{|a_{ij}|+|a_{jj}|}{[|a_{ii}|-r_i^j(A)]\,|a_{jj}|-|a_{ij}|\,r_j(A)}\right\}$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{1}{|a_{jj}|-r_j(A)},\ \max_{\substack{i\neq j\\ p_i(A)<p_j(A)}} \frac{|a_{ij}|+|a_{jj}|}{\Big[|a_{ii}|-r_i^j(A)\Big]\,|a_{jj}|-|a_{ij}|r_j(A)}\right\}.$$

Список литературы

1. Л. С. Дашниц, М. С. Зусманович, *О некоторых критериях регулярности матриц и локализации их спектра.*— Ж. вычисл. мат. мат. физ. **10**, No. 5 (1970) 1092–1097.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.*— Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки бесконечной нормы обратных к матрицам Некрасова.*— Зап. научн. семин. ПОМИ **419** (2013), 111–120.
4. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных для обобщенных матриц Некрасова.*— Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 182–195.
5. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных в норме l_∞ для некоторых блочных матриц.*— Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 145–158.
6. Л. Ю. Колотилина, *Новые подклассы класса $\mathcal{H}$-матриц и соответствующие оценки обратных матриц.*— Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 148–171.
7. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, New York etc., 1979.
8. L. Cvetković, *H-matrix theory vs. eigenvalue localization.*— Numer. Algorithms **42** (2007), 229–245.
9. L. Cvetković, P.-F. Dai, K. Doroslovački, Y.-T. Li, *Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **219** (2013), 5020–5024.
10. L. Cvetković, K. Doroslovački, *Max norm estimation for the inverse of block matrices.* — Appl. Math. Comput. **242** (2014), 694–706.
11. L. Cvetković, V. Kostić, K. Doroslovački, *Max-norm bounds for the inverse of S-Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **218** (2012), 9498–9503.
12. L. Cvetković, V. Kostić, S. Rauški, *A new subclass of H-matrices.* — Appl. Math. Comput. **208** (2009), 206–210.
13. L. Cvetković, V. Kostić, R. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion area.* — ETNA **18** (2004), 73–80.
14. N. Morača, *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of SDD and $\mathcal{S}-SDD$ matrices.* — J. Comput. Appl. Math. **206** (2007), 666–678.
15. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
16. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles.*— Springer Series Comput. Math. **36**, Springer, 2004.
17. Jianxing Zhao, Qilong Liu, Chaoqian Li, Yaotang Li, *Dashnic–Zusmanovich type matrices: a new subclass of nonsingular H-matrices.* — Linear Algebra Appl. **552** (2018), 277–287.

Kolotilina L. Yu. On Dashnic–Zusmanovich (DZ) and Dashnic–Zusmanovich type (DZT) matrices and their inverses.

The paper is mainly devoted to studying the so-called Dashnic–Zusmanovich type (DZT) matrices, introduced recently. Interrelations among the DZT matrices and related subclasses of the class of nonsingular $\mathcal{H}$-matrices, namely, the Dashnic–Zusmanovich (DZ) and S-SDD matrices are considered. Upper bounds for the l_∞-norm of the inverses to DZT, DZ, and strictly diagonally dominant (SDD) matrices are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия

Поступило 1 октября 2018 г.

E-mail: `lilikona@mail.ru`